FREE EBOOK

oliveboard

Tamil Nadu Textbook

Class 9 - Tamil Medium

Mathematics

For all TN Exams

தமிழ்நாடு அரசு

ஒன்பதாம் வகுப்பு

கணக்கு

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனித நேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

PreliminaryT-III TM.indd 1 26-12-2019 13:21:47

தமிழ்நாடு அரசு

முதல் பதிப்பு – *2018*

திருத்திய பதிப்பு – *2019*

(புதிய பாடத்திட்டத்தின் கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும் தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி
மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்
© SCERT 2018

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும்
கல்வியியல் பணிகள் கழகம்

www.textbooksonline.tn.nic.in

oliveboard

பொருளடக்கம்

இயல் எண்	இயல்	மாதம்	ப. எண்
1	**கண மொழி**		**1**
1.1	அறிமுகம்	ஜூன்	1
1.2	கணம்		2
1.3	கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறைகள்		3
1.4	கணங்களின் வகைகள்		6
1.5	கணச் செயல்பாடுகள்		14
1.6	கணச் செயல்களின் பண்புகள்		22
1.7	டி மார்கன் விதிகள்		26
1.8	கணங்களின் ஆதி எண்ணின் பயன்பாட்டுக் கணக்குகள்		30
2	**மெய்யெண்கள்**		**43**
2.1	அறிமுகம்	ஜூலை	43
2.2	விகிதமுறு எண்கள்		44
2.3	விகிதமுறா எண்கள்		48
2.4	மெய்யெண்கள்		59
2.5	மூலக்குறியீடு		62
2.6	முறுடுகள்		64
2.7	முறுடுகளை விகிதப்படுத்துதல்		73
2.8	அறிவியல் குறியீடு		75
3	**இயற்கணிதம்**		**84**
3.1	அறிமுகம்	ஆகஸ்ட்	85
3.2	பல்லுறுப்புக் கோவைகள்		88
3.3	மீதித் தேற்றம்		100
3.4	இயற்கணித முற்றொருமைகள்		105
3.5	காரணிப்படுத்துதல்	செப்டம்பர்	110
3.6	பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல்		116
3.7	மீப்பெரு பொது வகுத்தி		123
3.8	இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடு		125
4	**வடிவியல்**		**149**
4.1	அறிமுகம்	ஜூலை	150
4.2	கோணங்களின் வகைகள்	ஆகஸ்ட்	150
4.3	நாற்கரங்கள்	அக்டோபர்	155
4.4	வட்டத்தின் பகுதிகள்	நவம்பர்	170
4.5	ஒரு வட்டத்தின் நாண்களின் பண்புகள்		174
4.6	வட்ட நாற்கரங்கள்		181
4.7	செய்முறை வடிவியல்		185

PreliminaryT-III TM.indd 3 26-12-2019 13:21:48

5	**ஆயத்தொலை வடிவியல்**		**197**
5.1	தளத்தினை வரைபடமாகக் குறித்தல்	அக்டோபர்	197
5.2	ஆயத் தொலைவைக் கண்டறிதல்		200
5.3	இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு		206
5.4	ஒரு கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி		216
5.5	ஒரு கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமக்கூறிடும் புள்ளிகள்	நவம்பர்	222
5.6	பிரிவுச் சூத்திரம்		224
5.7	நடுக்கோட்டு மையத்தின் ஆயத்தொலைவுகள்		228
6	**முக்கோணவியல்**		**236**
6.1	அறிமுகம்	டிசம்பர்	236
6.2	சில சிறப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள்		242
6.3	நிரப்புக் கோணங்களுக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்கள்		247
6.4	முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தும் முறை		250
7	**அளவியல்**		**262**
7.1	அறிமுகம்	ஜனவரி	262
7.2	ஹெரான் சூத்திரம்		263
7.3	நாற்கரங்களின் பரப்புகளைக் காண்பதில் ஹெரான் சூத்திரத்தின் பயன்பாடு		266
7.4	கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரத்தின் புறப்பரப்பு		267
7.5	கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு		273
8	**புள்ளியியல்**		**281**
8.1	அறிமுகம்	பிப்ரவரி	281
8.2	தரவுகளைத் திரட்டுதல்		282
8.3	மையப்போக்கு அளவைகள்		284
8.4	கூட்டுச் சராசரி		285
8.5	இடைநிலை அளவு		295
8.6	முகடு		301
9	**நிகழ்தகவு**		**307**
9.1	அறிமுகம்	மார்ச்	307
9.2	அடிப்படைக் கருத்துகள்		309
9.3	தொன்மை அணுகுமுறை		311
9.4	பட்டறி அணுகுமுறை		312
9.5	நிகழ்ச்சிகளின் வகைகள்		316
	விடைகள்		**321**

F5S3RD
மின் நூல்

F5XC54
மதிப்பீடு

B563_9_MAT_TM_T3
இணைய வளங்கள்

குறியீடுகள்

$=$	சமம் (equal to)	$P(A)$	A இன் நிகழ்தகவு (probability of A)
$\neq$	சமமில்லை (not equal to)	$\|\|\|^{ly}$	இதேபோன்று (similarly)
$<$	விடக் குறைவு (less than)	$\triangle$	சமச்சீர் வித்தியாசம் (symmetric difference)
$\leq$	குறைவு அல்லது சமம் (less than or equal to)	$\mathbb{N}$	இயல் எண்கள் (Natural numbers)
$>$	விட அதிகம் (greater than)	$\mathbb{W}$	முழு எண்கள் (Whole numbers)
$\geq$	அதிகம் அல்லது சமம் (greater than or equal to)	$\mathbb{Z}$	முழுக்கள் (integers)
$\approx$	சமானமான (equivalent to)	$\mathbb{R}$	மெய்யெண்கள் (Real numbers)
$\cup$	சேர்ப்பு (union)	Δ	முக்கோணம் (Triangle)
$\cap$	வெட்டு (intersection)	$\angle$	கோணம் (Angle)
$\mathbb{U}$	அனைத்துக் கணம் (universal set)	$\perp$	செங்குத்து (perpendicular to)
$\in$	உறுப்பு (belongs to)	$\parallel$	இணை (parallel to)
$\notin$	உறுப்பல்ல (does not belong to)	$\Rightarrow$	உணர்த்துகிறது (implies)
$\subset$	தகு உட்கணம் (proper subset of)	$\therefore$	எனவே (therefore)
$\subseteq$	உட்கணம் (subset of or is contained in)	$\because$	ஏனெனில் (since (or) because)
$\not\subset$	தகு உட்கணமல்ல (not a proper subset of)	$\|\ \|$	தனிமதிப்பு (absolute value)
$\not\subseteq$	உட்கணமல்ல (not a subset of or is not contained in)	$\simeq$	தோராயமாகச் சமம் (approximately equal to)
A' (or) A^c	A இன் நிரப்புக்கணம் (complement of A)	$\cong$ (or) $\equiv$	சர்வ சமம் (congruent)
$\emptyset$ (or) $\{\ \}$	வெற்றுக்கணம் அல்லது இன்மைக் கணம் (empty set or null set or void set)	$\equiv$	முற்றொருமை (identically equal to)
$n(A)$	A என்ற கணத்தின் ஆதி எண் அல்லது செவ்வெண் (number of elements in the set A)	π	பை (pi)
$\sum$	கூடுதல் (summation)	$\pm$	மிகை அல்லது குறை (plus or minus)

PreliminaryT-III TM.indd 5 26-12-2019 13:21:48

பாடநூல் பயன்பாட்டுத் தலைப்புகள்

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு – குறள் 392

கற்றல் விளைவுகள்

வகுப்பறைச் செயல்பாடுகளை அளவீடுகளுடன் கூடிய கற்றல் மைய முறையாக மாற்றி அமைத்தல்

குறிப்பு

பாடப்பொருளில் மாணவர்களுக்கான கூடுதல் தகவல்களை அளித்தல்

செயல்பாடு/செயல்திட்டம்

கணிதத்தைக் கற்றுக் கொள்ள மாணவர்களை குறிப்பிட்ட செயல்பாடுகளில் ஈடுபட ஊக்குவித்தல்

இணையச் செயல்பாடு

கற்போரின் பாடப்பொருள் புரிதலை தொழில்நுட்பப் பயன்பாட்டின் மூலம் மேம்படுத்துதல்

சிந்தனைக் களம்

மாணவர்கள் கணிதத்தைக் கற்றுக் கொள்ளும் ஆர்வத்தைத் தூண்டுதல்.
மாணவர்களை பரந்த சிந்தனை கொண்டவர்களாக ஆக்குதல்

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

பாடப்பொருளில் கற்றவற்றை நினைவு கூறுதல்

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

பாடப்பொருளில் கூடுதல் மதிப்பீட்டு வினாக்களை அளித்தல்

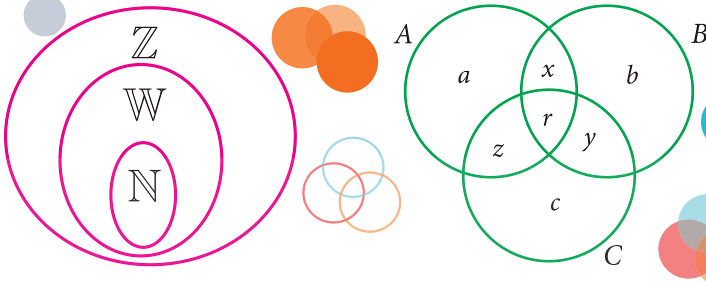
முன்னேற்றத்தை சோதித்தல்

கற்போரின் முன்னேற்றத்தை சுய மதிப்பீடு செய்தல்

பயிற்சி

பாடப்பொருளில் கற்போருக்கு உள்ள புரிதலை மதிப்பிடுதல்

"The essence of mathematics is not to make simple things complicated but to make complicated things simple" -S. Gudder

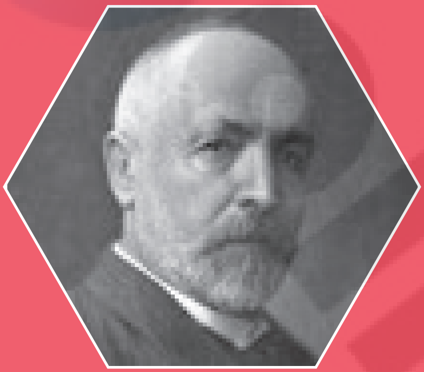


1

கண மொழி

பன்மையையும் ஒருமையாகக் காண வைப்பது கணம்

-ஜார்ஜ் கேண்டர்



ஜார்ஜ் கேண்டர்
(கி.பி (பொ.ஆ)1845 - 1918)

ஜெர்மன் கணிதவியலாளர் ஜார்ஜ் கேண்டர் (Georg Cantor) கணங்களின் கோட்பாடுகளை உருவாக்கினார். இன்று அவை கணிதத்தின் அனைத்துப் பிரிவுகளிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. கணிதத்தில் அனைத்துக் கணிதக்கட்டமைப்புகளையும் கணங்களாகவே கருதலாம்.

CHBPAN

கற்றல் விளைவுகள்

- கணம் மற்றும் கணத்தைக் குறிக்கும் முறைகளை விவரித்தல்.
- கணங்களின் வகைகளை அறிதல்.
- கணத்தின் செயல்பாடுகளை அறிந்து, கணச் செயல்களை நிகழ்த்துதல் மற்றும் வென்படத்தில் குறித்தல்.
- கணச் செயல்களில் பரிமாற்று, சேர்ப்பு மற்றும் பங்கீட்டுப் பண்புகளை அறிதல்.
- டி மார்கன் விதிகளைப் புரிந்துகொள்ளுதல் மற்றும் சரிபார்த்தல்.
- கணமொழியைப் பயன்படுத்தி வாழ்க்கைப் பயன்பாட்டுக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணுதல்.

1.1 அறிமுகம்

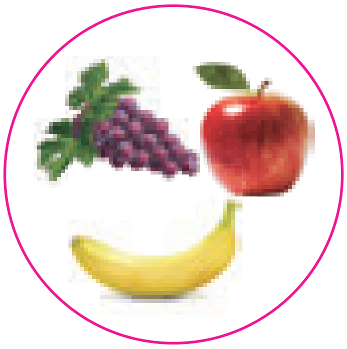
நமது அன்றாட வாழ்க்கையில், நூல்கள், நாணயங்கள், அஞ்சல் தலைகள் சேகரிப்பு என பல்வேறு வகையான தொகுப்புகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். பொருள்களின் தொகுப்புகளைக் கணித வழியில் குறிக்கும் ஒரு வழியே கணமொழி ஆகும்.

பின்வரும் படங்களைப் பார்க்கவும். அவை எதனைக் குறிப்பிடுகின்றன?

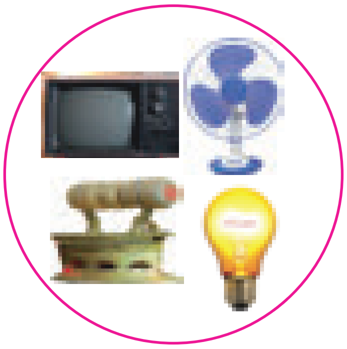
படம் 1.1 பழங்களின் தொகுப்பையும், படம் 1.2 வீட்டு உபயோகப் பொருள்களின் தொகுப்பையும் குறிக்கின்றன.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 1 26-12-2019 13:03:34

படத்தில் (1.1 மற்றும் 1.2) உள்ளவற்றின் சிறப்பியல்புகளை உற்று நோக்கினால் நம் கவனம் தனிப்பட்ட ஒரு பொருளிலிருந்து அவற்றின் தொகுப்பின் மேல் திசை மாறுவதை உணரலாம். அவ்வாறான எந்தவொரு தொகுப்பும் கணம் என அழைக்கப்படும்.



படம் 1.1



படம் 1.2

1.2 கணம் (Set)

நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருள்களின் தொகுப்பு கணம் எனப்படும்.

இங்கு நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருள்களின் தொகுப்பு என்பது கொடுக்கப்பட்ட பொருள், கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பில் உறுப்பாக உள்ளதா? இல்லையா? என்பதைப் பொருத்து அமைகிறது.கணத்தில் உள்ள பொருள்கள் அதன் உறுப்புகள் எனப்படும்.

சான்றாக,

1. மாவட்ட மைய நூலகத்தில் உள்ள நூல்களின் தொகுப்பு.
2. ஒரு வானவில்லில் உள்ள வண்ணங்களின் தொகுப்பு.
3. பகா எண்களின் தொகுப்பு.

பின்வருவனவற்றுள் எவை கணங்கள் ஆகும்?

(1) இயல் எண்களின் தொகுப்பு.

(2) ஆங்கில எழுத்துகளின் தொகுப்பு.

(3) ஒரு வகுப்பில் உள்ள நல்ல மாணவர்களின் தொகுப்பு.

(4) நம் நாட்டிலுள்ள மாநிலங்களின் தொகுப்பு.

(5) ஒரு தோட்டத்தில் உள்ள அழகிய மலர்களின் தொகுப்பு.

அருகில் உள்ள கட்டத்தில் (1), (2) மற்றும் (4) என்பன நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொகுப்பாக அமைவதால் அவை கணங்களாகும்.

ஆனால், 'நல்ல' மற்றும் 'அழகான' போன்றவற்றை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டவையாக ஏற்பது கடினமாதலால் (3) மற்றும் (5) என்பன நன்கு வரையறுக்கப்படாதவைகளாகும். ஒரு மாணவன் நல்ல மாணவன் என நான் கருதினால் நீங்களும் அவ்வாறு கருதவேண்டிய அவசியமில்லை. மல்லிகையை அழகான மலர் என நான் கருதினால் நீங்களும் அவ்வாறு எண்ணுவீர்களா! எனவே ஐயத்திற்குச் சற்றும் இடமின்றி அமையும் தொகுப்புகளையே நாம் கணங்களாகக் கருத இயலும்.

எனவே கேள்வி எண் (3) மற்றும் (5) ஆகியன கணங்கள் அன்று.

குறிப்பு

- ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் ஒரே ஒரு முறை மட்டுமே பட்டியலிடப்பட வேண்டும்.
- ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் வெவ்வேறு வகையில் வரிசைப்படுத்தப் பட்டு பட்டியலிடப்பட்டாலும் கணம் மாறாது.

எடுத்துக்காட்டாக, இந்த இரு நிபந்தனைகளும் இயல்பானவையே. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8… என்ற தொகுப்பும் 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6, 8 ... என்ற தொகுப்பும் வெவ்வேறு முறையில் வரிசைப்படுத்தப் பட்டாலும் இரு தொகுப்புகளும் ஒன்றே. கணத்தில் ஒரு பொருள் உறுப்பாக உள்ளதா? இல்லையா? என்பதனை மட்டுமே நாம் அறிய வேண்டியுள்ளதால் அந்த உறுப்பினைப் பட்டியலின் பல இடங்களில் பட்டியலிட வேண்டியதில்லை.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 2 26-12-2019 13:03:35

செயல்பாடு-1

உன் அன்றாட வாழ்வில் கணங்களாக இருக்கக்கூடிய மற்றும் கணங்கள் அல்லாத தொகுப்பினை விவாதித்துப் பல எடுத்துக்காட்டுகளைத் தருக.

குறியீடுகள்

- பொதுவாக, ஒரு கணமானது $A, B, P, Q, X, Y,$ போன்ற ஆங்கில பெரிய எழுத்துகளால் குறிப்பிடப்படுகிறது.
- ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளை, “{ }” என்ற கண அடைப்பு அல்லது வில் அடைப்பிற்குள் எழுத வேண்டும்.
- x என்பது கணம் A இன் உறுப்பு என்பதை $x \in A$ என எழுதுவோம். (x என்பது A இன் ஓர் உறுப்பு).
- x என்பது கணம் A இன் உறுப்பு அல்ல என்பதை $x \notin A$ என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{2,3,5,7\}$ என்ற கணத்தைக் கருதுக.

A இன் ஓர் உறுப்பான 2 என்பதனை $2 \in A$ என எழுதலாம்.

A இன் ஓர் உறுப்பான 5 என்பதனை $5 \in A$ என எழுதலாம்.

A இன் ஓர் உறுப்பில்லாத 6 என்பதனை $6 \notin A$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

A = {அஸ்வின், முரளிவிஜய், விஜய்சங்கர், பத்ரிநாத் }.

கோடிட்ட இடங்களை $\in$ அல்லது $\notin$ என்ற பொருத்தமான குறியிட்டு நிரப்புக.

(i) முரளிவிஜய் _____ A. (ii) அஸ்வின் _______ A. (iii) பத்ரிநாத் _______ A.

(iv) கங்குலி ______ A. (v) டெண்டுல்கர் ______ A.

தீர்வு

(i) முரளிவிஜய் $\in A$. (ii) அஸ்வின் $\in A$. (iii) பத்ரிநாத் $\in A$.

(iv) கங்குலி $\notin A$. (v) டெண்டுல்கர் $\notin A$.

1.3 கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறைகள் (Representation of a Set)

ஒற்றைப்படை எண்களின் தொகுப்பைப் பல்வேறு வகைகளில் விவரிக்கலாம்:

(1) "ஒற்றைப் படை எண்களின் கணம்" என்பது எளிமையான ஒரு தொகுப்பாகும்.

(2) இதனை, $\{1, 3, 5, \ldots\}$ என எழுதலாம்.

(3) x என்பது ஒற்றைப் படை எண் எனக் கொண்டு அனைத்து x இன் தொகுப்பைக் காண்க, எனவும் கூறலாம்.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 3 26-12-2019 13:03:35

இவை அனைத்துமே ஒன்றுக்கொன்று சமானமானவை மற்றும் பயனுள்ளவை. அதாவது "$x - 5 = 3$" என்ற சமன்பாட்டின் அனைத்துத் தீர்வுகளின் தொகுப்பும், $\{8\}$ என்பதும் ஒரே கணத்தைத்தான் குறிப்பிடுகின்றன.

ஒரு கணத்தினைப் பின்வரும் மூன்று முறைகளில் ஏதேனும் ஒருமுறையால் குறிப்பிடலாம்:

(i) விவரித்தல் முறை(அல்லது) வர்ணனை முறை (Descriptive Form)

(ii) கணக்கட்டமைப்பு முறை (அல்லது) விதி முறை (Set-Builder Form or Rule Form)

(iii) பட்டியல் முறை (அல்லது) அட்டவணை முறை (Roster Form or Tabular Form)

1.3.1 விவரித்தல் முறை (Descriptive Form)

கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளைச் சொற்களால் தெளிவாக விவரிக்கும் முறையே விவரித்தல் முறை அல்லது வர்ணனை முறை எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) ஆங்கில உயிரெழுத்துகளின் கணம்

(ii) முழு எண்களின் கணம்

1.3.2 கணக்கட்டமைப்பு முறை (அல்லது) விதி முறை (Set Builder Form or Rule Form)

ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் நிறைவு செய்யும் பண்புகளின் அடிப்படையில் கணத்தைக் குறிப்பிடும் முறையே கணக்கட்டமைப்பு முறையாகும்.

குறிப்பு

குறியீடு ':' அல்லது '|' என்பது "அதன்படி" அல்லது "என்றவாறு" என்பதைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) A = { x | x என்பது ஆங்கில உயிரெழுத்து}

(ii) B = { x | x என்பது ஒரு முழு எண்}

1.3.3 பட்டியல் முறை (அல்லது) அட்டவணை முறை (Roster Form or Tabular Form)

ஒரு கணத்தில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் பட்டியலிடுவது பட்டியல் முறை அல்லது அட்டவணை முறை என்றழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$ (ii) $B = \{0,1,2,3,\ldots\}$

எப்போதும் இந்த முறையில் குறிப்பிடுவது இயலுமா?

குறிப்பு

எடுத்துக்காட்டு (ii) இல் உள்ள மூன்று புள்ளிகள் (...) என்பது முப்புள்ளி (ellipsis) என்று அழைக்கப்படுகிறது. இந்த முப்புள்ளி என்பது ஒரு தொகுப்பில் உள்ள உறுப்புகள் அவ்வமைப்பு முறையிலேயே தொடர்கின்றன என்பதைக் குறிக்கிறது.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 4 26-12-2019 13:03:36

செயல்பாடு-2

பின்வரும் கணங்களை அதற்குரிய முறையில் எழுதுக

வ.எண்	விவரித்தல் முறை	கணக்கட்டமைப்பு முறை	பட்டியல் முறை
1	பத்தை விடச் சிறிய அனைத்து இயல் எண்களின் கணம்		
2		$\{x : x$ என்பது 3 இன் மடங்கு , $x \in \mathbb{N}\}$	
3			$\{2,4,6,8,10\}$
4	ஒரு வாரத்திலுள்ள அனைத்துக் கிழமைகளின் கணம்.		
5			$\{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.2 பின்வரும் சொற்களிலுள்ள எழுத்துக்களின் கணத்தைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக (i) ASSESSMENT (ii) PRINCIPAL

தீர்வு

(i) ASSESSMENT

$X = \{A, S, E, M, N, T\}$

(ii) PRINCIPAL

$Y = \{P, R, I, N, C, A, L\}$

பயிற்சி 1.1

1. பின்வருவனவற்றில் எவை கணங்களாகும்?
   (i) ஒன்று முதல் 100 வரையுள்ள பகா எண்களின் தொகுப்பு.
   (ii) இந்தியாவில் உள்ள செல்வந்தர்களின் தொகுப்பு.
   (iii) இந்தியாவில் உள்ள ஆறுகளின் தொகுப்பு.
   (iv) வளைகோல் பந்தாட்டத்தை நன்றாக விளையாடும் வீரர்களின் தொகுப்பு.

2. பின்வரும் ஆங்கிலச் சொற்களிலுள்ள எழுத்துகளைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.
   (i) INDIA (ii) PARALLELOGRAM
   (iii) MISSISSIPPI (iv) CZECHOSLOVAKIA

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 5 26-12-2019 13:03:36

3. $A = \{0, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 10\}$ மற்றும் $C = \{12, 14, 18, 20\}$ என்ற கணங்களைக் கொண்டு.

(அ) சரியா, தவறா எனக் கூறுக:

(i) $18 \in C$ (ii) $6 \notin A$ (iii) $14 \notin C$ (iv) $10 \in B$

(v) $5 \in B$ (vi) $0 \in B$

(ஆ) கோடிட்ட இடங்களை நிரப்புக:

(i) $3 \in$ ____ (ii) $14 \in$ _____ (iii) 18 ____ B (iv) 4 _____ B

4. பின்வரும் கணங்களைப் பட்டியல் முறையில் எழுதுக.

(i) A = 20 – க்கும் குறைவான இரட்டைப்படை இயல் எண்களின் கணம்.

(ii) $B = \{y : y = \frac{1}{2n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$

(iii) $C = \{x : x$ என்பது ஒரு முழுக் கன எண் மற்றும் $27 < x < 216\}$

(iv) $D = \{x : x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq 2\}$

5. பின்வரும் கணங்களைக் கணக் கட்டமைப்பு முறையில் எழுதுக.

(i) B = ஒரு நாள் ஆட்டங்களில் இரட்டைச் சதமடித்த இந்திய மட்டைப் பந்து வீரர்களின் தொகுப்பு.

(ii) $C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\}$

(iii) D = ஓர் ஆண்டில் உள்ள தமிழ் மாதங்களின் தொகுப்பு.

(iv) E = 9 – க்கும் குறைவான ஒற்றை முழு எண்களின் கணம்.

6. பின்வரும் கணங்களை விவரித்தல் முறையில் எழுதுக

(i) P ={ சனவரி, சூன், சூலை}

(ii) $Q = \{7,11,13,17,19,23,29\}$

(iii) $R = \{x : x \in \mathbb{N}, x < 5\}$

(iv) $S = \{x : x$ ஓர் ஆங்கில மெய்யெழுத்து$\}$

1.4 கணங்களின் வகைகள் (Types of Sets)

ஆர்வத்தைத் தூண்டும் வகையில் ஒரு கணம் உண்டு. அதுவே வெற்றுத் தொகுப்பு எனப்படும். வெற்றுத் தொகுப்பை ஏன் அறிய வேண்டும்? $x^2 + 1 = 0$ என்கிற சமன்பாட்டின் மெய் எண்களின் தீர்வு கணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். அதில் உறுப்புகளே இல்லை, அதேபோல் 90 பாகைக்கு மேலுள்ள கோணங்களைக் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்தைக் கருதுவோம். அத்தகைய செவ்வகமே இல்லையாதலால் அது வெற்றுக் கணம் என அழைக்கப்படுகிறது.

அதனால்தான் வெற்றுக்கணம் முக்கியத்துவம் பெறுவதோடு அதற்குரிய ஒரு குறியீட்டையும் தனக்கெனப் பெறுகிறது.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 6 26-12-2019 13:03:36

1.4.1 வெற்றுக்கணம் அல்லது வெறுமைக்கணம் (Empty Set or Null Set)

எந்த ஓர் உறுப்பும் இல்லாத கணம் **வெற்றுக்கணம்** அல்லது **உறுப்புகள் இன்மைக்கணம்** அல்லது **வெறுமைக் கணம்** எனப்படும்.

இது { } அல்லது $\varnothing$ என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படும்.

சிந்தனைக் களம்

{0} மற்றும் {$\varnothing$} என்பவை வெற்றுக்கணங்களா?

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) A={x : x என்பது ஓர் ஒற்றைப்படை எண் மற்றும் இரண்டால் மீதியின்றி வகுபடும் எண்}

$\therefore A=\{\ \}$ or $\varnothing$

(ii) எண்கள் 1 மற்றும் 2 –க்கும் இடையேயுள்ள முழுக்களின் கணம்.

1.4.2 ஓருறுப்புக் கணம் (Singleton Set)

ஓர் உறுப்பு மட்டுமே உடைய கணம், **ஓருறுப்புக் கணம்** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,,

(i) $A = \{x : 3 < x < 5, x \in \mathbb{N}\}$ (ii) இரட்டைப்படைப் பகா எண்களின் கணம்.

1.4.3 முடிவுறு கணம் (Finite Set)

முடிவுறு எண்ணிக்கையில் அமைந்த உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் **முடிவுறு கணம்** எனப்படும்

குறிப்பு

வெற்றுக்கணத்தில் உறுப்புகள் இல்லை. எனவே $\varnothing$ ஒரு முடிவுறு கணமாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

1. ஒரு குடும்பத்திலுள்ள உறுப்பினர்களின் கணம்.
2. உள்ளரங்கு / வெளியரங்கு மைதானத்தில் விளையாடும் விளையாட்டுகளின் கணம்.
3. பள்ளியில் கற்கும் கல்விசார் பாடங்களின் கணம்.
4. A = {x : x என்பது 36 இன் காரணி}

1.4.4 முடிவுறாக் கணம் (Infinite Set)

ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுறு எண்ணிக்கையில் இல்லை எனில் அக்கணம் , **முடிவிலாக் கணம்** அல்லது **முடிவுறாக் கணம்** எனப்படும்.

சிந்தனைக் களம்

இயல் எண்களின் கணம் முடிவுறு கணமா?

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) {5,10,15,...} (ii) ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையும் அனைத்துப் புள்ளிகளின் கணம்.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 7 26-12-2019 13:03:37

ஒரு கணத்தின் ஆதி எண்: ஒரு கணம் முடிவுறு கணம் எனில், அதில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை அறிந்து கொள்வது பயனுள்ளதாகும்.

ஒரு முடிவுறு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதன் **ஆதி எண்** எனப்படும். A என்ற கணத்தின் ஆதி எண்ணை $n(A)$ எனக் குறிப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$ எனில் $n(A)$ காண்க.

தீர்வு

$A = \{1,2,3,4,5,7,9,11\}$

கணம் A இல் 8 உறுப்புகள் இருப்பதால், $n(A) = 8$.

சிந்தனைக் களம்

$A = \{1, b, b, \{4, 2\}, \{x, y, z\}, d, \{d\}\}$, எனில் $n(A)$=____

1.4.5 சமான கணங்கள் (Equivalent Sets)

A, B என்ற இரு முடிவுறு கணங்களில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை சமம் எனில் அவை சமான கணங்கள் எனப்படும். இது $A \approx B$ எனக் குறிக்கப்படும்.

A, B என்ற கணங்கள் சமான கணங்கள் எனில்

$$n(A) = n(B)$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{$ பந்து, மட்டை$\}$ மற்றும் $B = \{$வரலாறு, புவியியல்$\}$.

இங்கு $n(A) = n(B) = 2$. A மற்றும் B சமான கணங்கள்.

சிந்தனைக் களம்

$A=\{ x : x$ என்பது இந்திய தேசியக் கொடியில் உள்ள ஒரு நிறம்$\}$ மற்றும் $B=\{$சிவப்பு, நீலம், பச்சை$\}$ எனில் இவ்விரு கணங்களும் சமான கணங்களா?

எடுத்துக்காட்டு 1.4

$P = \{ x : -3 \leq x \leq 0, x \in \mathbb{Z}\}$ மற்றும் $Q = 210$ என்ற எண்ணின் பகாக் காரணிகளின் தொகுப்பு, இவை இரண்டும் சமான கணங்களா?

தீர்வு

$P = \{-3, -2, -1, 0\}$, 210 இன் பகாக் காரணிகள் 2,3,5 மற்றும் 7 எனவே, $Q = \{2, 3, 5, 7\}$

$n(P)$ =4 மற்றும் $n(Q) = 4$. ஆகையால், கணம் P மற்றும் கணம் Q ஆகியவை சமான கணங்கள்.

1.4.6 சம கணங்கள் (Equal Sets)

இரு கணங்கள் ஒரே மாதிரியான உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால் அவை **சம கணங்கள்** எனப்படும். அவ்வாறு இல்லை எனில் சமமற்ற கணங்கள் எனப்படும்.

A, B என்ற இரு கணங்கள், சம கணங்கள் எனில்

(i) கணம் A இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும், கணம் B இன் ஓர் உறுப்பாக இருத்தல் வேண்டும்.

(ii) கணம் B இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் கணம் A இன் ஓர் உறுப்பாக இருத்தல் வேண்டும்.

சிந்தனைக் களம்

$\varnothing$, $\{0\}$, $\{\varnothing\}$என்ற கணங்கள் சம கணங்களா? சமான கணங்களா?

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 8 26-12-2019 13:03:37

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \{4, 2, 3, 1\}$

இங்கு A மற்றும் B சரியாக அதே உறுப்புகளைக் கொண்டிருப்பதால் A யும் B யும் சம கணங்கள் ஆகும்.

ஒரு கணத்தில் ஒன்றோ அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளோ மீண்டும் மீண்டும் கணத்தில் இடம் பெற்றாலும் அதனால் அக்கணத்தில் எவ்வித மாற்றமும் ஏற்படாது.

குறிப்பு

- A, B என்பன சம கணங்கள் எனில் $A = B$.
- A, B என்பன சம கணங்கள் இல்லை எனில் $A \neq B$.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A=\{a, b, c\}$ மற்றும் $B=\{a, a, b, b, b, c\}$ எனில், $B = \{ a, b, c, \}$. கணம் A இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும், கணம் B இல் ஓர் உறுப்பாக இருப்பதாலும் கணம் B இன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் கணம் A இன் ஓர் உறுப்பாக இருப்பதாலும் இவ்விரு கணங்களும் சமமானவை..

குறிப்பு

சம கணங்கள் அனைத்தும் சமான கணங்கள் ஆகும். ஆனால் சமான கணங்கள் அனைத்தும் சம கணங்கள் ஆகாது. சான்றாக, $A = \{ p,q,r,s,t\}$ மற்றும் $B= \{ 4,5,6,7,8\}$. என்ற இரண்டு கணங்களில் $n(A)=n(B)$ எனவே, இவ்விரு கணங்களும் சமான கணங்களாகும். ஆனால் சம கணங்கள் ஆகாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$A = \{x : x \in \mathbb{N} , 4 \le x \le 8\}$ மற்றும்

$B = \{ 4, 5, 6, 7, 8\}$ என்பது சம கணங்களா என ஆராய்க.

தீர்வு

$A = \{ 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{ 4, 5, 6, 7, 8\}$

A, B என்ற இரு கணங்களும் சமகணங்கள் ஆகும்.

1.4.7 அனைத்துக் கணம் (Universal Set)

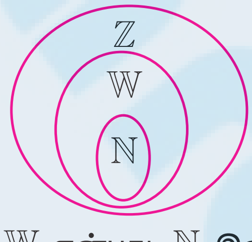
அனைத்துக் கணம் (Universal Set) என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்காக அல்லது காரணத்திற்காக எடுத்துக்கொண்ட அனைத்து உறுப்புகளையும் உள்ளடக்கிய தொகுப்புகளின் கணம் ஆகும். இது U என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) இயல் எண்களின் உறுப்புகள் அனைத்தையும் கொண்டது அனைத்துக் கணம்.
$U=\{x : x \in \mathbb{N} \}$.

(ii) A = {பூமி, செவ்வாய், வியாழன்}, எனில், சூரியக் குடும்பத்திலுள்ள கோள்கள் அனைத்தையும் கொண்ட கணம் U எனக் கருதலாம்.

சிந்தனைக் களம்



$\mathbb{W}$ என்பது $\mathbb{N}$ இன் உட்கணமா? அல்லது $\mathbb{Z}$ இன் உட்கணமா?

1.4.8 உட்கணம் (Subset)

A, B என்பன இரு கணங்கள் என்க. கணம் A இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் கணம் B இல் ஓர் உறுப்பு எனில்,

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 9 26-12-2019 13:03:37

A என்பது B இன் ஓர் உட்கணம் ஆகும். இதை $A \subseteq B$ என எழுதலாம்..

$A \subseteq B$ என்பதை "A என்பது B இன் உட்கணம்" எனப் படிக்க வேண்டும்
அதாவது, $A \subseteq B$ எனில் $a \in A$ மற்றும் $a \in B$ ஆகும்.
மேலும் A என்பது B இன் உட்கணம் அல்ல எனில் $A \nsubseteq B$ என எழுதுவோம்.
தெளிவாக, A ஆனது B இன் உட்கணம் எனில், $n(A) \leq n(B)$ என அமையும்.

ஆகவே, A இன் ஒவ்வோர் உறுப்பும் B இன் உறுப்பாக அமையும். கணம் B ஆனது குறைந்தது A பெற்றிருக்கும் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பெறும். அதாவது, $n(A) \leq n(B)$.

மற்றொரு வழியிலும் இதனை ஆராயலாம், $n(A) > n(B)$ எனக் கொண்டால், A ஆனது B ஐ விட அதிகமான உறுப்புகளைப் பெற்றிருக்கும். மேலும், A இல் உள்ள குறைந்தது ஓர் உறுப்பாவது B இல் இல்லாமல் இருக்கும். ஆகவே, A ஆனது B இன் உட்கணமல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக, (i) $\{1\} \subset \{1,2,3\}$ (ii) $\{2,4\} \nsubseteq \{1,2,3\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.6

கோடிட்ட இடங்களில் $\subseteq$ அல்லது $\nsubseteq$ எனத் தகுந்த குறியிட்டு நிரப்புக.

(i) $\{10, 20, 30\}$ _____ $\{10, 20, 30, 40\}$

(ii) $\{p, q, r\}$ ______ $\{w, x, y, z\}$

தீர்வு

(i) $\{10, 20, 30\}$ _____ $\{10, 20, 30, 40\}$

$\{10, 20, 30\}$ இல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும்

$\{10, 20, 30, 40\}$ இருப்பதால் $\{10, 20, 30\} \subseteq \{10, 20, 30, 40\}$.

(ii) $\{p, q, r\}$ ______ $\{w, x, y, z\}$

$\{p, q, r\}$ இல் உள்ள p உறுப்பானது

$\{w, x, y, z\}$ என்ற கணத்தில் உறுப்பாக இல்லையாதலால்,

$\{p, q, r\} \nsubseteq \{w, x, y, z\}$.

செயல்பாடு-3

உன் நண்பர்களுடன் உனது அன்றாட வாழ்க்கைச் சூழ்நிலையிலுள்ள உட்கணங்களை விவாதித்து எடுத்துக்காட்டுகள் தருக.

எடுத்துக்காட்டு 1.7

$A = \{a, b\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்களை எழுதுக.

தீர்வு

$A = \{a,b\}$

A இன் உட்கணங்கள் $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 10 26-12-2019 13:03:38

குறிப்பு

- $A \subseteq B$ மற்றும் $B \subseteq A$ எனில் $A=B$.
சம கணங்களை இவ்வாறு வரையறுக்க வேண்டும்.
- வெற்றுக்கணம் என்பது ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் உட்கணமாக அமையும். A என்பது ஒரு கணம் என்க. வெற்றுக் கணம் Aஇன் ஓர் உட்கணமாக இல்லை எனக் கொள்ள ஒரே வழி x எனும் ஓர் உறுப்பு வெற்றுக் கணத்தில் இருக்க வேண்டும், அதே வேளையில் Aஇல் உறுப்பாக இருக்கக்கூடாது. ஆனால், x எவ்வாறு வெற்றுக் கணத்தில் இருக்க இயலும்? அதற்கு வாய்ப்பில்லை. இதற்கான ஒரே சாத்தியக்கூறு வெற்றுக்கணமானது Aஇன் உட்கணமாக இருக்கவேண்டும். (குழப்பத்தில் ஆழ்ந்தீர்கள் எனில் பொறுமையாக உங்கள் நண்பர்களுக்கு எடுத்துக் கூறவும். இது சரியென ஏற்றுக்கொள்வீர்கள்!)
- ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் அந்தக் கணம் ஓர் உட்கணம் ஆகும். (ஏன் என்று முயன்றுபார், விவாதி.)

1.4.9. தகு உட்கணம் (Proper Subset)

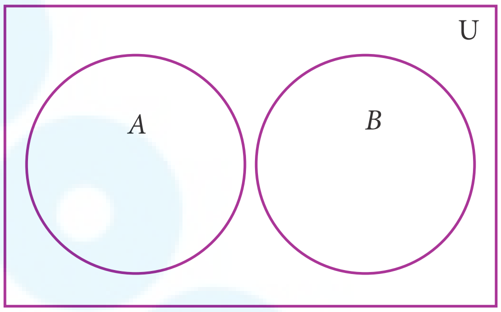
A மற்றும் B இரு கணங்களாகும். A என்பது B இன் உட்கணம் மற்றும் $A \neq B$ எனில் A என்பது B இன் தகு உட்கணம் எனப்படும். இதை $A \subset B$ என எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக

$A=\{1,2,5\}$ மற்றும் $B=\{1,2,3,4,5\}$ எனில், A என்பது B இன் தகு உட்கணம் ஆகும். அதாவது $A \subset B$.

1.4.10 வெட்டாக் கணங்கள் (Disjoint Sets)

A மற்றும் B என்ற இரு கணங்களுக்குப் பொதுவான உறுப்புகள் இல்லை எனில் அவை வெட்டாக்கணங்கள் ஆகும். அதாவது, $A \cap B = \varnothing$ எனில், A, B வெட்டாக் கணங்கள் ஆகும்



படம் 1.3

எடுத்துக்காட்டு 1.8 $A=\{20, 22, 23, 24\}$ $B=\{25, 30, 40, 45\}$ என்பவை வெட்டாக்கணங்களா என ஆராய்க.

தீர்வு

$A = \{20,22, 23, 24\}$, $B=\{25, 30, 40, 45\}$

$A \cap B = \{20,22, 23, 24\} \cap \{25, 30, 40, 45\}$

$= \{ \}$

$A \cap B = \varnothing$, A மற்றும் B ஆகியவை வெட்டாக் கணங்கள் ஆகும்.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 11 26-12-2019 13:03:38

குறிப்பு

$A\cap B\neq\varnothing$ எனில், A மற்றும் B ஆகியவை வெட்டும் கணங்கள் (Overlapping) எனப்படும். அதாவது, இரு கணங்களுக்கு இடையே குறைந்தபட்சம் ஒரு பொது உறுப்பாவது இருந்தால் அவை வெட்டும் கணங்கள் ஆகும்.

1.4.11 அடுக்குக் கணம் (Power Set)

A என்ற கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட கணம், அக்கணத்தின் அடுக்குக் கணம் எனப்படும். இதனை $P(A)$ எனக் குறிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $A=\{2, 3\}$ எனில் Aஇன் அடுக்குக் கணத்தைக் காண்க.

A இன் உட்கணங்கள் $\varnothing$, $\{2\},\{3\},\{2,3\}$.

$\therefore$ A இன் அடுக்குக்கணம்,

$P(A) = \{\varnothing ,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$

(ii) $A = \{\varnothing , \{\varnothing\}\}$, எனில் A–ன் அடுக்குக் கணம் $\{ \varnothing , \{\varnothing , \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\} , \{\{\varnothing\}\} \}$ ஆகும்.

முக்கியப் பண்பு:

$n(A)\leq n[P(A)]$ என்பதை முன்னரே அறிந்தோம். ஆனால், $P(A)$ என்பது எவ்வளவு பெரியது? எனவே, கீழ்க்காணும் முடிவுகளுக்கு வர இயலுமா என ஆராய்வோம்?

(i) $n(A) = m$ எனில், $n[P(A)] = 2^m$

(ii) கணம் A இன் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $n[P(A)]-1 = 2^m-1$.

சிந்தனைக் களம்

எந்தவொரு கணத்திற்கும் ஒரே ஒரு தகா உட்கணம் மட்டுமே இருக்கும். இக்கூற்றினை ஏதேனும் ஒரு கணத்தை கொண்டு சரிபார்.

எடுத்துக்காட்டு 1.9 $X=\{a, b, c, x, y, z\}$ என்ற கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையையும், தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையையும் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை $X=\{a, b, c, x, y, z\}$. எனில், $n(X) =6$

X இன் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= n[P(X)] = 2^6 = 64$

X இன் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை $= n[P(X)]-1 = 2^6-1$

$= 64 - 1 = 63$

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 12 26-12-2019 13:03:38

பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் கணங்களின் ஆதி எண்ணைக் காண்க.

   (i) $M = \{p, q, r, s, t, u\}$

   (ii) $P = \{x : x = 3n+2, n\in \mathbb{W}$ மற்றும் $x< 15\}$

   (iii) $Q = \{y : y = \frac{4}{3n}, n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $2 < n \leq 5\}$

   (iv) $R = \{x : x$ ஆனது முழுக்கள், $x\in \mathbb{Z}$ மற்றும் $-5 \leq x <5\}$

   (v) S = 1882 முதல் 1906 வரை உள்ள அனைத்து நெட்டாண்டுகளின்(*Leap year*) கணம்.

2. பின்வரும் கணங்களில் எவை முடிவுறு கணம், எவை முடிவுறாக் கணம் எனக் கூறுக.

   (i) X = தமிழகத்தில் உள்ள மாவட்டங்களின் கணம்.

   (ii) Y = ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் கணம்.

   (iii) $A = \{ x : x \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $x <5\}$

   (iv) $B = \{x : x^2-5x+6 = 0, x \in \mathbb{N}\}$

3. பின்வருவனவற்றில் எவை சமான கணங்கள் அல்லது சமமற்ற கணங்கள் அல்லது சம கணங்கள் எனக் கூறுக.

   (i) A = ஆங்கில உயிரெழுத்துகளின் கணம்.

   B = VOWEL என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்

   (ii) $C = \{2,3,4,5\}$, $D = \{ x : x \in \mathbb{W}, 1< x<5\}$

   (iii) $X = \{ x : x$ என்பது LIFE என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்$\}$

   $Y = \{F, I, L, E\}$

   (iv) $G = \{x : x$ ஒரு பகா எண் $3 < x < 23\}$, $H = \{x : x$ என்பது 18 இன் வகு எண்கள்$\}$

4. பின்வருவனவற்றில் எவை வெற்றுக்கணம், எவை ஓருறுப்புக்கணம் எனக் காண்க.

   (i) $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 < x < 2\}$

   (ii) B = 2 ஆல் வகுபடாத அனைத்து இரட்டைப்படை இயல் எண்களின் கணம்

   (iii) $C = \{0\}$.

   (iv) D = நான்கு பக்கங்களை உடைய முக்கோணங்களின் கணம்.

5. கொடுக்கப்பட்ட கணச் சோடிகள் வெட்டும் கணங்களா? இல்லை வெட்டாக் கணங்களா?

   (i) $A = \{f, i, a, s\}$ மற்றும் $B=\{a, n, f, h, s\}$

   (ii) $C = \{x : x$ ஒரு பகா எண், $x >2\}$ மற்றும் $D = \{x : x$ ஓர் இரட்டைப்படை பகா எண்$\}$

   (iii) $E = \{x : x$ என்பது 24 இன் காரணி$\}$ மற்றும் $F = \{x : x$ ஆனது 3இன் மடங்கு, $x < 30\}$

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 13 26-12-2019 13:03:39

6. S = {சதுரம், செவ்வகம், வட்டம், சாய்சதுரம், முக்கோணம்} எனில் பின்வரும், Sஇன் உட்கணங்களின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிடுக.

(i) நான்கு சம பக்கங்களை உடைய வடிவங்களின் கணம்.

(ii) ஆரங்களை உடைய வடிவங்களின் கணம்.

(iii) உட்கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆக உடைய வடிவங்களின் கணம்.

(iv) 5 பக்கங்களை உடைய வடிவங்களின் கணம்.

7. $A = \{a, \{a, b\}\}$ எனில், A−ன் எல்லா உட்கணங்களையும் எழுதுக.

8. பின்வருவனவற்றின் அடுக்குக் கணத்தைக் காண்க.

(i) $A = \{a, b\}$ (ii) $B = \{1, 2, 3\}$ (iii) $D = \{p, q, r, s\}$ (iv) $E = \varnothing$

9. பின்வரும் கணங்களின் உட்கணங்கள் மற்றும் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i) W = {சிவப்பு, நீலம், மஞ்சள்} (ii) $X = \{x^2 : x \in \mathbb{N}, x^2 \le 100\}$.

10. (i) $n(A) = 4$ எனில் $n[P(A)]$ ஐக் காண்க.

(ii) $n(A)=0$ எனில் $n[P(A)]$ ஐக் காண்க.

(iii) $n[P(A)] = 256$ எனில் $n(A)$ ஐக் காண்க.

1.5 கணச் செயல்பாடுகள் (Set Operations)

எண்களில் துவங்கி, வெகு விரைவாகவே எண்கணிதச் செயல்பாடுகளையும் கற்றுத் தேர்ந்தோம். இயற்கணிதத்தில் கோவைகளைக் கற்றவுடன் அவற்றைக் கூட்டவும், பெருக்கவும், (x^2+2), $(x-3)$ என எழுதவும், கற்றுத் தேர்ந்தோம். தற்போது கணங்களைப் பற்றி அறிந்தவுடன், இயல்பாகவே நம் மனதில் சில கேள்விகள் எழும். கணங்களை வைத்து என்ன செய்யலாம்? அவற்றை எச்செயல்பாடுகளில் பயன்படுத்தலாம்? எனப் பலவாறு சிந்தனைகள் எழலாம்.

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கணங்களைக் குறிப்பிட்ட வரையறை அடிப்படையில் ஒரே கணமாக்குக. பின்னர் கணச் செயல்பாடுகளை மேற்கொள்க. வென்படத்தைப் பயன்படுத்தி கணங்களுக்கும் அவற்றின் மீது மேற்கொள்ளப்படும் செயல்பாடுகளுக்கும் உள்ள தொடர்பை காட்சிப்படுத்தலாம்.

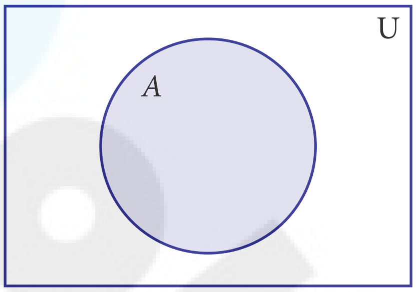
ஜான் வென் ஓர் ஆங்கிலேயக் கணிதவியலாளர் ஆவார். இவர் கணங்களுக்கு இடையேயான உறவுகளைப் படங்களின் மூலம் விளக்கும் வென்படங்களை உருவாக்கினார். வென்படங்களானது கணக் கோட்பாடு, நிகழ்தகவு, புள்ளியியல், தர்க்கம் மற்றும் கணிப்பொறி அறிவியல் போன்ற துறைகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

1.5.1 நிரப்புக் கணம் (Complement of a Set)

A என்ற கணத்தின் நிரப்புக் கணம் என்பது, கணம் A இன் உறுப்புகளைத் தவிர்த்து, அனைத்துக் கணத்தின் பிற எல்லா உறுப்புகளையும் கொண்ட கணம் ஆகும்.

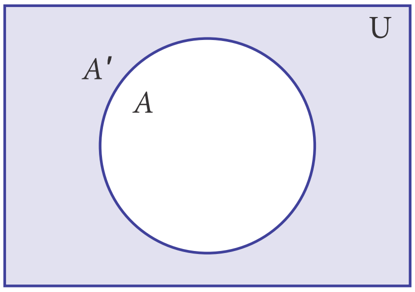
நிரப்புக் கணத்தை A' அல்லது A^c எனக் குறிக்கலாம். $A' = \{x : x \in U, x \notin A\}$

நிரப்புக் கணத்தின் வென்படம்



A (நிழலிட்ட பகுதி)

படம் 1.4



A' (நிழலிட்ட பகுதி)

படம் 1.5

எடுத்துக்காட்டாக,

U = {வகுப்பில் உள்ள அனைத்து மாணவர்கள்} மற்றும் A= {வகுப்பில் உள்ள மட்டைப் பந்து விளையாடும் மாணவர்கள்} எனில் A'= {வகுப்பில் உள்ள மட்டைப் பந்து விளையாடாத மாணவர்கள்}.

எடுத்துக்காட்டு 1.10 $U = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$ மற்றும் $A = \{c, d, g, j\}$ எனில், A' காண்க.

தீர்வு

$U = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}, A = \{c, d, g, j\}$

$A' = \{e, f, h, i\}$

குறிப்பு

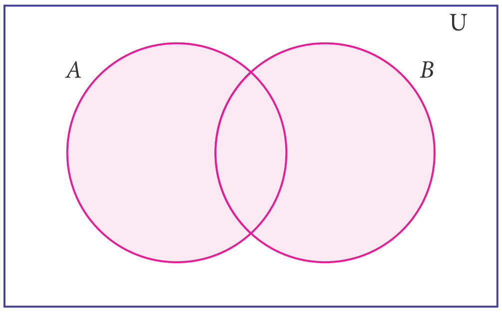
- $(A')' = A$
- $U' = \varnothing$
- $\varnothing' = U$

1.5.2 கணங்களின் சேர்ப்பு (Union of Two Sets)

இரு கணங்கள் A மற்றும் B இன் சேர்ப்புக் கணம் என்பது, கணம் A அல்லது கணம் B அல்லது இரண்டிலும் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் ஆகும். இது $A \cup B$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இதை A சேர்ப்பு B எனப் படிக்க வேண்டும்.

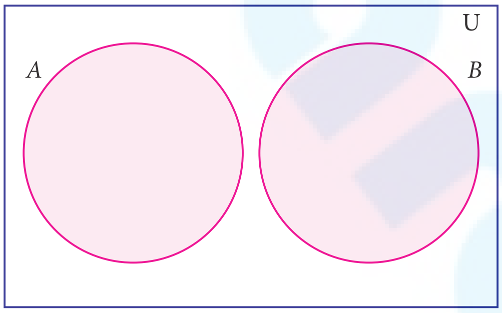
$A \cup B = \{x : x \in A$ அல்லது $x \in B\}$

இரு கணங்களின் சேர்ப்பு – வென்படத்தில் குறித்தல்



கணங்கள் A –க்கும் B –க்கும் பொது உறுப்புகள் உண்டு

படம் 1.6



கணங்கள் A உம் B உம் வெட்டாக் கணங்கள்

படம் 1.7

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 15 26-12-2019 13:03:39

எடுத்துக்காட்டாக,

P = {ஆசியா, ஆப்பிரிக்கா, அண்டார்டிகா, ஆஸ்திரேலியா} மற்றும்

Q = {ஐரோப்பா, வடஅமெரிக்கா, தென் அமெரிக்கா} எனில் கணங்கள் P மற்றும் Q ஆகியவற்றின் சேர்ப்பு $P\cup Q$ = {ஆசியா, ஆப்பிரிக்கா, அண்டார்டிகா, ஆஸ்திரேலியா, ஐரோப்பா, வடஅமெரிக்கா, தென் அமெரிக்கா} ஆகும்.

குறிப்பு

- $A\cup A = A$
- $A\cup\varnothing = A$
- $A\cup U = U$ இங்கு A என்பது அனைத்துக் கணம் Uஇன் உட்கணம்
- $A\subseteq A\cup B$ மற்றும் $B\subseteq A\cup B$
- $A\cup B = B\cup A$ (இரு கணங்களின் சேர்ப்பு பரிமாற்றத்தக்கது)

எடுத்துக்காட்டு 1.11

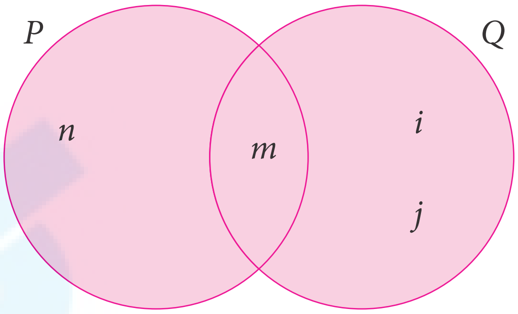
$P=\{m, n\}$ மற்றும் $Q=\{m, i, j\}$ எனில், P மற்றும் Q என்ற கணங்களை வென் படத்தில் குறித்து, அதன் மூலம் $P\cup Q$ காண்க.

தீர்வு

$P=\{m, n\}$ மற்றும் $Q=\{m, i, j\}$

வென்படத்தில் இருந்து,

$P\cup Q=\{n, m, i, j\}$.



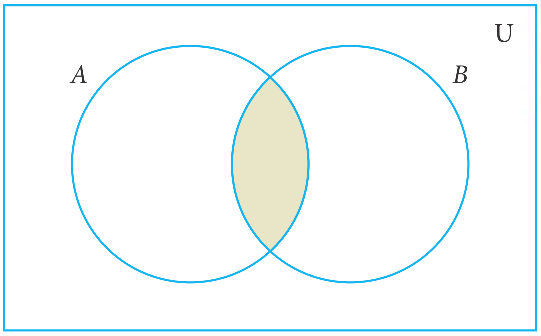
படம் 1.8

1.5.3 கணங்களில் வெட்டு (Intersection of Two Sets)

இரு கணங்கள் A மற்றும் B இன் வெட்டு என்பது அவ்விரு கணங்களின் பொது உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இதை $A\cap B$ எனக் குறிக்கிறோம். இதை A வெட்டு B எனப் படிக்கிறோம்.

$$A\cap B=\{x : x\in A \text{ மற்றும் } x\in B\}$$

இரு கணங்களின் வெட்டு – வென்படத்தில் குறித்தல்



படம் 1.9

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 16 26-12-2019 13:03:39

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \{1, 2, 6\}$; $B = \{2, 3, 4\}$ எனில், $A \cap B = \{2\}$. ஏனெனில், 2 ஆனது கணம் A மற்றும் B இன் பொது உறுப்பு.

குறிப்பு

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap U = A$ இங்கு A என்பது அனைத்துக்கணம் U–ன் உட்கணம்
- $A \cap B \subseteq A$ மற்றும் $A \cap B \subseteq B$
- $A \cap B = B \cap A$ (இரு கணங்களின் வெட்டுக்கணம் பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டது)

எனவே, உண்மையில் $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

இப்போது $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ எனச் சொல்வது எளிது. ஆகையால், $n(A)$ மற்றும் $n(B)$ கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் வெட்டு மற்றும் சேர்ப்பு ஆகிய இரண்டிலொன்று தெரிந்தால் மற்றொன்றைத் தீர்மானிப்பது எளிது.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

$A = \{x : x$ ஓர் இரட்டை இயல் எண் மற்றும் $1 < x \leq 12\}$,
$B = \{x : x$ ஆனது 3 இன் மடங்கு, $x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x \leq 12\}$ $A \cap B$ காண்க.

தீர்வு

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ மற்றும் $B = \{3, 6, 9, 12\}$

$A \cap B = \{6, 12\}$

எடுத்துக்காட்டு 1.13

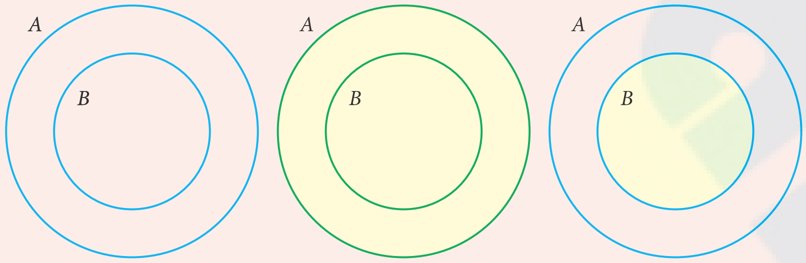
$A = \{2, 3\}$ மற்றும் $C = \{\ \}$ எனில், $A \cap C$ காண்க.

தீர்வு

இங்கு A மற்றும் C என்ற இரு கணங்களுக்கும் இடையே பொது உறுப்புகள் இல்லாததால் $A \cap C = \{\ \}$

குறிப்பு

- $B \subset A$, எனில் A, B இன் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டு இவற்றை வென்படத்தில் காட்டுக.



$B \subset A$ — படம் 1.10

நிழலிடப்பட்ட பகுதி $A \cup B = A$ — படம் 1.11

நிழலிடப்பட்ட பகுதி $A \cap B = B$ — படம் 1.12

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 17 26-12-2019 13:03:39

- A, B என்ற இரு கணங்களுக்கு $A \cup B = A \cap B$ எனில் $A = B$
- $n(A) = p$ மற்றும் $n(B) = q$ என்க.

  (அ) குறைந்தபட்சம் $n(A \cup B)$ = அதிகபட்சம் $\{p, q\}$

  (ஆ) அதிகபட்சம் $n(A \cup B) = p + q$

  (இ) குறைந்தபட்சம் $n(A \cap B) = 0$

  (ஈ) அதிகபட்சம் $n(A \cap B)$ = குறைந்தபட்சம் $\{p, q\}$

1.5.4 கணங்களின் வித்தியாசம் (Difference of Two Sets)

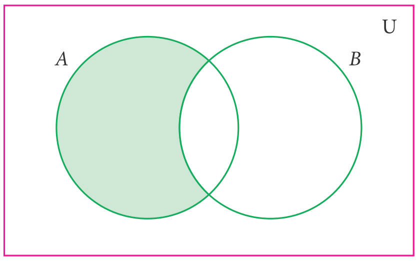
A, B என்பன இரு கணங்கள் என்க. கணம் A மற்றும் கணம் B இன் வித்தியாசம் என்பது கணம் A இல் உள்ள, ஆனால் கணம் B இல் இல்லா உறுப்புகளைக் கொண்ட கணமாகும். இதை $A - B$ அல்லது $A \setminus B$ என எழுதலாம். $A - B$ என்பதை A வித்தியாசம் B எனப் படிக்க வேண்டும்.

CHKKCB

$A-B = \{ x : x \in A$ மற்றும் $x \notin B\}$

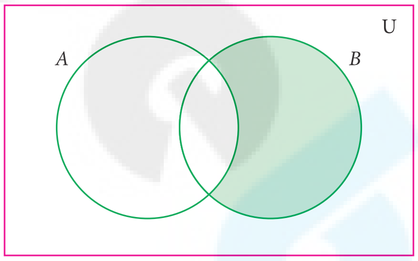
$B-A = \{ y : y \in B$ மற்றும் $y \notin A\}$.

கண வித்தியாசங்களுக்கான வென்படங்கள்



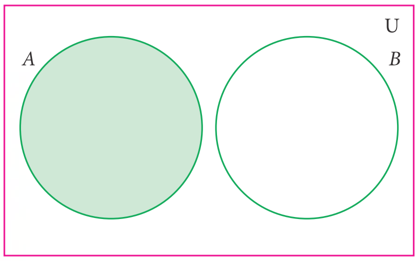
$A-B$

படம் 1.13



$B-A$

படம் 1.14



$A-B$

படம் 1.15

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$A=\{-3, -2, 1, 4\}$ மற்றும் $B= \{0, 1, 2, 4\}$ எனில்,

(i) $A-B$ (ii) $B-A$ ஐக் காண்க.

தீர்வு $A-B = \{-3, -2, 1, 4\} - \{0, 1, 2, 4\} = \{ -3, -2\}$

$B-A = \{0, 1, 2, 4\} - \{-3, -2, 1, 4\} = \{ 0, 2\}$

குறிப்பு

- $A' = U - A$
- $A-B = A \cap B'$
- $A-A = \varnothing$
- $A-\varnothing = A$
- $A-B = B-A \Leftrightarrow A=B$
- $A \cap B = \varnothing$ எனில்

  $A-B = A$ மற்றும் $B- A=B$

1.5.5 கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் (Symmetric Difference of Sets)

A மற்றும் B என்ற கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் என்பது $(A-B)$ மற்றும் $(B-A)$ இவற்றின் சேர்ப்பாகும். இது $A \Delta B$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

$$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$$

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 18 26-12-2019 13:03:40

$A \Delta B = \{ x : x \in A - B$ அல்லது $x \in B - A \}$

எடுத்துக்காட்டு 1.15

$A = \{6, 7, 8, 9\}$ மற்றும் $B=\{8, 10, 12\}$ எனில், $A \Delta B$ காண்க.

தீர்வு

$A-B = \{6, 7, 9\}$

$B-A = \{10, 12\}$

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = \{6, 7, 9\} \cup \{10,12\}$

$A \Delta B = \{6, 7, 9, 10, 12\}.$

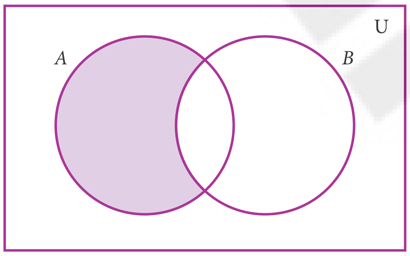
> **சிந்தனைக் களம்**
>
> $(A-B) \cap (B-A)$ என்பது என்ன?

எடுத்துக்காட்டு 1.16

$A \Delta B$ ஐ வென்படம் மூலம் வரைக.

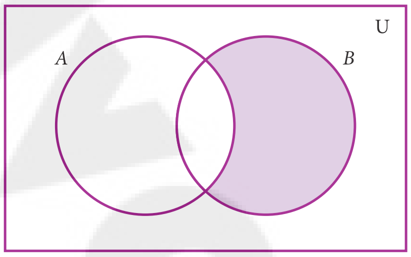
தீர்வு

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$



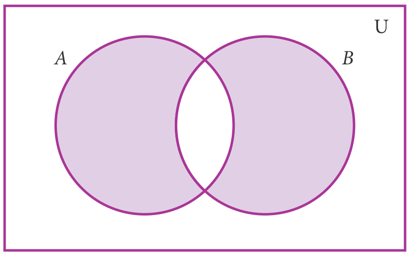
$A-B$

படம் 1.16



$B-A$

படம் 1.17



$(A-B) \cup (B-A)$

படம் 1.18

குறிப்பு

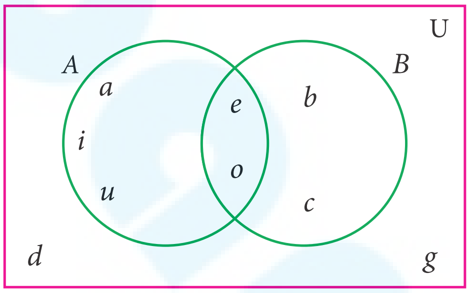
- $A \Delta A = \varnothing$
- $A \Delta B = B \Delta A$
- $A \Delta B = \{x : x \in A \cup B$ மற்றும் $x \notin A \cap B\}$
- $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

எடுத்துக்காட்டு 1.17

அருகில் உள்ள படத்தில் இருந்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க

(i) A (ii) B (iii) $A-B$ (iv) $B-A$

(v) A' (vi) B' (vii) U



படம் 1.19

தீர்வு

(i) $A = \{a, e, i, o, u\}$ (ii) $B = \{b, c, e, o\}$

(iii) $A-B = \{a, i, u\}$ (iv) $B-A = \{b, c\}$

(v) $A' = \{b, c, d, g\}$ (vi) $B' = \{a, d, g, i, u\}$

(vii) $U = \{a, b, c, d, e, g, i, o, u\}$

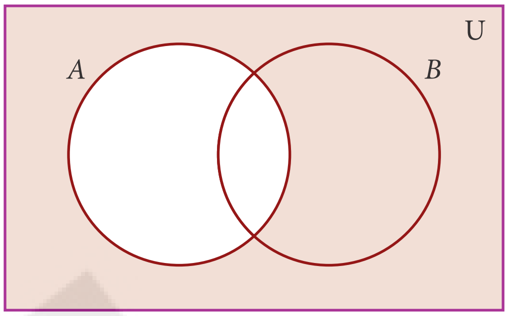
1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 19 26-12-2019 13:03:40

எடுத்துக்காட்டு 1.18

வென்படம் வரைந்து, பின்வரும் கணச் செயல்களை வென்படத்தில் குறிக்கவும். (i) A' (ii) $(A-B)'$ (iii) $(A\cup B)'$

தீர்வு

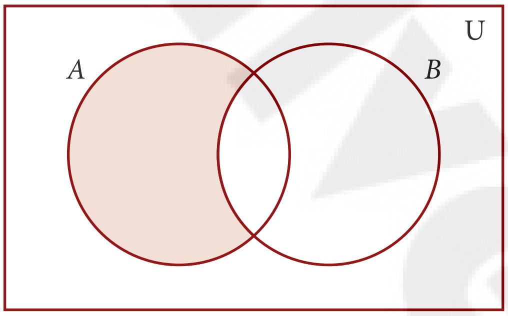
(i) A'



A'

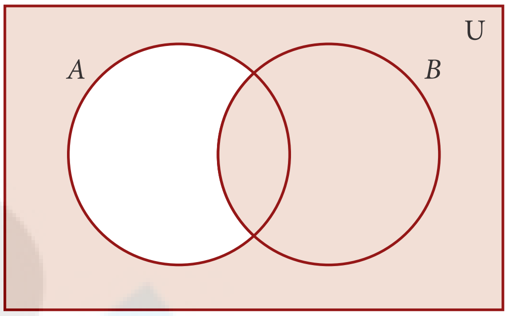
படம் 1.20

(ii) $(A-B)'$



$A-B$

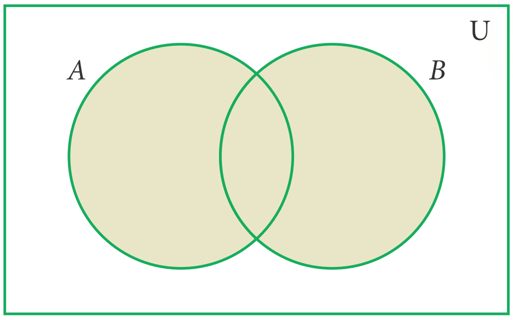
படம் 1.21



$(A-B)'$

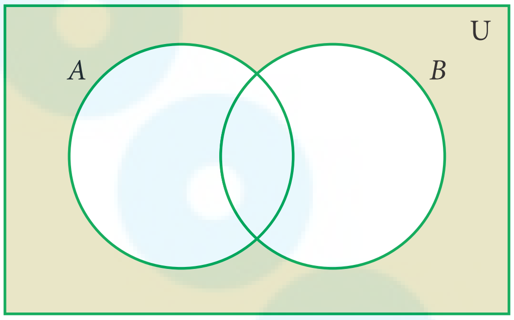
படம் 1.22

(iii) $(AUB)'$



$A\cup B$

படம் 1.23



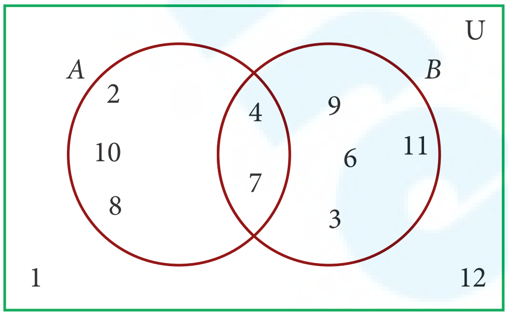
$(A\cup B)'$

படம் 1.24

பயிற்சி 1.3

1. கொடுக்கப்பட்ட வென்படத்தில் இருந்து கீழேயுள்ள கணங்களின் உறுப்புகளை எழுதுக.

(i) A (ii) B (iii) $A\cup B$ (iv) $A\cap B$
(v) $A-B$ (vi) $B-A$ (vii) A' (viii) B'
(ix) U



படம் 1.25

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 20 26-12-2019 13:03:40

2. பின்வரும் கணங்களுக்கு $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$ மற்றும் $B-A$ காண்க.

(i) $A = \{2, 6, 10, 14\}$ மற்றும் $B=\{2, 5, 14, 16\}$

(ii) $A = \{a, b, c, e, u\}$ மற்றும் $B=\{a, e, i, o, u\}$

(iii) $A = \{x : x \in N, x \leq 10\}$ மற்றும் $B=\{x : x \in W, x < 6\}$

(iv) A = "mathematics" என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்

B = "geometry" என்ற சொல்லில் உள்ள எழுத்துகளின் கணம்

3. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{b, d, f, h\}$ மற்றும் $B = \{a, d, e, h\}$ எனில் பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.

(i) A' (ii) B' (iii) $A'\cup B'$ (iv) $A'\cap B'$ (v) $(A\cup B)'$

(vi) $(A\cap B)'$ (vii) $(A')'$ (viii) $(B')'$

4. $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A=\{1, 3, 5, 7\}$ மற்றும் $B=\{0, 2, 3, 5, 7\}$ எனில் பின்வரும் கணங்களைக் காண்க.

(i) A' (ii) B' (iii) $A'\cup B'$ (iv) $A'\cap B'$ (v) $(A\cup B)'$

(vi) $(A\cap B)'$ (vii) $(A')'$ (viii) $(B')'$

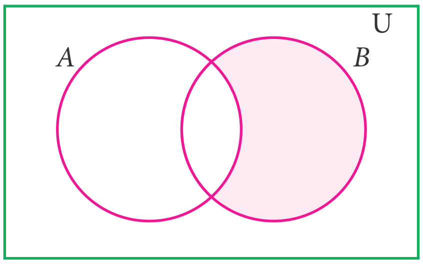
5. கொடுக்கப்பட்ட கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் காண்க.

(i) $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ மற்றும் $Q=\{1, 3, 5, 11\}$

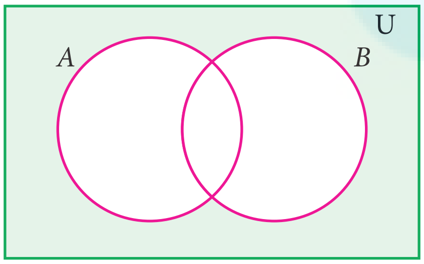
(ii) $R = \{l, m, n, o, p\}$ மற்றும் $S = \{j, l, n, q\}$

(iii) $X = \{5, 6, 7\}$ மற்றும் $Y=\{5, 7, 9, 10\}$

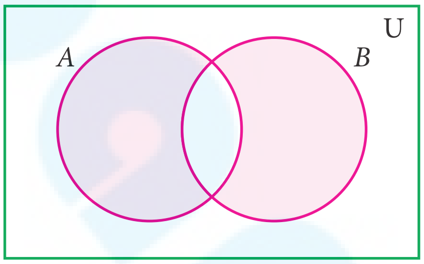
6. கணக் குறியீடுகளைக் கொண்டு பின்வரும் நிழலிட்ட பகுதியினைக் குறிப்பிடவும்.



படம் 1.26



படம் 1.27



படம் 1.28

7. A, B என்பன வெட்டும் கணங்கள் மற்றும் U என்பது அனைத்துக் கணம் எனில், பின்வருவனவற்றை வென்படத்தில் குறிக்கவும்,

(i) $A\cup B$ (ii) $A\cap B$ (iii) $(A\cap B)'$ (iv) $(B-A)'$ (v) $A'\cup B'$ (vi) $A'\cap B'$

(vii) வென்படம் (iii) மற்றும் (v) ஐ உற்று நோக்கி உன்னுடைய கருத்தை எழுதுக.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 21 26-12-2019 13:03:40

1.6 கணச் செயல்களின் பண்புகள் (Properties of Set Operations)

இப்பகுதி, கணச் செயல்களைத் (சேர்ப்பு, வெட்டு போன்ற) தொடர்ந்து பரிமாற்றுப் பண்பு, சேர்ப்புப் பண்பு போன்ற கணிதப் பண்புகளை ஆர்வமுடன் ஆராய்கிறது. இந்தப் பண்புகளில் பலவற்றை நாம் எண்களில் பார்த்திருக்கிறோம். கணங்களும் இப்பண்புகளைப் பெற்றிருக்குமா என்பதை வெளிக்கொணர்வோம். முதலில் நாம் கணங்களின் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டு போன்ற கணச் செயல்களின் பண்புகளைக் கற்போம்.

1.6.1 பரிமாற்றுப் பண்பு (Commutative Property)

கணமொழியில் கணச் செயல்களைப் பயன்படுத்தும்போதே பரிமாற்றுப் பண்புகளை நாம் பார்க்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, கணங்களில் சேர்ப்பு (மற்றும் வெட்டு) செயல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையதா என்பதைக் காணலாம்.

$A=\{2,3,8,10\}$ மற்றும் $B=\{1,3,10,13\}$ என்பன இரு கணங்கள் என்க

இங்கு, $A\cup B=\{1,2,3,8,10,13\}$ மற்றும்

$B\cup A=\{1,2,3,8,10,13\}$

இதிலிருந்து, $A\cup B=B\cup A$ என்பதை நம்மால் காண இயலுகிறது.

இதுவே கணங்களின் சேர்ப்புக்கான பரிமாற்றுப் பண்பு என அழைக்கப்படுகிறது.

இப்பொழுது, $A\cap B=\{3,10\}$ மற்றும் $B\cap A=\{3,10\}$.

இதிலிருந்து, $A\cap B=B\cap A$ என்பதைப் பார்க்க முடிகிறது.

இதுவே, கணங்களின் வெட்டுக்கான பரிமாற்றுப் பண்பு என அழைக்கப்படுகிறது.

> **குறிப்பு**
>
> எந்தவொரு கணம் A–க்கும்
> - $A\cup A=A$ & $A\cap A=A$ [தன்னடுக்கு விதிகள்].
> - $A\cup\phi=A$ & $A\cap U=A$ [சமனி விதிகள்].

> **பரிமாற்றுப் பண்பு:** A மற்றும் B என்பன எவையேனும் இருகணங்கள் எனில்,
>
> (i) $A\cup B=B\cup A$ (ii) $A\cap B=B\cap A$

எடுத்துக்காட்டு 1.19

$A=\{b,e,f,g\}$ மற்றும் $B=\{c,e,g,h\}$ எனில், (i) கணங்களின் சேர்ப்பு (ii) கணங்களின் வெட்டுக்கான பரிமாற்றுப் பண்புகளைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை,

$A=\{b,e,f,g\}$ மற்றும் $B=\{c,e,g,h\}$

(i) $A\cup B=\{b,c,e,f,g,h\}$ ... (1)

$B\cup A=\{b,c,e,f,g,h\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A\cup B=B\cup A$.

கணங்களின் சேர்ப்பு, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

> **சிந்தனைக் களம்**
>
> $P=\{l,n,p\}$ மற்றும் $P\cup Q=\{j,l,m,n,o,p\}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. P மற்றும் Q என்பன வெட்டாக் கணங்கள் எனில், Q மற்றும் $P\cap Q$ என்னவாக இருக்க முடியும்?

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 22 26-12-2019 13:03:42

(ii) $A \cap B = \{e, g\}$ ... (3)

$B \cap A = \{e, g\}$ ... (4)

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து, $A \cap B = B \cap A$

கணங்களின் வெட்டு, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

குறிப்பு

எண்களில் கழித்தல் செயலானது பரிமாற்றுப் பண்பு உடையதல்ல என்பதை நினைவு கூர்வோம். கண வித்தியாசம் பரிமாற்றுப்பண்பு உடையதா? எண்களைப் போலவே, கண வித்தியாசமும் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது அல்ல எனக் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d\}$ எனில், $A - B = \{a\}$, $B - A = \{d\}$; இவற்றிலிருந்து $A - B \neq B - A$ என்பதை நம்மால் காண முடிகிறது.

1.6.2 சேர்ப்புப் பண்பு (Associative Property)

இப்பொழுது நாம் சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டுச் செயல்களை மூன்று கணங்களைக் கொண்டு செய்து பார்ப்போம்.

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, 0, 2, 3\}$ மற்றும் $C = \{0, 1, 3, 4\}$ என்பன மூன்று கணங்கள் என்க.

இப்பொழுது, $B \cup C = \{-3, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$A \cup (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2\} \cup \{-3, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ... (1)

பிறகு, $A \cup B = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$(A \cup B) \cup C = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\} \cup \{0, 1, 3, 4\}$

$= \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

இது கணங்களின் சேர்ப்புக்கான சேர்ப்புப் பண்பு ஆகும்.

இப்பொழுது, $B \cap C = \{0, 3\}$

$A \cap (B \cap C) = \{-1, 0, 1, 2\} \cap \{0, 3\}$

$= \{0\}$ ... (3)

பிறகு, $A \cap B = \{0, 2\}$

$(A \cap B) \cap C = \{0, 2\} \cap \{0, 1, 3, 4\}$

$= \{0\}$ ... (4)

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

இது கணங்களின் வெட்டுக்கான சேர்ப்புப் பண்பு ஆகும்.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 23 26-12-2019 13:03:44

சேர்ப்புப் பண்பு: $A,\ B$ மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்,

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

எடுத்துக்காட்டு 1.20 $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2\right\}$, $B = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2, \frac{5}{2}\right\}$ மற்றும் $C = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, 2, \frac{5}{2}\right\}$ எனில், $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

இப்பொழுது, $(B \cap C) = \left\{\frac{1}{4}, 2, \frac{5}{2}\right\}$

$A \cap (B \cap C) = \left\{\frac{1}{4}, 2\right\}$ ... (1)

மேலும், $A \cap B = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 2\right\}$

$(A \cap B) \cap C = \left\{\frac{1}{4}, 2\right\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2), இலிருந்து,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

குறிப்பு

பொதுவாக, கண வித்தியாசமானது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யாது. அதாவது, $(A - B) - C \neq A - (B - C)$ ஆனால், $A,\ B$ மற்றும் C என்பன ஒன்றுக்கொன்று வெட்டாக் கணங்கள் எனில், கணவித்தியாசமானது சேர்ப்புப் பண்பை நிறைவு செய்யும். அதாவது, $(A - B) - C = A - (B - C)$ என்பது மெய்யாகும்.

பயிற்சி 1.4

1. $P = \{1, 2, 5, 7, 9\}$, $Q = \{2, 3, 5, 9, 11\}$, $R = \{3, 4, 5, 7, 9\}$ மற்றும் $S = \{2, 3, 4, 5, 8\}$ எனில்,

   (i) $(P \cup Q) \cup R$ (ii) $(P \cap Q) \cap S$ (iii) $(Q \cap S) \cap R$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

2. பின்வரும் கணங்களுக்குப் பரிமாற்றுப் பண்புகளைச் சோதிக்க.

   $P = \{x : x$ ஆனது 2 மற்றும் 7 –க்கு இடையே உள்ள ஒரு மெய்யெண்$\}$ மற்றும்

   $Q = \{x : x$ ஆனது 2 மற்றும் 7 –க்கு இடையே உள்ள ஒரு விகிதமுறு எண்$\}$

3. $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{m, n, q, s, t\}$ மற்றும் $C = \{m, n, p, q, s\}$ எனில், கணங்களின் சேர்ப்புக்கான சேர்ப்புப் பண்புகளைச் சரிபார்க்க.

4. $A = \{-11, \sqrt{2}, \sqrt{5}, 7\}$, $B = \{\sqrt{3}, \sqrt{5}, 6, 13\}$ மற்றும் $C = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 9\}$ ஆகியவற்றிற்குக் கணங்களின் வெட்டுக்கான சேர்ப்புப் பண்பினைச் சரிபார்க்க.

5. $A = \{x : x = 2^n,\ n \in \mathbb{W}$ மற்றும் $n < 4\}$, $B = \{x : x = 2n,\ n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $n \leq 4\}$ மற்றும் $C = \{0, 1, 2, 5, 6\}$ எனில், கணங்களின் வெட்டுக்கான சேர்ப்புப் பண்பினைச் சரிபார்க்க.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 24 26-12-2019 13:03:47

1.6.3 பங்கீட்டுப் பண்பு (Distributive Property)

எண்களில் கூட்டலின் மீதான பெருக்கலானது பங்கீட்டுப் பண்பை நிறைவு செய்யும். அதாவது, $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ என்பதை முந்தைய வகுப்புகளில் கற்றிருக்கிறோம். இதே வழியில் கணங்களின் மீதான பங்கீட்டுப் பண்புகள் பின்வருமாறு:

> **பங்கீட்டுப் பண்பு:** A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்,
> (i) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ [சேர்ப்பின் மீதான வெட்டின் பங்கீட்டுப் பண்பு]
> (ii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ [வெட்டின் மீதான சேர்ப்பின் பங்கீட்டுப் பண்பு]

எடுத்துக்காட்டு 1.21 $A=\{0,2,4,6,8\}, B=\{x : x$ ஒரு பகா எண் மற்றும் $x<11\}$ மற்றும் $C=\{x : x\in\mathbb{N}$ மற்றும் $5\le x<9\}$ எனில், $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு இங்கே $A=\{0,2,4,6,8\}$, $B=\{2,3,5,7\}$ மற்றும் $C=\{5,6,7,8\}$

முதலில் நாம் காண்பது, $B\cap C=\{5,7\}$

$A\cup(B\cap C)=\{0,2,4,5,6,7,8\}$ ... (1)

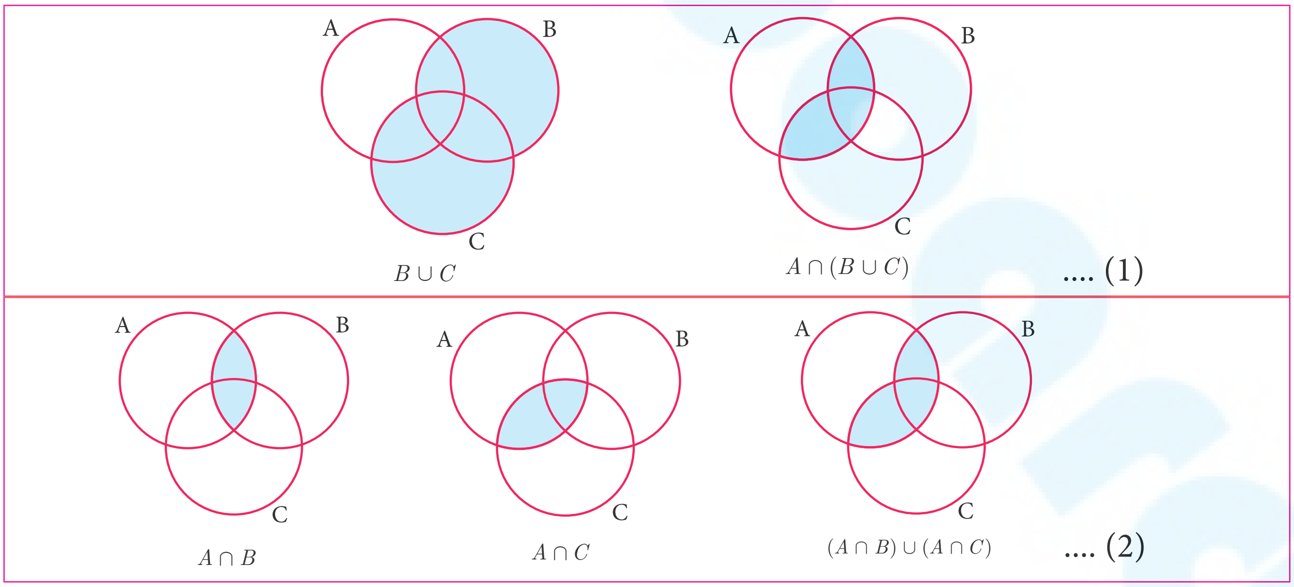
பின்னர், $A\cup B=\{0,2,3,4,5,6,7,8\}$ மற்றும் $A\cup C=\{0,2,4,5,6,7,8\}$

ஆகவே, $(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{0,2,4,5,6,7,8\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.22 வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு



படம் 1.29

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ என்பது வென்படம் மூலம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 25
26-12-2019 13:03:49

1.7 டி மார்கன் விதிகள் (De Morgan's Laws)

அகஸ்டஸ் டி மார்கன் (1806-1871) ஓர் ஆங்கிலேயக் கணிதமேதை. அவர் 1806 இல் இந்தியத் திருநாட்டில் தமிழகத்தில் உள்ள மதுரையில் சூன் மாதம் 27 ஆம் நாள் பிறந்தார். அப்போது அவருடைய தந்தையார் கிழக்கிந்தியக் கம்பெனியால் இந்தியாவில் பணியமர்த்தப்பட்டிருந்தார். டி மார்கன் ஏழு மாதக் குழந்தையாய் இருந்தபோது, அவரது குடும்பமானது இங்கிலாந்திற்குத் திரும்பியது. அவர் இலண்டன் கேம்பிரிட்ஜ் (Cambridge) நகரில் உள்ள டிரினிட்டி (Trinity) கல்லூரியில் கல்வி பயின்றார். அவர் கண வித்தியாசம் மற்றும் கண நிரப்பிக்கான சில விதிகளை உருவாக்கினார். இந்த விதிகள் டி மார்கன் விதிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

1.7.1 கணவித்தியாசத்திற்கான டி மார்கன் விதிகள் (De Morgan's Laws for Set Difference)

AHZ523

இந்த விதிகள் கணச் செயல்களான சேர்ப்பு, வெட்டு மற்றும் கண வித்தியாசத்தைத் தொடர்புபடுத்துகிறது.

$A=\{-5,-2,1,3\}$, $B=\{-3,-2,0,3,5\}$ மற்றும் $C=\{-2,-1,0,4,5\}$ என்ற மூன்று கணங்களைக் கருதுவோம்.

இப்பொழுது, $B\cup C = \{-3,-2,-1,0,3,4,5\}$

$A-(B\cup C) = \{-5,1\}$ ... (1)

மேலும், $A-B = \{-5,1\}$ மற்றும் $A-C=\{-5,1,3\}$

$(A-B)\cup(A-C) = \{-5,1,3\}$ ... (2)

$(A-B)\cap(A-C) = \{-5,1\}$ ... (3)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து,

$A-(B\cup C) \neq (A-B)\cup(A-C)$ என நாம் காண்கிறோம்.

ஆனால் (1) மற்றும் (3) இலிருந்து,

$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ என்பதை நம்மால் காண முடிகிறது.

இப்பொழுது, $B\cap C = \{-2,0,5\}$

$A-(B\cap C) = \{-5,1,3\}$ ... (4)

சிந்தனைக் களம்

$(A-B)\cup(A-C)\cup(A\cap B)=$____

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து,

$A-(B\cap C)\neq(A-B)\cap(A-C)$ என நாம் காண்கிறோம்.

ஆனால் (2) மற்றும் (4) இலிருந்து, $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ எனப் பெறுகிறோம்.

கண வித்தியாசத்திற்கான டி மார்கன் விதிகள்

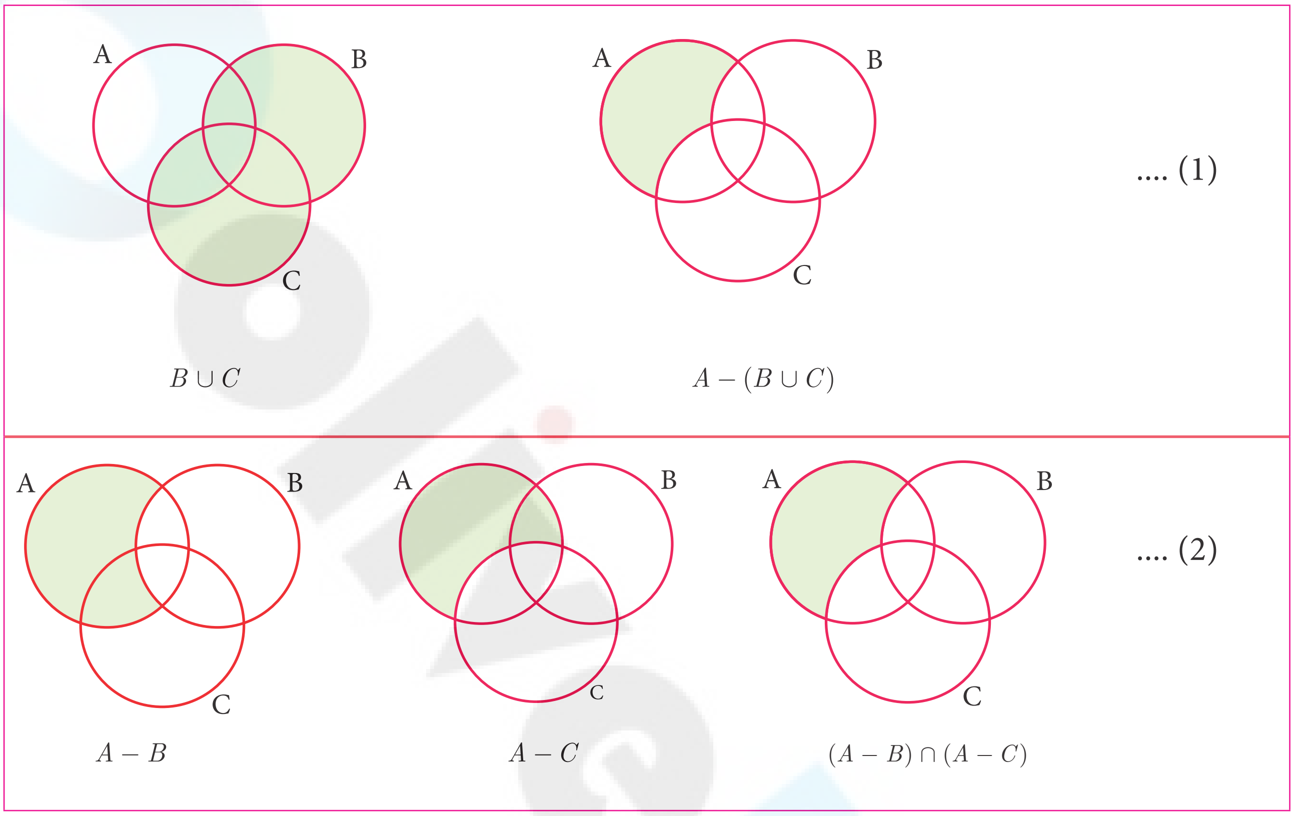
A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்,

(i) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ (ii) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 26 26-12-2019 13:03:51

எடுத்துக்காட்டு 1.23 வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு



படம் 1.30

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.24 $P=\{x : x\in\mathbb{W}$ மற்றும் $0<x<10\}$, $Q=\{x : x=2n+1, n\in\mathbb{W}$ மற்றும் $n<5\}$ மற்றும் $R=\{2,3,5,7,11,13\}$ எனில், $P-(Q\cap R)=(P-Q)\cup(P-R)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

கணங்கள் P, Q மற்றும் R ஐப் பட்டியல் முறையில் எழுதுவோம்.

$P=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $Q=\{1,3,5,7,9\}$

மற்றும் $R=\{2,3,5,7,11,13\}$

முதலில், $(Q\cap R)=\{3,5,7\}$

$P-(Q\cap R)=\{1,2,4,6,8,9\}$ ... (1)

அடுத்து, $P-Q=\{2,4,6,8\}$ மற்றும்

$P-R=\{1,4,6,8,9\}$

> கணம் Q–ன் உறுப்புகளைக் கண்டறிதல்
>
> கொடுக்கப்பட்டது, $x=2n+1$
>
> $n=0\rightarrow x=2(0)+1=0+1=1$
>
> $n=1\rightarrow x=2(1)+1=2+1=3$
>
> $n=2\rightarrow x=2(2)+1=4+1=5$
>
> $n=3\rightarrow x=2(3)+1=6+1=7$
>
> $n=4\rightarrow x=2(4)+1=8+1=9$
>
> இதிலிருந்து x–ன் மதிப்பானது 1, 3, 5, 7 மற்றும் 9 ஆகும்.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 27 26-12-2019 13:03:53

ஆகவே, $(P-Q)\cup(P-R) = \{1,2,4,6,8,9\}$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $P-(Q\cap R) = (P-Q)\cup(P-R)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

1.7.2 கண நிரப்பிக்கான டி மார்கன் விதிகள் (De Morgan's Laws for Complementation)

இந்த விதிகள் கணச் செயல்களான சேர்ப்பு மற்றும் வெட்டு ஆகியவற்றைக் கணநிரப்பியோடு தொடர்புபடுத்துகிறது.

அனைத்துக் கணம் $U=\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$ மற்றும் $B=\{0,3,4,5\}$ ஆகியவற்றைக் கருதுவோம்.

இப்பொழுது, $A\cup B = \{0,1,3,4,5\}$

$(A\cup B)' = \{2,6\}$ .....(1)

அடுத்து, $A' = \{0,2,4,6\}$ and $B' = \{1,2,6\}$

$A'\cap B' = \{2,6\}$ .....(2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $(A\cup B)' = A'\cap B'$ என நாம் பெறுகிறோம்.

மேலும், $A\cap B = \{3,5\}$

$(A\cap B)' = \{0,1,2,4,6\}$ .....(3)

$A' = \{0,2,4,6\}$ மற்றும் $B' = \{1,2,6\}$

$A'\cup B' = \{0,1,2,4,6\}$ .....(4)

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து, $(A\cap B)' = A'\cup B'$ என நாம் பெறுகிறோம்.

சிந்தனைக் களம்

$A-B = A\cap B'$ என்பது சரியா?

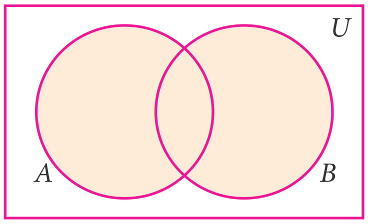
சிந்தனைக் களம்

$(A-B)\cup(B-A')=$____

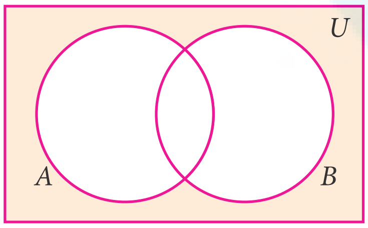
கண நிரப்பிக்கான டி மார்கன் விதிகள்: U என்பது அனைத்துக் கணம். A, B என்பன அதனுள் அமைந்த முடிவுறு கணங்கள் எனில், (i) $(A\cup B)' = A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

எடுத்துக்காட்டு 1.25 வென்படங்களைப் பயன்படுத்திச் சரிபார் : $(A\cup B)' = A'\cap B'$

தீர்வு



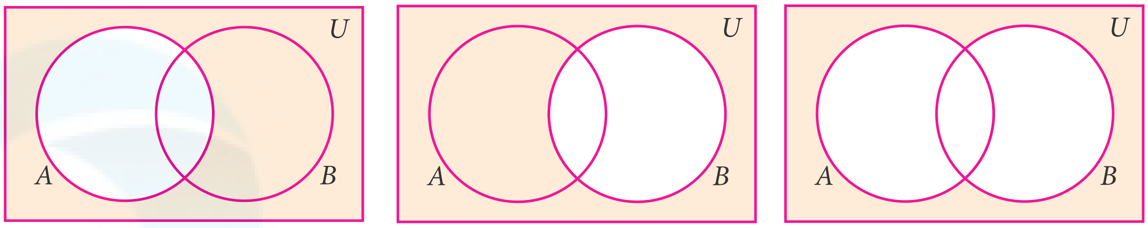
$A\cup B$



$(A\cup B)'$

.... (1)

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 28 26-12-2019 13:03:55



.... (2)

A' $\qquad$ B' $\qquad$ $A' \cap B'$

படம் 1.31

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.26

$U = \left\{x : x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 10\right\}$, $A = \left\{x : x = 2p + 1,\ p \in \mathbb{Z}, -1 \leq p \leq 4\right\}$, $B = \left\{x : x = 3q + 1,\ q \in \mathbb{Z}, -1 \leq q < 4\right\}$ என்ற கணங்களுக்குக் கணநிரப்பிக்கான டி மார்கன் விதிகளைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை, $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$A = \{-1, 1, 3, 5, 7, 9\}$ மற்றும் $B = \{-2, 1, 4, 7, 10\}$

சிந்தனைக் களம்

$A \cap (A \cup B)' =$ ____

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

இப்பொழுது, $A \cup B = \{-2, -1, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$

$(A \cup B)' = \{0, 2, 6, 8\}$ ..... (1)

பிறகு, $A' = \{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ மற்றும் $B' = \{-1, 0, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

$A' \cap B' = \{0, 2, 6, 8\}$ ..... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

சிந்தனைக் களம்

$(A \cup B)' \cup (A' \cap B) =$ ____

இப்பொழுது, $A \cap B = \{1, 7\}$

$(A \cap B)' = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ ..... (3)

மேலும், $A' \cup B' = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$ ..... (4)

(3) மற்றும் (4) இலிருந்து, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 29 26-12-2019 13:03:58

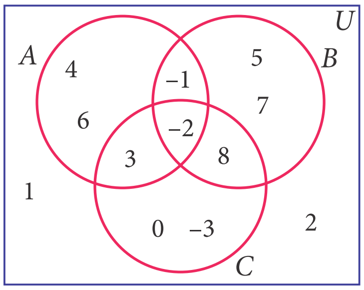
பயிற்சி 1.5

1. அருகில் உள்ள வென்படத்திலிருந்து கீழ்க்காணும் கணங்களைக் காண்க :

   (i) $A - B$ (ii) $B - C$ (iii) $A' \cup B'$

   (iv) $A' \cap B'$ (v) $(B \cup C)'$

   (vi) $A - (B \cup C)$ (vii) $A - (B \cap C)$



2. $K = \{a,b,d,e,f\}$, $L = \{b,c,d,g\}$ மற்றும் $M = \{a,b,c,d,h\}$ என்ற கணங்களுக்குப் பங்கீட்டு விதிகளைச் சரிபார்க்க:

   (i) $K \cup (L \cap M)$ (ii) $K \cap (L \cup M)$

   (iii) $(K \cup L) \cap (K \cup M)$ (iv) $(K \cap L) \cup (K \cap M)$

3. $A = \{x : x \in \mathbb{Z}, -2 < x \le 4\}$, $B = \{x : x \in \mathbb{W}, x \le 5\}$, மற்றும் $C = \{-4,-1,0,2,3,4\}$ என்ற கணங்களுக்கு $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

4. வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

5. $A = \{b,c,e,g,h\}$, $B = \{a,c,d,g,i\}$ மற்றும் $C = \{a,d,e,g,h\}$ எனில், $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ எனக்காட்டுக.

6. $A = \{x : x = 6n, n \in \mathbb{W}$ மற்றும் $n < 6\}$, $B = \{x : x = 2n, n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $2 < n \le 9\}$ மற்றும் $C = \{x : x = 3n, n \in \mathbb{N}$ மற்றும் $4 \le n < 10\}$ எனில், $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ எனக் காட்டுக.

7. $A = \{-2, 0, 1, 3, 5\}$, $B = \{-1, 0, 2, 5, 6\}$ மற்றும் $C = \{-1, 2, 5, 6, 7\}$ எனில், $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ எனக் காட்டுக.

8. $A = \{y : y = \frac{a+1}{2}, a \in \mathbb{W}$ மற்றும் $a \le 5\}$, $B = \{y : y = \frac{2n-1}{2}, n \in \mathbb{W}$ மற்றும் $n < 5\}$ மற்றும் $C = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ எனில், $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ எனக் காட்டுக.

9. வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

10. $U = \{4,7,8,10,11,12,15,16\}$, $A = \{7,8,11,12\}$ மற்றும் $B = \{4,8,12,15\}$ எனில், கணநிரப்பிக்கான விதிகளைச் சரிபார்க்க.

11. வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $(A \cap B)' = A' \cup B'$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

1.8 கணங்களின் ஆதி எண்ணின் பயன்பாட்டுக் கணக்குகள் (Application Problems on Cardinality of Sets)

கணங்களின் சேர்ப்பு, வெட்டு, நிரப்பு மற்றும் வித்தியாசம் பற்றிக் கற்றுள்ளோம். இப்போது நாம் அன்றாட வாழ்வினையொட்டிய சில கணக்குகளைக் கணங்களின் மூலம் தீர்க்க முயல்வோம்.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 30 26-12-2019 13:04:01

முடிவுகள் :

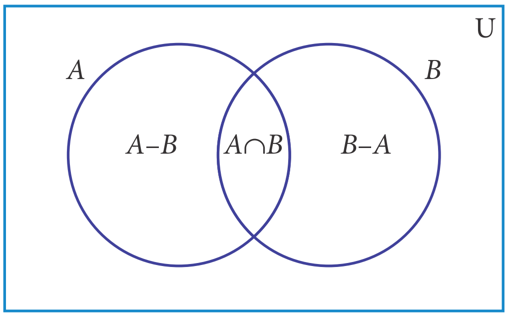
A, B என்பன இரு முடிவுறு கணங்கள் எனில்

(i) $n(A\cup B) = n(A)+n(B) - n(A\cap B)$

(ii) $n(A-B) = n(A) - n(A\cap B)$

(iii) $n(B-A) = n(B) - n(A\cap B)$

(iv) $n(A') = n(U) - n(A)$



படம் 1.32

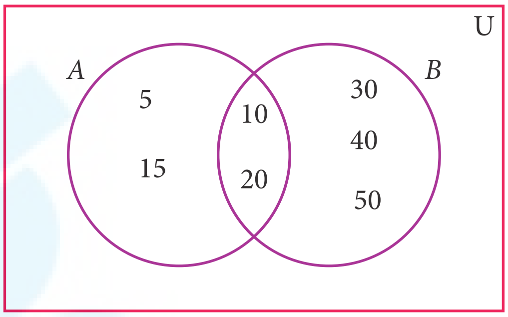
குறிப்பு

மேலே உள்ள முடிவுகளில் இருந்து, நாம் பெறுவது,

- $n(A\cap B) = n(A)+n(B) - n(A\cup B)$
- $n(U) = n(A)+n(A')$
- A மற்றும் B என்பன வெட்டாக் கணங்கள் எனில், $n(A\cup B) = n(A)+n(B)$.

எடுத்துக்காட்டு 1.27 கொடுக்கப்பட்டுள்ள வென்படத்தில் இருந்து $n(A\cup B) = n(A)+n(B) - n(A\cap B)$ என்பதை சரிபார்க்க

தீர்வு



படம் 1.33

தரப்பட்டுள்ள வென்படத்தில் இருந்து,

$A = \{5, 10, 15, 20\}$

$B = \{10, 20, 30, 40, 50,\}$

இங்கு $A\cup B = \{5, 10, 15, 20, 30, 40, 50\}$

$A\cap B = \{10, 20\}$

$n(A) = 4,\ n(B) = 5,\ n(A\cup B) = 7,\ n(A\cap B) = 2$

$n(A\cup B) = 7 \quad \to (1)$

$n(A)+n(B)-n(A\cap B) = 4+5-2$

$=7 \quad \to (2)$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து $n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ எனச் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.28 $n(A) = 36$, $n(B) = 10$, $n(A\cup B)=40$, மற்றும் $n(A')=27$ எனில், $n(U)$ மற்றும் $n(A\cap B)$ காண்க.

தீர்வு

$n(A) = 36,\ n(B) =10,\ n(A\cup B)=40,\ n(A')=27$

(i) $n(U) = n(A)+n(A') = 36+27 = 63$

(ii) $n(A\cap B) = n(A)+n(B)-n(A\cup B) = 36+10-40 = 46-40 = 6$

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 31 26-12-2019 13:04:01

செயல்பாடு-4

பொருத்தமான ஆதி எண்களை அட்டவணையில் நிரப்புக

வ.எண்.	$n(A)$	$n(B)$	$n(A\cup B)$	$n(A\cap B)$	$n(A-B)$	$n(B-A)$
1	30	45	65			
2	20		55	10		
3	50	65		25		
4	30	43	70			

எடுத்துக்காட்டு 1.29

$A=\{b, d, e, g, h\}$ மற்றும் $B = \{a, e, c, h\}$ எனில், $n(A-B) = n(A)-n(A\cap B)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு $A = \{b, d, e, g, h\}, B = \{a, e, c, h\}$

$$A - B = \{b, d, g\}$$

$$n(A-B) = 3 \qquad \dots (1)$$

$$A \cap B = \{e, h\}$$

$$n(A \cap B) = 2, \quad n(A) = 5$$

$$n(A) - n(A\cap B) = 5-2$$

$$= 3 \qquad \dots (2)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து நாம் பெறுவது

$n(A-B) = n(A)-n(A\cap B)$ எனச் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.30

ஒரு பள்ளியில் எல்லா மாணவர்களும் வளைகோல்பந்தாட்டம் அல்லது மட்டைப் பந்து அல்லது இரண்டும் விளையாடுகிறார்கள். 300 மாணவர்கள் வளைகோல்பந்தாட்டத்தையும் 250 மாணவர்கள் மட்டைப் பந்து விளையாட்டையும், 110 மாணவர்கள் இரண்டையும் விளையாடுகிறார்கள் எனில்

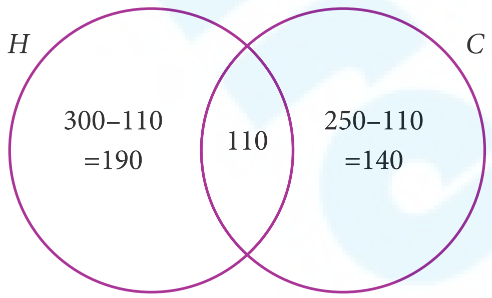
(i) எத்தனை மாணவர்கள் வளைகோல்பந்தாட்டம் மட்டும் விளையாடுகிறார்கள்.

(ii) எத்தனை மாணவர்கள் மட்டைப் பந்து மட்டும் விளையாடுகிறார்கள்.

(iii) பள்ளியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு வளைகோல்பந்தாட்டம் விளையாடும் மாணவர்களின் கணம் H என்க. மட்டைப் பந்து விளையாடும் மாணவர்களின் கணம் C என்க.

இங்கு $n(H)=300$, $n(C)=250$ மற்றும் $n(H\cap C)=110$.



படம் 1.34

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 32 26-12-2019 13:04:02

வென்படத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணல்.

வென்படத்தில் இருந்து,

(i) வளைகோல்பந்தாட்டம் மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 190

(ii) மட்டைப் பந்து மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 140

(iii) பள்ளியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 190 + 110 + 140 = 440

மாற்று முறை

(i) வளைகோல்பந்தாட்டம் மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$n(H-C) = n(H) - n(H\cap C)$$
$$= 300 - 110 = 190$$

(ii) மட்டைப் பந்து மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$n(C-H) = n(C) - n(H\cap C)$$
$$= 250 - 110 = 140$$

(iii) பள்ளியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$n(H\cup C) = n(H) + n(C) - n(H\cap C)$$
$$= 300+250 - 110 = 440$$

CHUGDY

எடுத்துக்காட்டு 1.31

ஒரு விருந்தில் 60 பேர் கலந்து கொண்டனர். அதில் 35 பேர் வெண்ணிலா பனிக்கூழ் (vennila ice cream) மற்றும் 30 பேர் சாக்லேட் பனிக்கூழ் (chocolate ice cream) எடுத்துக்கொண்டனர். பங்கேற்றவர்களில் அனைவரும் குறைந்தபட்சம் ஒரு வகைப் பனிக்கூழையாவது எடுத்துக் கொண்டால்,

(i) வெண்ணிலா மற்றும் சாக்லேட் என இரண்டு வகைப் பனிக் கூழையும் எடுத்துக்கொண்டவர்கள்,

(ii) வெண்ணிலா பனிக்கூழ் மட்டும் எடுத்துக்கொண்டவர்கள் மற்றும்

(iii) சாக்லேட் பனிக்கூழ் மட்டும் எடுத்துக்கொண்டவர்கள் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

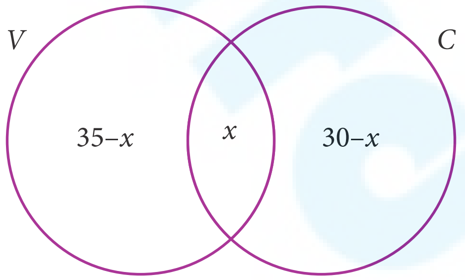
V என்பது வெண்ணிலா பனிக்கூழ் எடுத்துக்கொண்டவர்களின் கணம் மற்றும் C என்பது சாக்லேட் பனிக்கூழ் எடுத்துக்கொண்டவர்களின் கணம் என்க.

எனவே, இங்கு $n(V) = 35$, $n(C) = 30$, $n(V\cup C) = 60$,

மேலும் இருவகையையும் எடுத்துக்கொண்டவர்கள் எண்ணிக்கை x என்க.

வென்பட முறையில் தீர்வு காணல்

$$35 - x + x + 30 - x = 60$$
$$65 - x = 60$$
$$x = 5$$



படம் 1.35

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 33
26-12-2019 13:04:02

5 பேர்கள் இருவகைப் பனிக்கூழையும் எடுத்துக்கொண்டவர்கள்

(i) வெண்ணிலா பனிக்கூழ் மட்டும் எடுத்துக்கொண்டவர்கள் $= 35 - x = 35 - 5 = 30$

(ii) சாக்லேட் பனிக்கூழ் மட்டும் எடுத்துக்கொண்டவர்கள் $= 30 - x = 30 - 5 = 25$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி இரண்டு கணங்களுக்கான கணக்குகளுக்கு தீர்வு காணும் முறையைக் கற்றறிந்தோம். இதைப்போலவே மூன்று கணங்கள் கொடுக்கப்பட்டாலும் கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காணலாம்.

> A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று முடிவுறு கணங்கள் எனில்,
>
> $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

குறிப்பு

வென்படங்களைக் கொண்டு கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் பின்வரும் முடிவுகள் பயனுள்ளதாக இருக்கும் என்பதைக் கருதுவோம்.

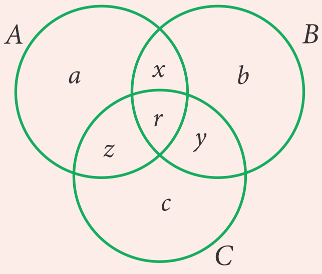
A, B மற்றும் C என்பன மாணவர்களைக் குறிக்கும் மூன்று கணங்கள் என்க.

வென்படத்திலிருந்து

கணம் A இல் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = a.

கணம் B இல் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = b.

கணம் C இல் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = c.



படம்.1.36

- ஒரே ஒரு கணத்தில் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= (a + b + c)$
- இரண்டு கணங்களில் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= (x + y + z)$
- மூன்று கணங்களில் மட்டும் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= r$
- குறைந்தது இரு கணங்களில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (இரண்டும் அதற்கு மேலும்) $= (x + y + z + r)$
- மூன்று கணங்களிலும் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= (a + b + c + x + y + z + r)$

எடுத்துக்காட்டு 1.32 ஒரு கல்லூரியில் உள்ள மாணவர்களில், 240 மாணவர்கள் மட்டைப்பந்தும் (cricket), 180 மாணவர்கள் கால்பந்தும் (football), 164 மாணவர்கள் வளைகோல் பந்தும் (hockey), 42 பேர் மட்டைப்பந்து மற்றும் கால்பந்தும், 38 பேர் கால்பந்து மற்றும் வளைகோல் பந்தும், 40 பேர் மட்டைப் பந்து மற்றும் வளைகோல் பந்தும், 16 பேர் மூன்று விளையாட்டுகளும் விளையாடுகிறார்கள். ஒவ்வொரு மாணவரும் குறைந்தது ஒரு விளையாட்டிலாவது பங்கேற்கிறார் எனில்,

(i) கல்லூரியில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

(ii) ஒரே ஒரு விளையாட்டு மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க

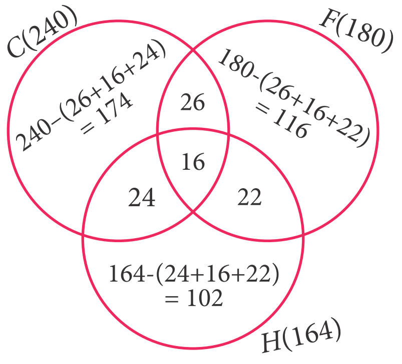
1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 34 26-12-2019 13:04:03

தீர்வு

C என்பது மட்டைப்பந்து, F என்பது கால்பந்து, H என்பது வளைகோல் பந்து விளையாடும் மாணவர்களின் கணங்கள் என்க.

$n(C) = 240,\ n(F) = 180,\ n(H) = 164,\ n(C \cap F) = 42,$
$n(F \cap H) = 38,\ n(C \cap H) = 40,\ n(C \cap F \cap H) = 16.$

பெறப்பட்ட தரவுகளை வென்படத்தில் குறிப்போம்.



படம் 1.37

(i) கல்லூரியில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$= 174+26+116+22+102+24+16 = 480$

(ii) ஒரே ஒரு விளையாட்டு மட்டும் விளையாடும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$= 174+116+102 = 392$

எடுத்துக்காட்டு 1.33 600 குடும்பங்கள் உள்ள ஒரு குடியிருப்பில் $\frac{3}{5}$ பங்கு துள்ளுந்து (scooter), $\frac{1}{3}$ பங்கு மகிழுந்து (car), $\frac{1}{4}$ பங்கு மிதிவண்டி (bicycle) வைத்துள்ளனர். 120 குடும்பங்கள் துள்ளுந்து மற்றும் மகிழுந்தும், 86 குடும்பங்கள் மகிழுந்து மற்றும் மிதிவண்டியும், 90 குடும்பங்கள் துள்ளுந்து மற்றும் மிதிவண்டியும் $\frac{2}{15}$ பங்கு குடும்பங்கள் மூன்று வகை வாகனங்களையும் வைத்திருக்கிறார்கள் எனில்,

(i) குறைந்தது இரண்டு வகை வாகனங்களை வைத்திருக்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை,

(ii) எந்த ஒரு வாகனமும் வைத்திருக்காத குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

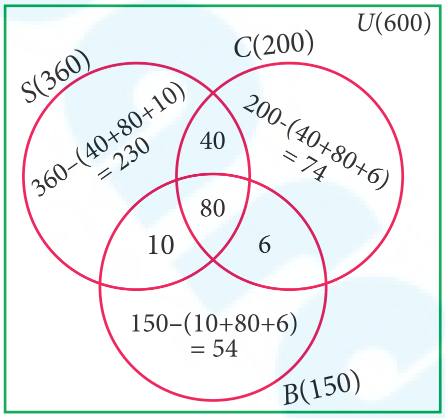
தீர்வு

S என்பது துள்ளுந்து, C என்பது மகிழுந்து மற்றும் B என்பது மிதிவண்டி வைத்திருக்கும் குடும்பங்களின் கணங்கள் என்க.

கொடுக்கப்பட்டது, $n(\mathrm{U}) = 600;\ n(S) = \frac{3}{5} \times 600 = 360$

$n(C) = \frac{1}{3} \times 600 = 200,\ n(B) = \frac{1}{4} \times 600 = 150$

$n(S \cap C \cap B) = \frac{2}{15} \times 600 = 80$



படம் 1.38

வென்படத்திலிருந்து,

(i) குறைந்தது இரண்டு வகை வாகனங்களை வைத்திருக்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை = $40+6+10+80 = 136$

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 35 26-12-2019 13:04:04

(ii) எந்த ஒரு வாகனமும் வைத்திருக்காத குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை

$= 600 -$ (குறைந்தது ஒரு வாகனத்தை வைத்திருக்கும் குடும்பங்கள்)

$= 600 - (230 + 40 + 74 + 6 + 54 + 10 + 80)$

$= 600 - 494 = 106$

எடுத்துக்காட்டு 1.34 100 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு குழுவில், 85 மாணவர்கள் தமிழ் பேசுபவர்கள், 40 மாணவர்கள் ஆங்கிலம் பேசுபவர்கள், 20 மாணவர்கள் பிரெஞ்சு பேசுபவர்கள், 32 பேர் தமிழ் மற்றும் ஆங்கிலமும், 13 பேர் ஆங்கிலம் மற்றும் பிரெஞ்சும், 10 பேர் தமிழ் மற்றும் பிரெஞ்சும் பேசுபவர்கள். ஒவ்வொரு மாணவரும் குறைந்தது ஒரு மொழியாவது பேசுகிறார் எனில், மூன்று மொழிகளும் பேசும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு

A என்பது தமிழ், B என்பது ஆங்கிலம் மற்றும் C என்பது பிரெஞ்சு மொழி பேசும் மாணவர்களின் கணங்கள் என்க.

கொடுக்கப்பட்டவை $n(A \cup B \cup C) = 100,\ n(A) = 85,\ n(B) = 40,\ n(C) = 20,$
$n(A \cap B) = 32,\ n(B \cap C) = 13,\ n(A \cap C) = 10.$

விதியின்படி,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$100 = 85 + 40 + 20 - 32 - 13 - 10 + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cap B \cap C) = 100 - 90 = 10$$

ஆகவே, 10 மாணவர்கள் மூன்று மொழிகளையும் பேசுபவர்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 1.35 A, B மற்றும் C என்ற மூன்று வெவ்வேறு வகையான இதழ்கள் வாங்கும் 200 சந்தாதாரர்களிடம் நடத்தப்பட்ட ஆய்வில், 75 நபர்கள் A என்ற இதழை வாங்குவதில்லை எனவும், 100 நபர்கள் B என்ற இதழை வாங்குவதில்லை எனவும், 50 நபர்கள் C என்ற இதழை வாங்குவதில்லை எனவும், 125 நபர்கள் குறைந்தது இரண்டு இதழ்களாவது வாங்குவதாகவும் கண்டறியப்பட்டது. அதில்,

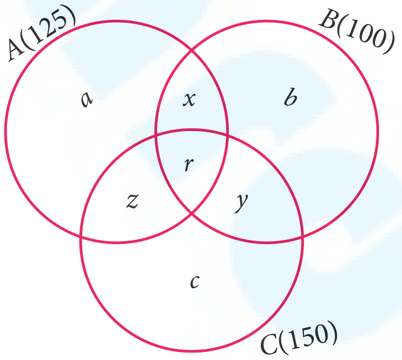
(i) சரியாக இரண்டு இதழ்களை வாங்கும் சந்தாதாரர்களின் எண்ணிக்கை,

(ii) ஒரே ஓர் இதழை மட்டும் வாங்கும் சந்தாதாரர்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க.

.தீர்வு

மொத்தச் சந்தாதாரர்களின் எண்ணிக்கை = 200

இதழ்	வாங்காதவர்கள்	வாங்குபவர்கள்
A	75	125
B	100	100
C	50	150



படம் 1.39

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 36 26-12-2019 13:04:06

வென்படத்திலிருந்து,

ஒரே ஓர் இதழை மட்டும் வாங்குபவர்களின் எண்ணிக்கை $= a+b+c$

சரியாக, இரண்டு இதழ்களை வாங்குபவர்களின் எண்ணிக்கை $= x+y+z$

மற்றும் 125 பேர் குறைந்தது இரண்டு இதழ்களையாவது வாங்குகின்றனர்.

அதாவது, $x+y+z+r=125$ ... (1)

கொடுக்கப்பட்டவை: $n(A\cup B\cup C)=200$, $n(A)=125$, $n(B)=100$, $n(C)=150$,

$n(A\cap B)=x+r$, $n(B\cap C)=y+r$, $n(A\cap C)=z+r$, $n(A\cap B\cap C)=r$

இப்பொழுது,

$$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$200 = 125+100+150-x-r-y-r-z-r+r$$

$$= 375-(x+y+z+r)-r$$

$$= 375-125-r \quad \left[\because\ x+y+z+r=125\right]$$

$$200 = 250-r \qquad \Rightarrow r=50$$

(1) இலிருந்து, $x+y+z+50 = 125$

$$x+y+z = 75$$

ஆகவே, சரியாக இரண்டு இதழ்களை மட்டும் வாங்கும் சந்தாதாரர்களின் எண்ணிக்கை = 75.

வென்படத்திலிருந்து,

$$(a+b+c)+(x+y+z+r) = 200 \quad ... (2)$$

(1) –ஐ (2) இல் பிரதியிட,

$$a+b+c+125 = 200$$

$$a+b+c = 75$$

ஆகவே, ஒரே ஓர் இதழை மட்டும் வாங்கும் சந்தாதாரர்களின் எண்ணிக்கை = 75.

பயிற்சி 1.6

1. (i) $n(A)=25$, $n(B)=40$, $n(A\cup B)=50$ மற்றும் $n(B')=25$ எனில், $n(A\cap B)$ மற்றும் $n(U)$ காண்க.

   (ii) $n(A)=300$, $n(A\cup B)=500$, $n(A\cap B)=50$ மற்றும் $n(B')=350$ எனில், $n(B)$ மற்றும் $n(U)$ காண்க.

2. $U=\{x : x\in \mathbb{N}, x\le 10\}$, $A=\{2,3,4,8,10\}$ மற்றும் $B=\{1,2,5,8,10\}$ எனில், $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

3. $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$ என்பதைக் கீழ்க்காணும் கணங்களுக்குச் சரிபார்க்க.

   (i) $A=\{a,c,e,f,h\}$, $B=\{c,d,e,f\}$ மற்றும் $C=\{a,b,c,f\}$

   (ii) $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,3,5,6\}$ மற்றும் $C=\{1,5,6,7\}$

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 37 26-12-2019 13:04:08

4. ஒரு வகுப்பில் உள்ள அனைத்து மாணவர்களும் இசை அல்லது நாடகம் அல்லது இரண்டிலும் பங்கேற்கிறார்கள். 25 மாணவர்கள் இசையிலும், 30 மாணவர்கள் நாடகத்திலும், 8 மாணவர்கள் இசை மற்றும் நாடகம் இரண்டிலும் பங்கேற்கிறார்கள் எனில்
   (i) இசையில் மட்டும் பங்கேற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.
   (ii) நாடகத்தில் மட்டும் பங்கேற்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.
   (iii) வகுப்பில் உள்ள மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

5. 45 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவில் ஒவ்வொருவரும் தேநீர் அல்லது குளம்பி (coffee) அல்லது இரண்டையும் விரும்புகிறார்கள். 35 நபர்கள் தேநீர் மற்றும் 20 நபர்கள் குளம்பி விரும்புகிறார்கள். கீழ்க்காணும் நபர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
   (i) தேநீர் மற்றும் குளம்பி இரண்டையும் விரும்புபவர்கள்
   (ii) தேநீரை விரும்பாதவர்கள்
   (iii) குளம்பியை விரும்பாதவர்கள்

6. ஒரு தேர்வில் கணிதத்தில் 50% மாணவர்கள் தேர்ச்சி பெற்றனர் மற்றும் 70% மாணவர்கள் அறிவியலில் தேர்ச்சி பெற்றனர். மேலும் 10% இரண்டிலும் தேர்ச்சி பெறாதோர். 300 மாணவர்கள் இரு பாடங்களிலும் தேர்ச்சி பெற்றுள்ளனர். இந்த இரு தேர்வை மட்டுமே மாணவர்கள் எழுதியிருந்தால் தேர்வெழுதிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க..

7. A மற்றும் B ஆகிய இரு கணங்கள் $n(A-B) = 32 + x$, $n(B-A) = 5x$ மற்றும் $n(A\cap B) = x$. என அமைகின்றன. இத்தரவினை வென்படம் மூலம் குறிக்கவும். $n(A) = n(B)$, எனில் x இன் மதிப்பைக் காண்க.

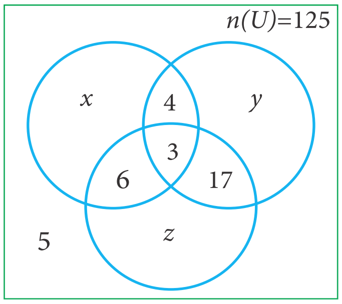
8. 500 மகிழுந்து உரிமையாளர்களைப் பற்றிய ஆய்வில், 400 பேர் மகிழுந்து A ஐயும் 200 பேர் மகிழுந்து B ஐயும், 50 பேர் இரு வகையான மகிழுந்துகளையும் வைத்துள்ளனர் எனில் இது சரியான தகவலா?

9. ஒரு குடியிருப்பில், 275 குடும்பங்கள் தமிழ்ச் செய்தித்தாளும், 150 குடும்பங்கள் ஆங்கிலச் செய்தித்தாளும், 45 குடும்பங்கள் இந்தி செய்தித்தாளும் வாங்குகின்றனர். 125 குடும்பங்கள் தமிழ் மற்றும் ஆங்கிலச் செய்தித்தாள்களையும், 17 குடும்பங்கள் ஆங்கிலம் மற்றும் இந்தி செய்தித்தாள்களையும், 5 குடும்பங்கள் தமிழ் மற்றும் இந்தி செய்தித்தாள்களையும், 3 குடும்பங்கள் மூன்று செய்தித்தாள்களையும் வாங்குகிறார்கள். குடியிருப்பில் உள்ள ஒவ்வொரு குடும்பமும் குறைந்தது ஒரு செய்தித்தாளையாவது வாங்குகிறார்கள் எனில்,
   (i) ஒரு செய்தித்தாளை மட்டும் வாங்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை,
   (ii) குறைந்தது இரண்டு செய்தித்தாள்களை வாங்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை,
   (iii) குடியிருப்பில் உள்ள மொத்தக் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க

10. 1000 விவசாயிகளிடம் நடத்தப்பட்ட ஆய்வில், 600 விவசாயிகள் நெல் பயிரிட்டதாகவும், 350 விவசாயிகள் கேழ்வரகு பயிரிட்டதாகவும், 280 விவசாயிகள் மக்காச்சோளம் பயிரிட்டதாகவும் தெரிவித்தனர். மேலும், 120 விவசாயிகள் நெல் மற்றும் கேழ்வரகு, 100 விவசாயிகள் கேழ்வரகு மற்றும் மக்காச்சோளம், 80 விவசாயிகள் நெல் மற்றும் மக்காச்சோளப் பயிர்களையும் பயிரிட்டனர். ஒவ்வொரு விவசாயியும் மேற்கண்டவற்றில் குறைந்தது ஒரு பயிராவது பயிர் செய்தார் எனில், மூன்று பயிர்களையும் பயிரிட்ட விவசாயிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 38 26-12-2019 13:04:08

11. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $n(U)=125$, y ஆனது x ஐப் போல் இருமடங்கு மற்றும் z ஆனது x ஐ விட 10 அதிகம் எனில், x, y மற்றும் z ஆகியவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.



12. 35 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு வகுப்பில் ஒவ்வொருவரும் சதுரங்கம் (Chess), சுண்டாட்டம் (Carrom), மேசை வரிப்பந்து (Table tennis) ஆகிய விளையாட்டுகளில் ஏதேனும் ஒன்றை விளையாடுகிறார்கள். 22 மாணவர்கள் சதுரங்கமும், 21 மாணவர்கள் சுண்டாட்டமும், 15 மாணவர்கள் மேசை வரிப்பந்தும், 10 மாணவர்கள் சதுரங்கம் மற்றும் மேசை வரிப்பந்தும், 8 மாணவர்கள் சுண்டாட்டம் மற்றும் மேசை வரிப்பந்தும், 6 மாணவர்கள் மூன்று விளையாட்டுகளையும் விளையாடுகிறார்கள் எனில், (i) சதுரங்கம் மற்றும் சுண்டாட்டம் விளையாடி மேசை வரிப்பந்து விளையாடாதவர்கள் (ii) சதுரங்கம் மட்டும் விளையாடுபவர்கள் (iii) சுண்டாட்டம் மட்டும் விளையாடுபவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (குறிப்பு: வென்படத்தைப் பயன்படுத்தவும்)

13. ஒரு வகுப்பிலுள்ள 50 மாணவர்கள், பேருந்து மூலமாகவோ அல்லது மிதிவண்டி மூலமாகவோ அல்லது நடந்தோ பள்ளிக்கு வந்தடைகின்றனர். 25 மாணவர்கள் பேருந்து மூலமும், 20 மாணவர்கள் மிதிவண்டி மூலமும், 30 மாணவர்கள் நடந்தும், 10 மாணவர்கள் மூன்று வகைப் பயணங்களிலும் வருகிறார்கள் எனில் எத்தனை மாணவர்கள் சரியாக இரண்டு வகைப் பயணங்களில் மட்டும் பள்ளிக்கு வந்தடைகின்றனர்.

AI913Q

பயிற்சி 1.7

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. கீழ்க்கண்டவற்றில் சரியானது எது?
   (1) $\{7\} \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (2) $7 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
   (3) $7 \notin \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ (4) $\{7\} \not\subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

2. கணம் $P = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x < 1\}$ என்பது
   (1) ஒருறுப்புக் கணம் (2) அடுக்குக் கணம் (3) வெற்றுக் கணம் (4) உட்கணம்

3. $U = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$ மற்றும் $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \le x < 6\}$ எனில் $(A')'$ என்பது
   (1) $\{1, 6, 7, 8, 9\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4\}$ (3) $\{2, 3, 4, 5\}$ (4) $\{\ \}$

4. $B \subseteq A$ எனில் $n(A \cap B)$ என்பது
   (1) $n(A-B)$ (2) $n(B)$ (3) $n(B-A)$ (4) $n(A)$

5. கணம் $A = \{x, y, z\}$ எனில், A இன் வெற்றுக் கணமில்லாத உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை
   (1) 8 (2) 5 (3) 6 (4) 7

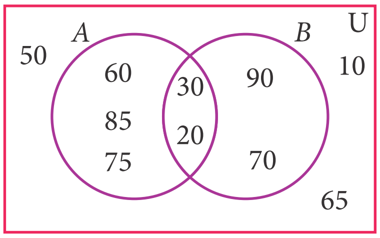
6. பின்வருவனவற்றுள் சரியானது எது?
   (1) $\varnothing \subseteq \{a, b\}$ (2) $\varnothing \in \{a, b\}$ (3) $\{a\} \in \{a, b\}$ (4) $a \subseteq \{a, b\}$

7. $A \cup B = A \cap B$, எனில்
   (1) $A \neq B$ (2) $A = B$ (3) $A \subset B$ (4) $B \subset A$

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 39 26-12-2019 13:04:09

8. $B - A$ என்பது B, எனில் $A \cap B$ என்பது

(1) A (2) B (3) U (4) $\varnothing$



படம் 1.40

9. அருகில் உள்ள படத்திலிருந்து $n[P(A \Delta B)]$ ஐக் காண்க.

(1) 8 (2) 16 (3) 32 (4) 64

10. $n(A) = 10$ மற்றும் $n(B) = 15$, எனில் கணம் $A \cap B$ உள்ள குறைந்தபட்ச மற்றும் அதிகபட்ச உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

(1) 10,15 (2) 15,10 (3) 10,0 (4) 0,10

11. $A = \{\varnothing\}$ மற்றும் $B = P(A)$ எனில் $A \cap B$ ஆனது

(1) $\{ \varnothing, \{\varnothing\} \}$ (2) $\{\varnothing\}$ (3) $\varnothing$ (4) $\{0\}$

12. ஒரு வகுப்பில் உள்ள 50 மாணவர்களில் 35 பேர் சுண்டாட்டம் (carrom) விளையாடுபவர்கள் மற்றும் 20 பேர் சதுரங்கம் விளையாடுபவர்கள் எனில், இந்த இரண்டு விளையாட்டையும் விளையாடுபவர்களின் எண்ணிக்கை

(1) 5 (2) 30 (3) 15 (4) 10.

13. $U = \{x : x \in \mathbb{N}$ மற்றும் $x < 10\}$, $A = \{1,2,3,5,8\}$ மற்றும் $B = \{2,5,6,7,9\}$ எனில், $n\left[(A \cup B)'\right]$ என்பது

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 8

14. P, Q மற்றும் R என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $P - (Q \cap R)$ என்பது

(1) $P - (Q \cup R)$ (2) $(P \cap Q) - R$

(3) $(P - Q) \cup (P - R)$ (4) $(P - Q) \cap (P - R)$

15. கீழ்க்காண்பவற்றில் எது சரி?

(1) $A - B = A \cap B$ (2) $A - B = B - A$

(3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ (4) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

16. $n(A \cup B \cup C) = 100$, $n(A) = 4x$, $n(B) = 6x$, $n(C) = 5x$, $n(A \cap B) = 20$, $n(B \cap C) = 15$, $n(A \cap C) = 25$ மற்றும் $n(A \cap B \cap C) = 10$ எனில், x இன் மதிப்பு

(1) 10 (2) 15 (3) 25 (4) 30

17. A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில், $(A - B) \cap (B - C)$ – க்குச் சமமானது.

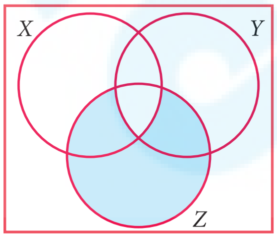
(1) A மட்டும் (2) B மட்டும் (3) C மட்டும் (4) ϕ

18. J என்பது மூன்று பக்கங்களைக் கொண்ட உருவங்களின் கணம், K என்பது ஏதேனும் இரண்டு பக்கங்கள் சமமாக உள்ள உருவங்களின் கணம் மற்றும் L என்பது ஒரு கோணம் செங்கோணமாக உள்ள உருவங்களின் கணம் எனில், $J \cap K \cap L$ என்பது

(1) இருசமபக்க முக்கோணங்களின் கணம் (2) சமபக்க முக்கோணங்களின் கணம்

(3) இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணங்களின் கணம்

(4) செங்கோண முக்கோணங்களின் கணம்.



19. கொடுக்கப்பட்ட வென்படத்தில் நிழலிடப்பட்ட பகுதியானது

(1) $Z - (X \cup Y)$ (2) $(X \cup Y) \cap Z$

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 40 26-12-2019 13:04:11

(3) $Z-(X\cap Y)$ (4) $Z\cup(X\cap Y)$

20. ஒரு நகரில், 40% மக்கள் ஒரு வகை பழத்தை மட்டும், 35% மக்கள் இரண்டு வகை பழங்களை மட்டும், 20% மக்கள் மூன்று வகை பழங்களையும் விரும்புகிறார்கள் எனில், மேற்கண்ட மூன்று வகை பழங்களையும் விரும்பாதவர்களின் சதவீதம் என்ன?

(1) 5 (2) 8 (3) 10 (4) 15

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- ஒரு கணம் என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பாகும்.
- கணம் மூன்று முறைகளில் குறிப்பிடப்படுகிறது (i) விவரிப்பு முறை (ii) கணக் கட்டமைப்பு முறை (iii) பட்டியல் முறை.
- A-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் B–ல் இருந்தால் A என்ற கணம், B–ன் உட்கணமாகும்.
- $A\subseteq B$ மற்றும் $A\neq B$, எனில் A என்ற கணம், B–ன் தகு உட்கணமாகும்.
- A எனும் கணத்தின் அனைத்து உட்கணங்களையும் கொண்ட கணம் A இன் அடுக்குக் கணம் ஆகும். இது $P(A)$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.
- m உறுப்புகள் கொண்டுள்ள ஒரு கணத்தின் உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^m.
- m உறுப்புகள் கொண்டுள்ள ஒரு கணத்தின் தகு உட்கணங்களின் எண்ணிக்கை 2^m -1.
- $A\cap B=\varnothing$ எனில் A மற்றும் B ஆகிய கணங்கள் வெட்டாக் கணங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன. $A\cap B\neq\varnothing$ எனில் A மற்றும் B ஆகிய கணங்கள் வெட்டும் கணங்கள் (Overlapping) என அழைக்கப்படுகின்றன.
- A மற்றும் B கணத்தின் கண வித்தியாசம் என்பது, B கணத்தில் இல்லாத A கணத்திலுள்ள உறுப்புகளுடைய கணமாகும்.
- A மற்றும் B கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம் என்பது $A–B$ மற்றும் $B–A$ கணங்களின் சேர்ப்பு ஆகும்.
- **பரிமாற்றுப் பண்பு**

  A, B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில்

  $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$
- **சேர்ப்புப் பண்பு** A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்

  $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$; $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
- **பங்கீட்டுப் பண்பு**

  A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்

  $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (சேர்ப்பின் மீதான வெட்டு)

  $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (வெட்டின் மீதான சேர்ப்பு)
- **கண வித்தியாசத்திற்கான டி மார்கன் விதிகள்**

  A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்

  $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$
- **கண நிரப்பிக்கான டி மார்கன் விதிகள்**

  $\mathbb{U}$ என்பது அனைத்துக் கணம், A, B என்பன அதன் உட்கணங்கள் எனில்

  $(A\cup B)'=A'\cap B'$; $(A\cap B)'=A'\cup B'$

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 41 26-12-2019 13:04:13

■ **கணங்களின் ஆதி எண்**

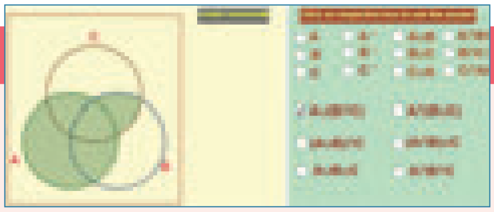
(i) A மற்றும் B என்பன எவையேனும் இரு கணங்கள் எனில்

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

(ii) A, B மற்றும் C என்பன எவையேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)\ -n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

இணையச் செயல்பாடு–1



செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது

படி 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "Set Language" என்னும் பணித்தாளின் பக்கத்திற்குச் செல்க. இப்பணித்தாளில்

1. Venn Diagram for two sets and
2. Venn Diagram for three sets ஆகிய இரண்டு செயல்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். முதல் செயல்பாட்டில், வலப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கட்டங்களில் எதை நிரப்ப வேண்டுமோ, கண்டறிய வேண்டுமோ அதைத் தேர்வு செய்து வென் வரைபடத்தில் இடம்பெறுவதை அறிக.

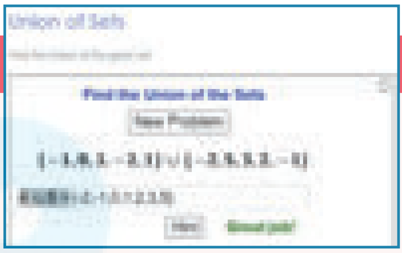
படி 2 : இதே போன்று இரண்டாம் செயல்பாட்டையும் செய்து பார்க்க.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

கண மொழி: https://ggbm.at/BrG952dw or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

இணையச் செயல்பாடு–2



இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி – 1 கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

படி – 2 "Union of Sets" என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும். புதிய கணக்குகளைச் செய்து பார்க்க "NEW PROBLEM" என்பதைச் சொடுக்கவும்

படி – 3 வினாவிற்கு ஏற்ற விடையைக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கட்டத்தில் தட்டச்சு செய்யவும். ஏதேனும் சந்தேகம் இருந்தால் "HINT"– ஐ சொடுக்கவும்.

படி – 4 விடை சரியாக இருப்பின் "GREAT JOB" என்று திரையில் தோன்றும். தவறாக இருப்பின் "Try Again!" என்று தோன்றும். 5 கணக்குகளைத் தொடர்ந்து சரியாகச் செய்யும் வரை திரும்ப திரும்ப புதிய கணக்குகளைச் செய்து கற்கவும்

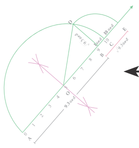
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

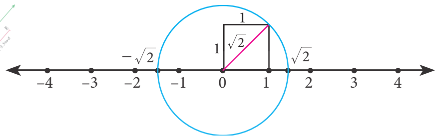
கணங்களின் சேர்ப்பு : https://www.geogebra.org/m/ufxdh47G

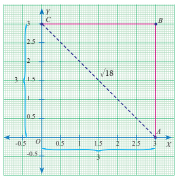
B563_9_MAT_TM_T3

1-SET LANGUAGE_TM_T1.indd 42 26-12-2019 13:04:13

2







மெய்யெண்கள்

பொதுவாகக் கணக்கீட்டில் மக்களுக்கு எது தேவையாக உள்ளது எனக் கருதும்போது, அதை நான் எப்பொழுதும் ஓர் எண்ணாகவே கண்டறிந்தேன். – அல் ஃவாரிஷ்மி

அல் ஃவாரிஷ்மி
(கி.பி (பொ.ஆ) 780 - 850)

அல் ஃவாரிஷ்மி (Al khwarizmi) என்ற பாரசீகக் கணித மேதைதான் கணிதத்தில் குறிப்பிடும்படியாக, முறுடுகள் (surdus) என்ற சிறப்பு மிக்க கருத்தினை அடையாளம் கண்டார். விகிதமுறா எண்களை அவர் 'காதுகேளாமை' (inaudible) என்ற பொருளில் குறிப்பிட்டார். பின்னர் அது இலத்தீன் மொழியில் சர்டஸ் (surdus) என மொழி பெயர்க்கப்பட்டது. கணிதத்தில் ஒரு மூலத்தை விகிதமுறு எண்ணாக எழுத இயலவில்லை எனில், அது முறுடு (surd) அல்லது முருட்டெண் அல்லது விகிதமுறா மூலம் எனப்படும்.

CI4CFL

கற்றல் விளைவுகள்

- இரு விகிதமுறு, எண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் இருப்பதை அறிதல்.
- விகிதமுறு, விகிதமுறா எண்களை எண் கோட்டில் குறித்தல் மற்றும் அவற்றை. தசம வடிவில் குறிப்பிடுதல்.
- மெய்யெண்களை எண் கோட்டில் காணுதல்.
- முறுடுகளை அடையாளம் காணுதல்.
- முறுடுகளில் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், மற்றும் வகுத்தல் போன்ற அடிப்படைச் செயல்களைச் செய்து பார்த்தல்.
- முறுடுகளின் பகுதியை விகிதப்படுத்துதல்.
- அறிவியல் குறியீடுகளைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.

2.1 அறிமுகம்

எங்கெங்கு காணினும் எண்கள்.

★ உங்கள் வீட்டில் தொலைபேசி உள்ளதா? அத்தொலைபேசியில் உள்ள இலக்கங்கள் எத்தனை?

★ உங்கள் பகுதியின் அஞ்சலகக் குறியீட்டு எண் என்ன? அது எவ்வாறு பயனுள்ளதாக இருக்கும்?

★ வண்டிகளை நிறுத்துமிடத்தில் அடையாள வில்லை வாங்கியுள்ளீர்களா? அதன் நோக்கம் என்ன?

2-Real Numbers_TM.indd 43 26-12-2019 13:08:43

★ நீங்கள் 24 கேரட் தங்கத்தைக் கையாண்டிருக்கிறீர்களா? அதன் தரத்தினை எவ்வாறு முடிவு செய்வாய்?

★ உன் கண்ணாடியின் பார்வைத் திறன் அளவு எவ்வளவு?

★ உங்கள் வீட்டிலுள்ள மேல்நிலை நீர்த்தொட்டியின் கொள்ளளவு எவ்வளவு?

★ உனது நண்பனுக்குக் காய்ச்சலா? அவரது உடலின் வெப்பநிலை எவ்வளவு?

எண்களின் பல்வேறு வகைகள் பற்றி இதுவரை நீங்கள் அறிந்ததை விரிவுபடுத்தி அறியவேண்டிய நேரம் இது.

2.2 விகிதமுறு எண்கள் (Rational Numbers)

உங்கள் வீட்டு நிலைப்பேழையில் உள்ள நூல்களை எண்ணும்போது 1,2,3.... என எண்ணத் தொடங்குவீர்கள். இந்த 1, 2, 3 ... ஆகியன இயல் எண்கள் எனப்படும். அவற்றை எண்கோட்டில் குறிப்பிடுவதைப் பற்றி நீங்கள் முன்பே அறிந்துள்ளீர்கள். (படம். 2.1ஐப் பார்க்க).

படம் 2.1

இயல் எண்களின் கணத்தை நாம் $\mathbb{N}$ என்று குறிப்பிடுவோம். இக்கணமானது

$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$ என்பதாகும்.

நிலை பேழையில் எந்த நூலும் இல்லை என்பதை வேறு முறையில் இங்குள்ள நூல்களின் எண்ணிக்கை 0 எனக் குறிக்கப்படுகிறது. எனவே, பூச்சியத்தை ஓர் உறுப்பாகக் கொண்ட 0, 1, 2, 3 ... என்ற எண்களை முழு எண்கள் என்கிறோம். இந்தப் புதிய எண் 0 ஐ இயல் எண்ணுடன் சேர்த்து எண் கோட்டைப் பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

படம் 2.2

முழு எண்களின் கணத்தை நாம் $\mathbb{W}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$$\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

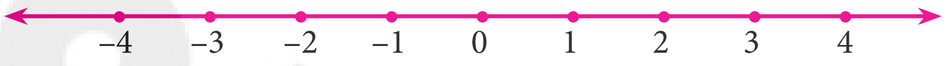
சில செயல்பாடுகள் மேலும், பல வகையான எண்களுக்கு வழிகோலுகிறது. அதாவது மிகை, முன்னோக்கி, மேலே, ஏறுவரிசை மற்றும் அதிகமாகும் என்பவை (+) எனக் குறிக்கப்படும். அதேபோல் குறைவான, பின்னோக்கி, கீழே, இறங்கு வரிசை மற்றும் குறைவாகும் என்பவை (–) என்று குறிக்கப்படும்.

2-Real Numbers_TM.indd 44 26-12-2019 13:08:44

இனி நீங்கள் இயல் எண்களை மிகை எண்களாக எடுத்துக்கொள்ளலாம். அவற்றை மிகை முழுக்கள் என மறு பெயரிடலாம். இதன் மூலம் நீங்கள் குறை எண்கள் $-1, -2, -3, \ldots$ –க்கு வழிவகுத்துள்ளீர்கள்.

இங்கு -2 என்பது -1 ஐ விட அதிகக் குறை மதிப்புடையது. எனவே -1 மற்றும் -2 ஆகிய இவற்றுள் -2 சிறியது மற்றும் -1 பெரியது ஆகும் எனில் $-2,-1$ ஐவிட -3 பெரிய எண்ணா? அல்லது சிறிய எண்ணா? என்று சிந்திக்கவும்.

இவ்வேளையில் எண்கோட்டை இவ்வாறு குறிப்பிடலாம்.



படம் 2.3

முழுக்களின் கணத்தை நாம் $\mathbb{Z}$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}.$$

மேற்கண்ட படத்தைப் (படம் 2.2 மற்றும் 2.3) பார்க்கும்போது அடுத்தடுத்துள்ள இரு முழுக்களுக்கிடையே உள்ள இடைவெளி வியப்பிற்குரியது. அந்த இடைவெளியில் ஏதாவது எண்கள் இருக்குமா?

பின்ன எண்களைப் பற்றி முன்பே நீங்கள் அறிந்திருப்பீர்கள். $\mathbb{Z}$ இன் எண் கோட்டில் எவ்வாறு $\frac{1}{2}$ என்ற புள்ளியை நீ குறிப்பாய்?. இது சரியாக 0–க்கும், 1–க்கும் இடையேயுள்ள மையப் புள்ளி ஆகும். இதைப் போலவே நீங்கள் $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 2\frac{3}{4}$ ... போன்ற புள்ளிகளையும் குறிக்கலாம். இவையெல்லாம் $\frac{a}{b}$ வடிவத்தில் உள்ள பின்னங்கள், இதில் a மற்றும் b முழுக்களாகும். மேலும் $b \neq 0$ (ஏன்?) என்ற ஒரு வரம்புடன் இருக்கும். பின்னங்கள் தசம வடிவில் இருந்தாலும் இந்த அமைப்பு மாறாது.

பின்னங்களுக்கும் நீளங்களின் விகிதங்களுக்கும் உள்ள தொடர்பினால் இவ்வெண்கள் விகிதமுறு எண்கள் எனப்படுகின்றன. இச்சூழலுக்கான மாதிரி வரைபடம் (படம் 2.4) பின்வருமாறு:

படம் 2.4

ஒரு விகிதமுறு எண் என்பது இரு முழுக்களின் பின்ன வடிவத்தின் ஈவு ஆகும். இதைப் பூச்சியத்தால் வகுத்தலை மட்டும் தவிர்க்க வேண்டும்.

ஒரு பின்னத்திற்கு இணையான பல்வேறு சமானப் பின்னங்கள் இருக்குமென்பதால், ஒரு விகிதமுறு எண்ணிற்குப் பல வடிவங்கள் (Forms) இருக்க வாய்ப்புண்டு. எனவே $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{8}{24}$ இவை அனைத்தும் ஒரே விகிதமுறு எண்ணையே குறிக்கும்.

2-Real Numbers_TM.indd 45 26-12-2019 13:08:45

2.2.1 விகிதமுறு எண்களின் அடர்த்திப் பண்பு (Denseness Property of Rational Numbers)

a, b என்பன இரு விகிதமுறு எண்கள் மேலும் $a > b$ என்போம். $\frac{a+b}{2}$ என்பது அதன் சராசரியாகும். இந்தக் கூட்டுச் சராசரி ஒரு விகிதமுறு எண்ணா எனக் காண்போம்.

$a = \frac{p}{q}$ (p, q முழுக்களாகும் மற்றும் $q \neq 0$); $b = \frac{r}{s}$ (r, s முழுக்களாகும் மற்றும் $s \neq 0$), எனில்,

$\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}{2} = \frac{ps+qr}{2qs}$ இது ஒரு விகிதமுறு எண்.

இது a மற்றும் b–க்கு இடையேயுள்ளது என மெய்ப்பிக்க வேண்டும்.

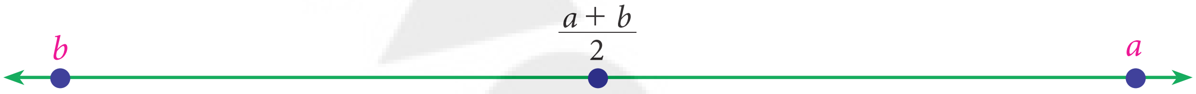
$a - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{2a-a-b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$ ஏனெனில் $a>b$.

ஆகையால், $a > \left(\frac{a+b}{2}\right)$ ... (1)

$\left(\frac{a+b}{2}\right) - b = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2} > 0$ ஏனெனில் $a>b$.

ஆகையால், $\left(\frac{a+b}{2}\right) > b$ ... (2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து $a > \left(\frac{a+b}{2}\right) > b$, எனக் காணலாம்.



படம் 2.5

எனவே, எந்த இரு விகிதமுறு எண்களுக்கும் அதன் சராசரி அல்லது மையப்புள்ளி ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருக்கும். இச்செயலைப் பலமுறை தொடர்ந்து செய்தால் இரு எண்களுக்கிடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்களை உருவாக்க இயலும். எனவே எந்த இரு விகிதமுறு எண்களுக்கும் இடையே எண்ணற்ற விகிதமுறு எண்கள் அமைந்துள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ இவற்றிற்கிடையே எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு 1 $\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள ஒரு விகித முறு எண்

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3+4}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{7}{12}$

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{7}{12}$ இவற்றிற்கிடையே உள்ள ஒரு விகித முறு எண்

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6+7}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right) = \frac{13}{24}$

எனவே $\frac{1}{2}$ –க்கும் $\frac{2}{3}$ -க்கும் இடையே உள்ள இரண்டு விகிதமுறு எண்கள் $\frac{7}{12}$ மற்றும் $\frac{13}{24}$ ஆகும். (இதைப்போல் பல எண்கள் உள்ளன)

இரு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையேயுள்ள விகிதமுறு எண்ணை உடனடியாகக் காண வாய்ப்பு உள்ளது.

2-Real Numbers_TM.indd 46 26-12-2019 13:08:48

முடிவு

$\frac{p}{q}$ மற்றும் $\frac{r}{s}$ என்பன $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ என்றவாறு உள்ள இரு விகிதமுறு எண்கள் எனில் $\frac{p+r}{q+s}$ என்ற விகிதமுறு எண் $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$ என்றவாறு அமையும்.

எடுத்துக்காட்டாக $\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ என்ற எண்களுக்கிடையே உள்ள எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு 2

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ என்பது $\frac{1}{2} < \frac{1+2}{2+3} < \frac{2}{3}$ அல்லது $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ என்பது $\frac{1}{2} < \frac{1+3}{2+5} < \frac{3}{5} < \frac{3+2}{5+3} < \frac{2}{3}$ அல்லது $\frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$

தீர்வு 3

வேறு ஏதேனும் புதிய முறைகள் இதற்கு உண்டா? ஆம். தசம எண் வடிவம் உங்களுக்குப் பிடிக்கும் என்றால், மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டை வேறு முறையிலும் தீர்க்க முடியும் என்பதைக் காணலாம்.

$$\frac{1}{2} = 0.5 \text{ மற்றும் } \frac{2}{3} = 0.66...$$

$\frac{1}{2}$ மற்றும் $\frac{2}{3}$ –க்குமிடையே உள்ள விகிதமுறு எண்களை இவ்வாறாகப் பட்டியலிடலாம். 0.51, 0.57, 0.58, …

தீர்வு 4

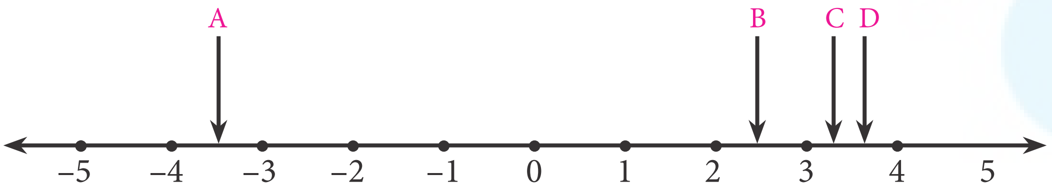
இது போன்ற கணக்குகளைத் தீர்ப்பதற்கு மேலும் ஓர் எளிய வழிமுறையைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{4}{9}$ மற்றும் $\frac{3}{5}$ என்ற எண்களுக்கிடையே நான்கு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க., 9 மற்றும் 5 இன் மீ.சி.ம. 45 ஆகும். அதனால், $\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$ மற்றும் $\frac{3}{5} = \frac{27}{45}$ என எழுதலாம்.

$\frac{4}{9}$ மற்றும் $\frac{3}{5}$ என்ற எண்களுக்கிடையே உள்ள விகிதமுறு எண்கள். $\frac{21}{45}, \frac{22}{45}, \frac{23}{45}, \frac{24}{45}, \ldots$

பயிற்சி 2.1

1. $\frac{11}{3}$ ஐ மிகச் சரியாகக் காட்டும் அம்புக்குறி எது?



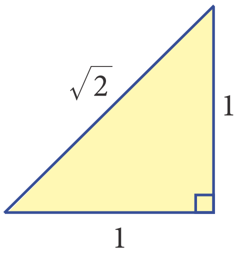
2-Real Numbers_TM.indd 47
26-12-2019 13:08:52

2. $\frac{-7}{11}$ மற்றும் $\frac{2}{11}$ என்ற எண்களுக்கிடையே எவையேனும் மூன்று விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

3. பின்வரும் எண் இணைகளுக்கு இடையே எவையேனும் ஐந்து விகிதமுறு எண்களைக் காண்க. (i) $\frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{1}{5}$ (ii) 0.1 மற்றும் 0.11 (iii) -1 மற்றும் -2

2.3 விகிதமுறா எண்கள் (Irrational Numbers)

எண் கோட்டில் ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணிற்கும் அதற்குரிய புள்ளி ஒன்று உள்ளது என்பதையும், விகிதமுறு எண்களின் அடர்த்திப் பண்பினைப் பற்றியும் நீங்கள் முன்பே அறிந்துள்ளீர்கள். எண் கோட்டில் உள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளும் விகிதமுறு எண்களால் நிரப்பப்பட்டுள்ளனவா? மற்றும் வேறு எவையேனும் எண்களுக்கான புள்ளிகள் உள்ளனவா என்பதை நாம் ஆராய்வோம்.



படம் 2.6

ஓர் அலகு அளவுகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்ட ஓர் இருசமபக்கச் செங்கோண முக்கோணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி அதன் கர்ணத்தின் நீளத்தை $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ (படம் 2.6) எனக் காணலாம். கிரேக்கர்கள் $\sqrt{2}$ ஐ ஒரு முழு எண்ணுமல்ல, சாதாரணப் பின்னமும் அல்ல எனக் கண்டுபிடித்தனர். எண்கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளுக்கும் எண்களுக்குமான தொடர்பு பற்றிய நம்பிக்கை இதனால் தகர்ந்தது. $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனப்படும்.

இரு முழுக்களை விகிதமாக எழுத இயலாத எண்களே விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்,

1. $\sqrt{2}$ ஐத் தவிர, அதைப்போன்ற எண்ணற்ற விகிதமுறா எண்களை உருவாக்கலாம்.

   எடுத்துக்காட்டாக: $\sqrt{5}\,,\ \sqrt{7}\,,\ 2\sqrt{3}\,,\ldots$

2. π என்பது ஒரு வட்டத்தின் சுற்றளவிற்கும், அதன் விட்டத்திற்கும் உள்ள விகிதம் ஆகும். இது விகிதமுறா எண்ணிற்கு மேலும் ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும்.

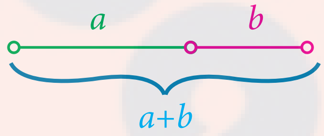
3. e என்பது ஆய்லரின் எண் என அறியப்படும். இதுவும் விகிதமுறா எண்ணிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும்.

4. தங்க விகிதம் என்பது தங்க சராசரி அல்லது தங்கப் பிரிவு எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. ஐங்கோணம், ஐங்கரம், தசம கோணம், பன்னிருமுகி போன்ற எளிய வடிவியல் தூரங்களின் விகிதங்களைக் கணக்கிடத் தடுமாறும்போது தங்க விகிதம் பயன்படுகிறது. இதுவும் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும்.

தங்க விகிதம் (1 : 1.6)

தங்க விகிதம் என்பது கலை மற்றும் கட்டடக் கலையில் சிறந்த அற்புத விகிதமாகப் போற்றப்படுகிறது.

$(a+b)$ நீளமுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டினை இரு துண்டுகளாக (a மற்றும் b) பிரிக்கவும். அவ்வாறு பிரிக்கும்போது, $(a+b)$-க்கும் a-க்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் a-க்கும் b-க்கும் இடையேயுள்ள விகிதத்திற்கு சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.



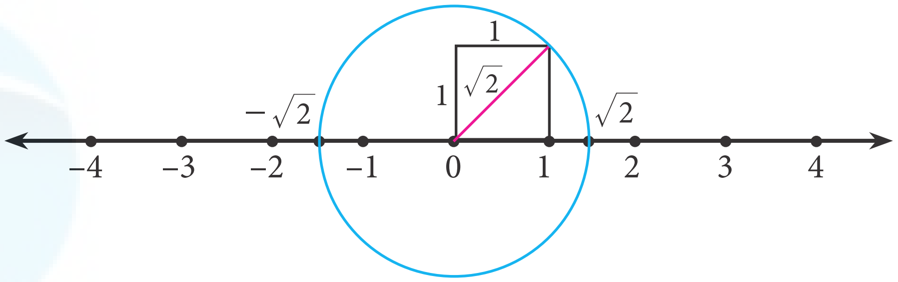
$a+b : a = a : b$

இதை விகிதச் சமமாகக் கூறலாம். $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$

இங்கு a என்பது $a+b$ மற்றும் b இன் வடிவியல் சராசரி ஆகும்.

2-Real Numbers_TM.indd 48 26-12-2019 13:08:53

2.3.1 எண் கோட்டில் விகிதமுறா எண்கள் (Irrational Numbers on the Number Line)



படம் 2.7

விகிதமுறா எண்களுக்குரிய புள்ளிகள் எண் கோட்டில் எங்குள்ளன?

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{2}$ ஐ எண் கோட்டில் குறிப்போம். இது எளிது.

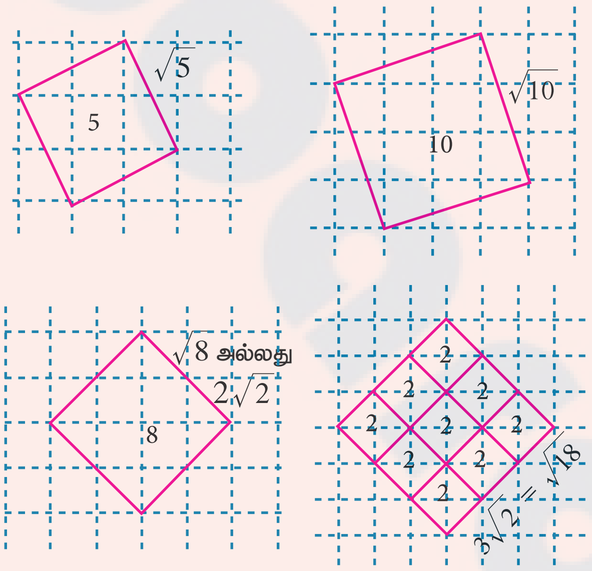
$\sqrt{2}$ என்பது ஓரலகு நீளமுடைய பக்கங்களைக் கொண்ட சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் நீளம் என்பதை நினைவில் கொள்க. (எப்படி?) இந்த அளவில் ஓர் எளிய சதுரத்தை வரைந்து அதன் மூலைவிட்டத்தை எண் கோட்டில் குறிக்கும் முறையைக் (படம் 2.7) காணலாம்.

எண் கோட்டில் 0 ஐ மையமாகவும், சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தை ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. அது எண் கோட்டை இரு புள்ளிகளில் வெட்டும். 0 விற்கு வலப்புறமாக $\sqrt{2}$ வையும் இடப்புறமாக $-\sqrt{2}$ வையும் வெட்டும் புள்ளிகளில் குறிப்பிடவும். ($\sqrt{2}$ ஐக் குறிக்கத் துவங்கி மேலும் $-\sqrt{2}$ ஐயும் குறித்தாகி விட்டது)

இயல் எண்ணில் துவங்கி விகிதமுறு எண்கள் வரை விரிவுபடுத்தி, விகிதமுறா எண்களையும் அறிந்துள்ளோம். இதற்கு மேலும் எண் கோட்டை விரிவுபடுத்தி, வேறு எண்களைக் காண முடியுமா? ஆம். அவற்றை உயர் வகுப்புகளில் கற்கலாம். விகிதமுறு எண்களை முடிவுறு மற்றும் முடிவுறாத் தசம வடிவங்களாகக் குறிப்பது விகிதமுறா எண்களைப் புரிந்துகொள்வதற்கு உதவியாக இருக்கும். நாம் விகிதமுறு எண்களின் தசம வடிவத்தைக் காண்போம்.

வரைபடத் தாளில் சதுரங்களை வரைந்து தேவையான அளவில் விகிதமுறா எண்களை உருவாக்கலாம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகள்



2.3.2 விகிதமுறு எண்ணின் தசம வடிவம் (Decimal Representation of a Rational Number)

ஒரு விகிதமுறு எண்ணைப் பின்னமாக எழுதினால், அதன் தசம வடிவை நீள்வகுத்தல் முறையில் பெறலாம். கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளில் எப்போதும் மீதி 0 வருவதைக் காணுங்கள்:

2-Real Numbers_TM.indd 49
26-12-2019 13:08:54

எடுத்துக்காட்டு,

$$\begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.000 \\ & 64 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\frac{7}{8} = 0.875$

$$\begin{array}{r|l} & 0.84 \\ \hline 25 & 21.00 \\ & 200 \\ \hline & 100 \\ & 100 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\frac{21}{25} = 0.84$

$$\begin{array}{r|l} & 2.71875 \\ \hline 32 & 87.00000 \\ & 64 \\ \hline & 230 \\ & 224 \\ \hline & 60 \\ & 32 \\ \hline & 280 \\ & 256 \\ \hline & 240 \\ & 224 \\ \hline & 160 \\ & 160 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\frac{-87}{32} = -2.71875$

குறிப்பு

இவற்றில் வகுத்தல் செயலானது ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையிலான தசம வடிவில் முடிவுறும். இவை முடிவுறு தசம எண்கள் எனப்படும்.

ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவுறாமல் இருக்கலாமா? கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகள் (பூச்சியமற்ற மீதிகள்) இது தொடர்பான தெளிவை நமக்கு அளிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.2

பின்வருவனவற்றைத் தசமவடிவில் எழுதுக. (i) $\frac{-4}{11}$ (ii) $\frac{11}{75}$

தீர்வு

$$\begin{array}{r|l} & 0.3636\ldots. \\ \hline 11 & 4.0000 \\ & 33 \\ \hline & 70 \\ & 66 \\ \hline & 40 \\ & 33 \\ \hline & 70 \\ & 66 \\ \hline & 4 \\ & \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 0.1466\ldots \\ \hline 75 & 11.0000 \\ & 7\,5 \\ \hline & 350 \\ & 300 \\ \hline & 500 \\ & 450 \\ \hline & 500 \\ & 450 \\ \hline & 50 \\ & \vdots \end{array}$$

குறிப்பு

இவற்றில் தசம விரிவானது முடிவு பெறவில்லை. மீதிவரும் எண்கள் மீண்டும் மீண்டும் வரும். இவ்வாறு முடிவுறாத ஆனால் சுழல் தன்மையுள்ள எண்கள் கிடைக்கின்றன.

எனவே, $\frac{-4}{11} = -0.\overline{36}$

$\frac{11}{75} = 0.14\overline{6}$

எனவே, ஒரு விகிதமுறு எண்ணானது,

(i) முடிவுறும் தசம விரிவாகவோ அல்லது

(ii) முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவாகவோ இருக்கும்.

இதன் மறுதலையும் உண்மையே. அதாவது, ஓர் எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவுற்றோ அல்லது முடிவுறாச் சுழல் தன்மையுடையதாகவோ இருந்தால் அவ்வெண் ஒரு விகிதமுறு எண் ஆகும்.

2-Real Numbers_TM.indd 50 26-12-2019 13:08:55

2.3.3 தசமங்களின் காலமுறைமை (Period of Decimal)

விகிதமுறு எண்களின் தசமவிரிவில் உள்ள சுழல் தன்மையுடைய இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையே அவ்விகிதமுறு எண்ணின் தசமங்களின் கால முறைமை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\frac{25}{7} = 3.\overline{571428}$

இதன் கால முறைமை $= 6$

(ii) $\frac{27}{110} = 0.2\overline{45}$

இதன் கால முறைமை $= 2$

இயல் எண்களின் தலைகீழிகள் விகிதமுறு எண்களே. அவற்றின் தசம வடிவங்கள் ஆர்வமூட்டுபவை. அவற்றின் முதல் பத்து எண்களைக் காண்போம்.

வ.எண்	தலைகீழி	தசம எண்ணின் தன்மை
1	$\frac{1}{1} = 1.0$	முடிவுறும்
2	$\frac{1}{2} = 0.5$	முடிவுறும்
3	$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$	முடிவுறாச் சுழல்
4	$\frac{1}{4} = 0.25$	முடிவுறும்
5	$\frac{1}{5} = 0.2$	முடிவுறும்
6	$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$	முடிவுறாச் சுழல்
7	$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$	முடிவுறாச் சுழல்
8	$\frac{1}{8} = 0.125$	முடிவுறும்
9	$\frac{1}{9} = 0.\overline{1}$	முடிவுறாச் சுழல்
10	$\frac{1}{10} = 0.1$	முடிவுறும்

எடுத்துக்காட்டு 2.3

$\frac{1}{3}$ இன் சுழல் தசம விரிவைப் பயன்படுத்தி $\frac{1}{27}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணின் சுழல் தன்மையுள்ள தசம விரிவைக் காண்க. இதைப் பயன்படுத்தி $\frac{59}{27}$ இன் சுழல் தசம விரிவைக் காண்க.

தீர்வு

$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$

$\frac{1}{27} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{9} \times 0.333... = 0.037037... = 0.\overline{037}$

$\frac{59}{27} = 2\frac{5}{27} = 2 + \frac{5}{27} = 2 + \left(5 \times \frac{1}{27}\right)$

$= 2 + (5 \times 0.\overline{037}) = 2 + (5 \times 0.037037037...)$

$= 2 + 0.185185... = 2.185185... = 2.\overline{185}$

2.3.4 முடிவுறு தசம எண்களை விகிதமுறு எண்களாக மாற்றுதல் (Conversion of Terminating Decimals into Rational Numbers)

முடிவுறு தசம எண்ணான 2.945ஐ விகிதமுறு எண்ணாகப் பின்ன வடிவத்தில் மாற்ற முயல்வோம்.

$2.945 = 2 + 0.945 = 2 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000}$

$= 2 + \frac{900}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{5}{1000}$ (பகுதியைப் பொதுவானதாக்குக)

$= 2 + \frac{945}{1000} = \frac{2945}{1000}$ அல்லது $\frac{589}{200}$

(மேற்காணும் கணக்கில் நேரடியாக $2.945 = \frac{2945}{1000}$ என எழுத இயலுமா?)

எடுத்துக்காட்டு 2.4 கீழ்க்காணும் தசம எண்களை $\frac{p}{q}$ (p மற்றும் q முழுக்களாகும் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் மாற்றுக:

(i) 0.35 (ii) 2.176 (iii) – 0.0028

தீர்வு

(i) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ (ii) $2.176 = \frac{2176}{1000} = \frac{272}{125}$

(iii) $-0.0028 = \frac{-28}{10000} = \frac{-7}{2500}$

2.3.5 முடிவுறாச் சுழல் தசம எண்ணை விகிதமுறு எண்களாக மாற்றுதல் (Conversion of Non-terminating and recurring decimals into Rational Numbers)

முடிவுறு தசம எண்ணைக் கையாளுவது எளிது. 2.4ஐப் போன்ற தசம எண் வரும்போது அதில் உள்ள தசமப் புள்ளியை நீக்க அந்த எண்ணை 10ஆல் வகுக்க வேண்டும். அதாவது, $2.4 = \frac{24}{10}$, இதைச் சுருக்கினால் $\frac{12}{5}$ கிடைக்கும். ஆனால், அதே தசம எண் $2.\overline{4}$, என இருந்தால், இங்கு எண்ணற்ற "4" வருவதால் பின்னத்தின் பகுதியில் எண்ணற்ற பூச்சியங்கள் வரும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$2.4 = 2 + \frac{4}{10}$$
$$2.44 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100}$$
$$2.444 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000}$$
$$\vdots$$

எண்ணற்ற "4" களைக் கொண்டு இக்கணக்கைக் கையாளுவது கடினம். இவ்வாறு எண்ணற்ற முடிவுறாத் தொடர்கள் வருவதிலிருந்து எவ்வகையிலாவது நாம் விடுபட வேண்டும். இத்தொடரிலிருந்து ஒன்று, இரண்டு, மூன்று அல்லது நான்கு உறுப்புகளை நீக்கினாலும் அத்தொடரோ, அதன் மதிப்போ மாறாது. அதே முடிவுறாத் தொடராக அது அமையும்.

$x = 2.\overline{4}$ ...(1)

$10x = 24.\overline{4}$ ...(2) [இதை 10 ஆல் பெருக்கும்போது தசமப் புள்ளி ஓர் இலக்கம் வலப்பக்கம் நகர்ந்தாலும் இன்னமும் 4 என்ற எண் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உள்ளது).

(2) இலிருந்து (1) ஐக் கழிக்க,

$9x = 24.\overline{4} - 2.\overline{4} = 22$ (முடிவுறா 4 இலிருந்து முடிவுறா 4 ஐக் கழிக்க)

$9x = 22$ ($24 - 2 = 22$)

$x = \frac{22}{9}$ தேவையான மதிப்பு ஆகும்.

இதே முறையைப் பின்பற்றி எந்த ஒரு முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவையும் பின்னமாக மாற்றலாம்.

2-Real Numbers_TM.indd 52 26-12-2019 13:09:01

எடுத்துக்காட்டு 2.5 கீழ்க்காணும் தசம எண்களை $\frac{p}{q}(p,q \in Z$ மற்றும் $q \neq 0)$ வடிவில் மாற்றுக.

(i) $0.\overline{3}$ (ii) $2.\overline{124}$ (iii) $0.4\overline{5}$ (iv) $0.5\overline{68}$

தீர்வு

(i) $x = 0.\overline{3} = 0.3333\ldots$ என்க (1)

(இங்கு கால முறைமை = 1 எனவே, (1) ஐ 10 ஆல் பெருக்குக)

$10\,x = 3.3333...$ (2)

(2) – (1): $9\,x = 3$ அல்லது $x = \frac{1}{3}$

(ii) $x = 2.\overline{124} = 2.124124124\ldots$ (1)

(இங்கு தசமங்களின் கால முறைமை 3 தசம புள்ளிக்கு அடுத்துள்ள மூன்று இலக்கங்களைக் குறிக்கும். எனவே (1) ஐ 1000–ஆல் பெருக்குக.)

$1000\,x = 2124.124124124\ldots$ (2)

(2)–(1): $999\,x = 2122$ $x = \frac{2122}{999}$

(iii) $x = 0.4\overline{5} = 0.45555\ldots$ (1)

(இங்கு (1) ஐ 10–ஆல் பெருக்குக.)

$10\,x = 4.5555\ldots$ (2)

(இங்கு தசமங்களின் கால முறைமை 1, எனவே (2) ஐ 10 ஆல் பெருக்குக.)

$100\,x = 45.5555\ldots$ (3)

(3) – (2): $90\,x = 41$ மற்றும் $x = \frac{41}{90}$

(iv) $x = 0.5\overline{68} = 0.5686868\ldots$ (1)

(இங்கு (1) ஐ 10–ஆல் பெருக்குக.)

$10\,x = 5.686868\ldots$ (2)

(இங்கு தசமங்களின் கால முறைமை 2, எனவே (2) ஐ 100–ஆல் பெருக்குக.)

$1000\,x = 568.686868\ldots$ (3)

(3) – (2): $990\,x = 563$ அல்லது $x = \frac{563}{990}$.

2-Real Numbers_TM.indd 53 26-12-2019 13:09:03

குறிப்பு

(i) ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் தசம வடிவம் முடிவுறு தசம விரிவா அல்லது முடிவுறா தசம விரிவா என்பதைக் கீழ்க்காணும் விதியைப் பயன்படுத்தி அறியலாம்.

(ii) ஒரு விகிதமுறு எண் $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ ஐ $\frac{p}{2^m \times 5^n}$ என்ற வடிவில் எழுத இயலும், இங்கு $p \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $m, n \in \mathbb{W}$, எனில் கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசம எண்ணாக இருக்கும். அவ்வடிவில் எழுத இயலவில்லை எனில் அது முடிவுறாச் சுழல் தன்மையுடைய தசம விரிவாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.6

வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல் கீழ்க்காணும் எண்களின் தசம விரிவு முடிவுறு அல்லது முடிவுறாச் சுழல் தன்மையுடையன என வகைப்படுத்துக:

(i) $\frac{13}{64}$ (ii) $\frac{-71}{125}$ (iii) $\frac{43}{375}$ (iv) $\frac{31}{400}$

தீர்வு

(i) $\frac{13}{64} = \frac{13}{2^6}$ எனவே, $\frac{13}{64}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(ii) $\frac{-71}{125} = \frac{-71}{5^3}$ எனவே, $\frac{-71}{125}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்..

(iii) $\frac{43}{375} = \frac{43}{3^1 \times 5^3}$ எனவே, $\frac{43}{375}$ என்பது முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்.

(iv) $\frac{31}{400} = \frac{31}{2^4 \times 5^2}$ எனவே, $\frac{31}{400}$ என்பது முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும்..

எடுத்துக்காட்டு 2.7

சரிபார்க்க $1 = 0.\overline{9}$

தீர்வு

$x = 0.\overline{9} = 0.99999\ldots$ (1)

(சமன்பாடு (1) ஐ 10 ஆல் பெருக்க)

$10x = 9.99999\ldots$ (2)

(2) இலிருந்து (1) ஐக் கழிக்கவும்

$9x = 9$ அல்லது $x = 1$

$0.\overline{9} = 1$

$1 = 0.9999\ldots$

$7 = 6.9999\ldots$

$3.7 = 3.6999\ldots$

இவ்வடிவத்திலிருந்து, எந்தவொரு முடிவுறு தசம விரிவையும் முடிவுறாத் தசம விரிவாக "9" களின் தொகுப்புகளாக எழுத இயலும் என்பதை அறியலாம்.

2-Real Numbers_TM.indd 54 26-12-2019 13:09:08

பயிற்சி 2.2

1. கீழ்க்காணும் விகிதமுறு எண்களைத் தசம எண்ணாக மாற்றி அது எவ்வகைத் தசம விரிவு என்பதையும் கூறுக:

   (i) $\frac{2}{7}$ (ii) $-5\frac{3}{11}$ (iii) $\frac{22}{3}$ (iv) $\frac{327}{200}$

2. $\frac{1}{13}$ ஐத் தசம வடிவில் எழுதுக. அதன் தசம எண்ணின் காலமுறைமையைக் காண்க?

3. $\frac{1}{11}$ இன் தசம விரிவைப் பயன்படுத்தி $\frac{1}{33}$ இன் சுழல் தசம விரிவைக் காண்க. இதிலிருந்து $\frac{71}{33}$ தசம விரிவைத் தருவிக்க.

4. கீழ்க்காணும் தசம விரிவுகளை விகிதமுறு எண்ணாக எழுதுக?

   (i) $0.\overline{24}$ (ii) $2.\overline{327}$ (iii) -5.132
   (iv) $3.1\overline{7}$ (v) $17.2\overline{15}$ (vi) $-21.213\overline{7}$

5. வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல், பின்வருவனவற்றுள் எவை முடிவுறு தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும் எனக் கண்டுபிடிக்க.

   (i) $\frac{7}{128}$ (ii) $\frac{21}{15}$ (iii) $4\frac{9}{35}$ (iv) $\frac{219}{2200}$

2.3.6 தசம விரிவுகளைக் கொண்டு விகிதமுறா எண்களை அடையாளம் காணுதல் (Decimal Representation to Identify Irrational Numbers)

விகிதமுறா எண்களைத் தசம வடிவில் எழுதும்போது அவை முடிவுறாமலும், சுழல் தன்மை இல்லாமலும் இருப்பதை நாம் காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக, π இன் தசம விரிவானது 3.14159265358979... எனத் தொடங்கி, சுழல் தன்மையற்றதாகவும், π இன் மதிப்பைத் துல்லியமாகக் கூற முடியாததாகவும் உள்ளது.

கீழ்க்காணும் தசம விரிவுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(i) 0.1011001110001111… (ii) 3.012012120121212…

(iii) 12.230223300222333000… (iv) $\sqrt{2}$ = 1.4142135624…

மேற்காணும் தசம விரிவுகள் முடிவுறு தன்மையுடையதா அல்லது முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையுடையதா? இல்லை... அவை முடிவுறவுமில்லை, முடிவுறா சுழல் தன்மை உடையனவுமில்லை. எனவே, அவை விகிதமுறு எண்கள் அல்ல. அவற்றை $\frac{p}{q}$, ($p, q, \in \mathbb{Z}$ மேலும் $q \neq 0$) வடிவில் எழுத இயலாது. அவை விகிதமுறா எண்களாகும்.

முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவைப் பெற்றிருக்கும் எண்கள் விகிதமுறா எண்கள் ஆகும்

2-Real Numbers_TM.indd 55 26-12-2019 13:09:10

எடுத்துக்காட்டு 2.8

$\sqrt{3}$ இன் தசம விரிவைக் காண்க.

தீர்வு

	1.7320508…
1	3.00,00,00,00,00,…
	1
27	200
	189
343	1100
	1029
3462	7100
	6924
346405	1760000
	1732025
34641008	279750000
	277128064
	2621936

$\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\pi = 3.141$, போன்றவற்றை அடிக்கடிப் பயன்படுத்துவோம். அவை தோராயமான மதிப்பே, துல்லியமான மதிப்பல்ல. π இன் மதிப்பை $\frac{22}{7}$ $(3.\overline{142857})$ என நாம் அடிக்கடி அதன் மதிப்பாகப் பயன்படுத்துகிறோம். உண்மையில் அவை தோராயமான மதிப்பேயாகும். ஏனெனில் விகிதமுறா எண்களின் தசம விரிவானது முடிவுறா மற்றும் சுழல் தன்மையற்றது. அவற்றுக்குத் துல்லியமான மதிப்பு இல்லை.

எனவே, நீள் வகுத்தல் முறைப்படி, $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$

மேலும் முழு வர்க்கமற்ற மிகை எண்களின் வர்க்கமூலம் அனைத்தும் விகிதமுறா எண்கள் எனக் கண்டறியப்பட்டுள்ளது. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots$ அனைத்தும் விதிமுறா எண்களே.

எடுத்துக்காட்டு 2.9

கீழுள்ளவற்றை விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்களாக வகைப்படுத்துக.

(i) $\sqrt{10}$ (ii) $\sqrt{49}$ (iii) 0.025 (iv) $0.7\overline{6}$ (v) 2.505500555... (vi) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

தீர்வு

(i) $\sqrt{10}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (ஏனெனில் 10 ஒரு முழுவர்க்க எண் அல்ல).

(ii) $\sqrt{49} = 7 = \frac{7}{1}$, ஒரு விகிதமுறு எண் (49 ஒரு முழு வர்க்க எண்).

(iii) 0.025 ஒரு விகிதமுறு எண் (இது ஒரு முடிவுறு தசம எண்).

(iv) $0.7\overline{6} = 0.7666\ldots$. ஒரு விகிதமுறு எண் (இது ஒரு முடிவுறாச் சுழல் தசம எண்).

(v) 2.505500555…. ஒரு விகிதமுறா எண் (இது முடிவுறாச் சுழல் தன்மையற்ற தசம எண்)

(vi) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ஒரு விகிதமுறா எண் (2 ஒரு முழு வர்க்க எண் அல்ல).

எடுத்துக்காட்டு 2.10

0.12 மற்றும் 0.13 என்ற எண்களுக்கு இடையே எவையேனும் மூன்று விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

0.12, 0.13 என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள 3 விகிதமுறா எண்கள் 0.12010010001…, 0.12040040004…, 0.12070070007…

குறிப்பு

எடுத்துக்காட்டு 2.9, (vi) இல் உள்ள முடிவைத் தவறுதலாக $\frac{p}{q}$ வடிவமாகக் கருதக்கூடாது. ஏனெனில் p மற்றும் q இரண்டும் முழுக்களாக இருக்க வேண்டுமேயொழிய விகிதமுறா எண்களாக இருக்கக்கூடாது.

2-Real Numbers_TM.indd 56 26-12-2019 13:09:12

குறிப்பு

நினைவில் வைத்திருக்க வேண்டிய ஒரு முக்கிய முடிவினை (மெய்ப்பின்றி) நாம் காண்போம்.

'a' ஒரு விகிதமுறு எண் மற்றும் $\sqrt{b}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், கீழ்க்காணும் அனைத்தும் விகிதமுறா எண்களே:

(i) $a+\sqrt{b}$; (ii) $a-\sqrt{b}$; (iii) $a\sqrt{b}$; (iv) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; (v) $\frac{\sqrt{b}}{a}$.

எடுத்துக்காட்டாக, விகிதமுறு எண் 4 மற்றும் விகிதமுறா எண் $\sqrt{5}$ ஐ எடுத்துக்கொண்டால்

$4+\sqrt{5}$, $4-\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{5}}{4}$ --- இவை எல்லாம் விகிதமுறா எண்களே.

எடுத்துக்காட்டு 2.11

0.5151151115, மற்றும் 0.5353353335... என்ற எண்களுக்கு இடையே எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட விகிதமுறா எண்களுக்கிடையே உள்ள இரு விகிதமுறு எண்கள் 0.5152 மற்றும் 0.5352 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.12

கீழ்க்கண்டவற்றுள் x மற்றும் y விகிதமுறு எண்களா அல்லது விகிதமுறா எண்களா எனக் காண்க.

(i) $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$; $x=a+b$, $y=a-b$

(ii) $a=\sqrt{2}+7$, $b=\sqrt{2}-7$; $x=a+b$, $y=a-b$

(iii) $a=\sqrt{75}$, $b=\sqrt{3}$; $x=ab$, $y=\frac{a}{b}$

(iv) $a=\sqrt{18}$, $b=\sqrt{3}$; $x=ab$, $y=\frac{a}{b}$

CID8H9

தீர்வு

(i) $a=2+\sqrt{3}, b=2-\sqrt{3}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x=a+b=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$, ஒரு விகிதமுறு எண்.

$y=a-b=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

(ii) $a=\sqrt{2}+7$, $b=\sqrt{2}-7$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x=a+b=(\sqrt{2}+7)+(\sqrt{2}-7)=2\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

$y=a-b=(\sqrt{2}+7)-(\sqrt{2}-7)=14$ ஒரு விகிதமுறு எண்.

(iii) $a=\sqrt{75}$, $b=\sqrt{3}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x=ab=\sqrt{75}\times\sqrt{3}=\sqrt{75\times 3}=\sqrt{5\times5\times3\times3}=5\times3=15$ ஒரு விகிதமுறு எண்.

$y=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{75}{3}}=\sqrt{25}=5$ ஒரு விகிதமுறு எண்.

2-Real Numbers_TM.indd 57 26-12-2019 13:09:14

(iv) $a = \sqrt{18}$, $b = \sqrt{3}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x = ab = \sqrt{18} \times \sqrt{3} = \sqrt{18 \times 3} = \sqrt{6 \times 3 \times 3} = 3\sqrt{6}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

$y = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} = \sqrt{6}$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

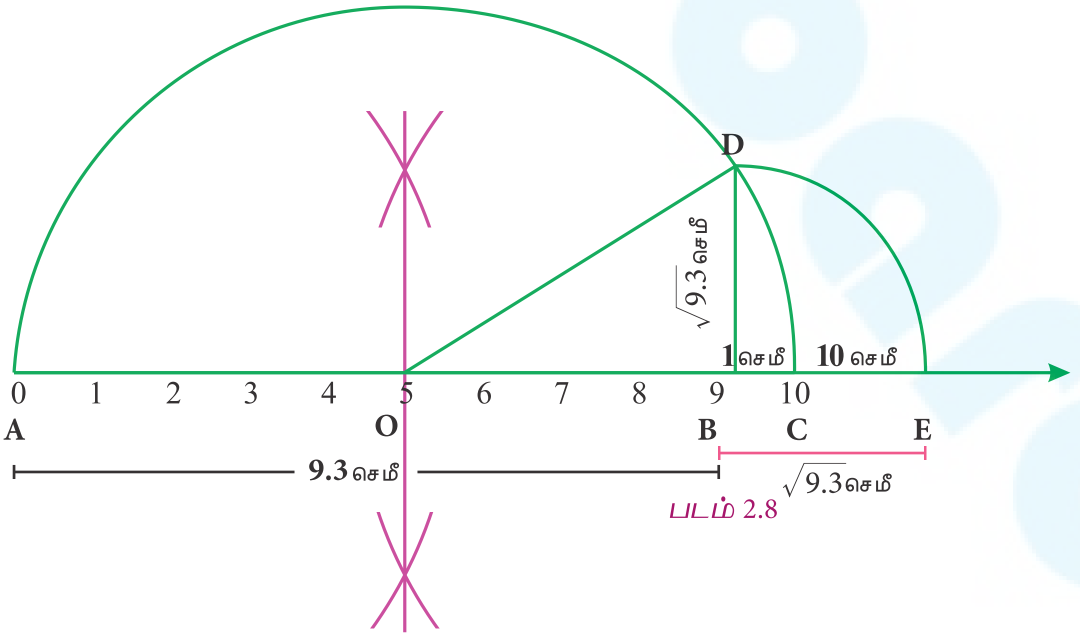
குறிப்பு

மேற்குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து இரு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகியன ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கலாம் என்பது தெளிவாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.13 $\sqrt{9.3}$ ஐ எண் கோட்டில் குறிக்கவும்.

தீர்வு

- ஒரு நேர்க்கோடு வரைந்து அதில் A என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும்.
- $AB = 9.3$ செமீ எனக் கொண்டு B என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும்.
- $BC = 1$ செமீ என்ற அலகுக்கு ஒரு கோடு வரைந்து அதை 'C' எனக் குறிக்கவும்.
- AC–க்கு மையக் குத்துக்கோடு வரைந்து அதன் மையப் புள்ளியை O எனக் குறிக்கவும்.
- O ஐ மையமாகவும் $OC = OA$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு அரை வட்டம் வரையவும்.
- AB–க்குச் செங்குத்தாக B இல் BD என்ற கோடு வரையவும்.
- இப்போது, $BD = \sqrt{9.3}$ இதை எண்கோட்டில் $BE = BD = \sqrt{9.3}$ எனக் குறிக்கலாம்.



படம் 2.8

2-Real Numbers_TM.indd 58 26-12-2019 13:09:15

பயிற்சி 2.3

1. கீழ்க்காணும் விகிதமுறா எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்கவும்.

   (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{4.7}$ (iii) $\sqrt{6.5}$

2. கீழ்க்காணும் எண்களுக்கு இடையே உள்ள எவையேனும் இரு விகிதமுறா எண்களைக் காண்க.

   (i) 0.3010011000111... மற்றும் 0.3020020002...

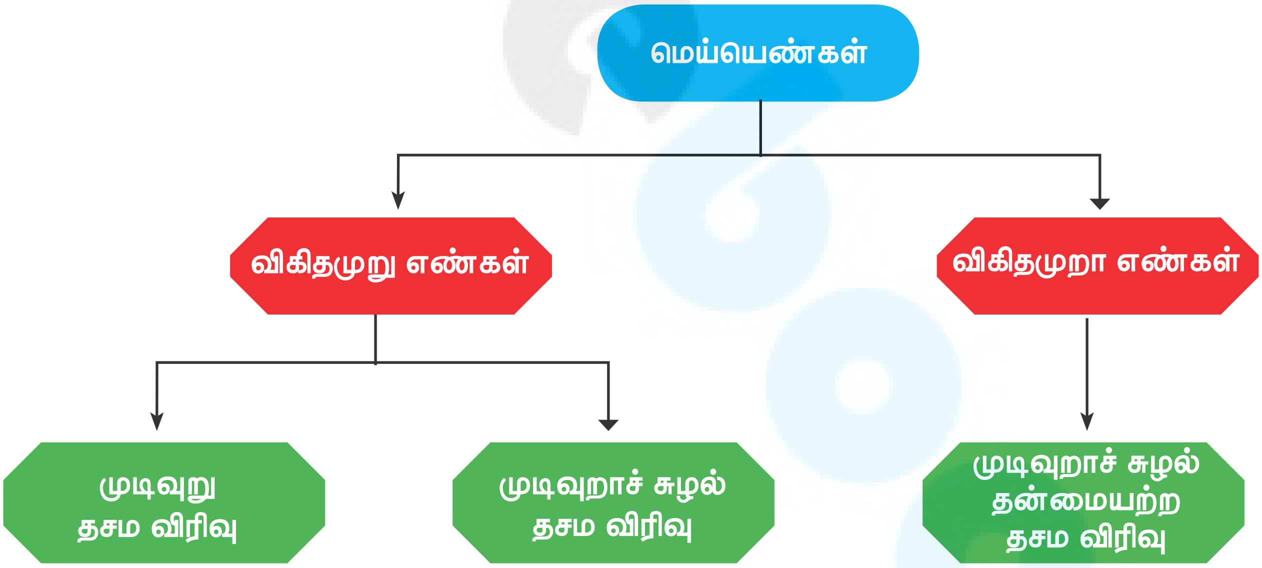
   (ii) $\frac{6}{7}$ மற்றும் $\frac{12}{13}$ (iii) $\sqrt{2}$ மற்றும் $\sqrt{3}$

3. 2.2360679... மற்றும் 2.236505500... இவ்வெண்களுக்கிடையே உள்ள எவையேனும் இரு விகிதமுறு எண்களைக் காண்க.

2.4 மெய்யெண்கள் (Real Numbers)

அனைத்து விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களையும் உள்ளடக்கியது மெய்யெண்கள் ஆகும்.

மெய்யெண்களை நாம் மெய்எண் கோட்டில் (முடிவுறா மிகப் பெரிய எண் கோடு) உள்ள புள்ளிகளாகக் கருதலாம். இதில் முழுக்களுக்கு உரிய புள்ளிகள் அனைத்தும் மிகச் சீரான இடைவெளியுடன் இருக்கும்.



எந்தவொரு மெய்யெண்களையும் அதன் முடிவுறாத் தசம விரிவினைக் கொண்டு நாம் அடையாளம் காணலாம். [விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் தசம விரிவினைப் பற்றி நாம் முன்னரே அறிந்துள்ளோம்.]

2.4.1 மெய்யெண் கோடு (The Real Number Line)

தொடர் உருப்பெருக்க முறையைப் பயன்படுத்திக் காணுதல்.

எண் கோட்டில் உள்ள எண்களை நாம் உருப்பெருக்கக் கண்ணாடியில் காண்பதைப் போலக் காணலாம்.

2-Real Numbers_TM.indd 59 26-12-2019 13:09:16

எடுத்துக்காட்டு 2.14 4.863 ஐ எண் கோட்டில் குறிக்கவும்..

தீர்வு

4.863 என்பது 4 , 5 என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ளது.(படம். 2.9)

(i) 4 , 5 என்ற எண்களுக்கு இடையே உள்ள பகுதியை 10 சமபாகங்களாகப் பிரிக்கவும்.

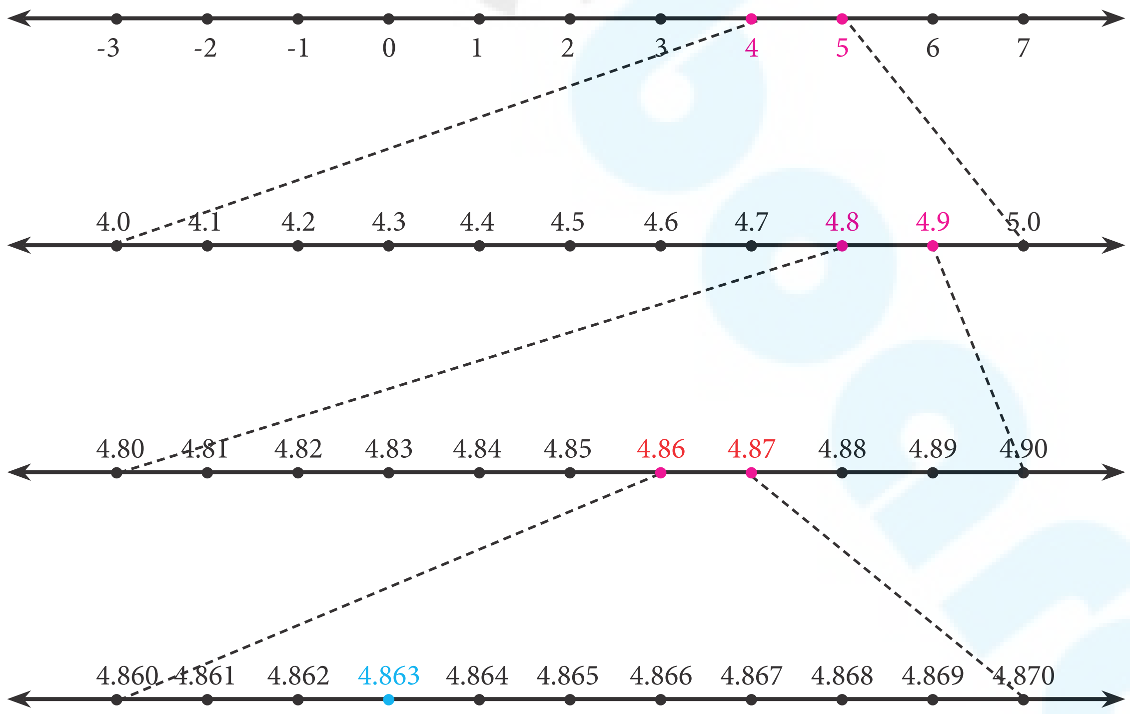
(ii) 4 இலிருந்து வலப்புறமாக எட்டாவது பிரிவை அல்லது 5 இலிருந்து இடப்புறமாக இரண்டாவது பிரிவை 4.8 என்ற புள்ளியாகக் குறிக்கவும்.

(iii) 4.86 என்பது 4.8 , 4.9 என்ற எண்களுக்கு இடையே இருக்கும். இவற்றுக்கிடையே உள்ள தூரத்தை 10 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கவும்.

(iv) 4.8 –க்கு வலப்புறமாக 6 ஆவது அல்லது 4.9 –க்கு இடப்புறமாக 4 ஆவது பிரிவை 4.86 எனக் குறிக்கவும்.

(v) 4.863 என்பது 4.86, 4.87 என்ற எண்களுக்கு இடையே அமையும். இவற்றுக்கிடையே உள்ள பகுதியை 10 சம பாகங்களாகப் பிரிக்கவும்.

(vi) 4.86 இலிருந்து வலப்புறமாக 3 ஆவது அல்லது 4.87 இலிருந்து இடப்புறமாக 7 ஆவது பிரிவை 4.863 எனக் குறிக்கவும்.



படம் 2.9

2-Real Numbers_TM.indd 60 26-12-2019 13:09:16

எடுத்துக்காட்டு 2.15

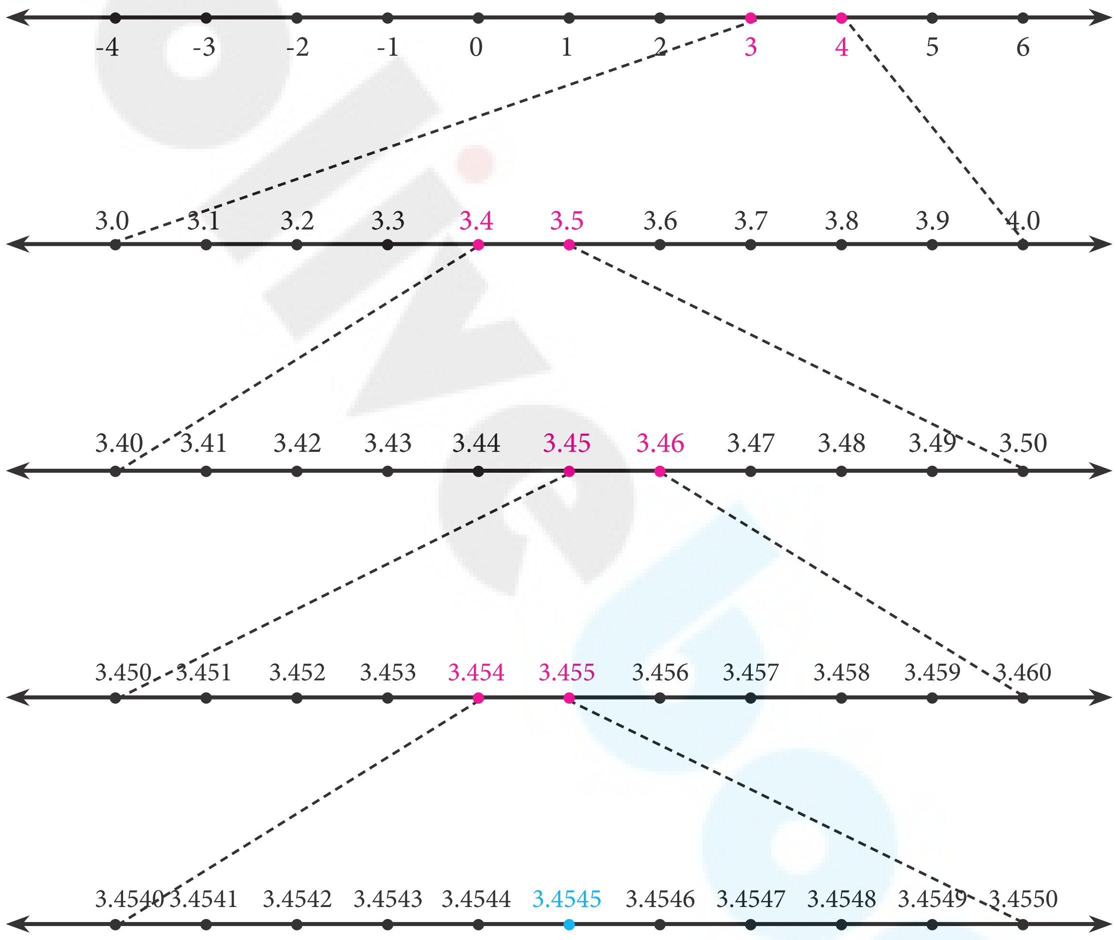
$3.\overline{45}$ ஐ 4 தசம இடத் திருத்தமாக எண் கோட்டில் குறிக்கவும்..

தீர்வு

$3.\overline{45} = 3.45454545\ldots..$

$= 3.4545$ (4 தசம இடத் திருத்தமாக).

இது 3 மற்றும் 4 என்ற எண்களுக்கு இடையில் அமையும்.



படம் 2.10

பயிற்சி 2.4

1. கீழ்க்காணும் எண்களை எண் கோட்டில் குறிக்கவும்.

(i) 5.348 (ii) $6.\overline{4}$ ஐ 3 தசம இடத் திருத்தமாக (iii) $4.\overline{73}$ ஐ 4 தசம இடத் திருத்தமாக.

2-Real Numbers_TM.indd 61 26-12-2019 13:09:17

2.5 மூலக்குறியீடு (Radical Notation)

n ஒரு மிகை முழு மற்றும் r ஒரு மெய்யெண் என்க. $r^n = x$ எனில், r என்பது x இன் n ஆவது மூலம் என அழைக்கப்படுகிறது.

இதை நாம், $\sqrt[n]{x} = r$ என எழுதுகிறோம். இங்கே, $\sqrt[n]{\ }$ என்பது மூலக்குறியீடு (radical) எனவும்; n என்பது மூலத்தின் வரிசை (index) எனவும் (இதுவரை அடுக்கு என நாம் இதனை அழைத்தோம்) மற்றும் x என்பது மூல அடிமானம் (radicand) எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு

'வர்க்கமூலம்' மற்றும் 'கனமூலம்' என்பவற்றின் கருத்துகளைப் புரிந்துகொள்வதற்குப் பயனுள்ள வகையில் சற்றுக் கூடுதல் நேரம் ஒதுக்கினால் முறுடுகளை நன்கு புரிந்துகொள்ளலாம்.

$n = 2$ எனில், என்ன நிகழும்? $r^2 = x$ ஆகும், எனவே, $r = \sqrt[2]{x}$, இப்பொழுது x இன் வர்க்கமூலத்தை நினைவு கூர்வோம். அதாவது r என்பது x இன் வர்க்கமூலம் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt[2]{16}$ என்பதை $\sqrt{16}$ என எழுதலாம்.

மேலும் $n = 3$ எனில், நாம் x இன் கனமூலத்தை $\sqrt[3]{x}$ எனப் பெறுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt[3]{8}$ ஆனது 8இன் கனமூலமான 2 ஐத் தருகிறது. ($8 = 2^3$ என்பது சரிதானே?)

4 என்ற எண்ணுக்கு எத்தனை வர்க்க மூலங்கள் உள்ளன? $(+2)\times(+2) = 4$ மற்றும் $(-2)\times(-2) = 4$ எனவே, $+2$ மற்றும் -2 இரண்டுமே 4இன் வர்க்கமூலங்கள் எனலாம். ஆனால், $\sqrt{4} = \pm 2$ என எழுதுவது தவறு. ஏனெனில், n என்பது இரட்டை எண்ணாக இருக்கும் போது $\sqrt[n]{x}$ ஆவது மிகை மூலத்தைக் குறிப்பிட n என்ற குறியீடும், n ஆவது குறை மூலத்தைக் குறிப்பிட $-\sqrt[n]{x}$ என்ற குறியீடுமே ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்ட வழிமுறை ஆகும். எனவே, $\sqrt{4} = 2$ மற்றும் $-\sqrt{4} = -2$ என்றவாறு நாம் எழுத வேண்டும். n என்பது ஒற்றை எண்ணாக இருக்கும் போது, x இன் அனைத்து மதிப்பிற்கும், சரியாக ஒரேயொரு n ஆவது மெய் மூலம் மட்டுமே இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt[3]{8} = 2$ மற்றும் $\sqrt[5]{-32} = -2$.

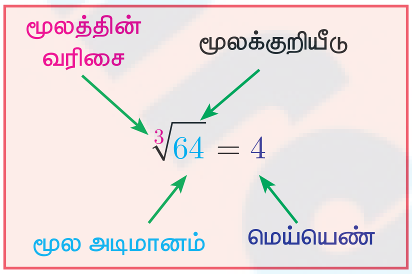
சிந்தனைக் களம்

கீழ்க்காண்பவற்றுள் எது தவறு?

1. 9 இன் வர்க்கமூலம் 3 அல்லது -3
2. $\sqrt{9} = 3$
3. $-\sqrt{9} = -3$
4. $\sqrt{9} = \pm 3$

2.5.1 பின்ன அடுக்கு (Fractional Index)

மீண்டும் $r = \sqrt[n]{x}$ என்ற வடிவத்தின் முடிவுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அருகிலுள்ள குறியீட்டில் மூலத்தின் வரிசையானது (இங்கு, $n = 3$) எத்தனை முறை விடையைப் (இங்கு 4) பெருக்கினால் மூல அடிமானம் கிடைக்கும் என்பதைத் தெரிவிக்கிறது.



அடுக்குகளையும், மூலங்களையும் குறிப்பிடுவதற்கு நம்மிடம் மேலும் ஒரு வழி உள்ளது. அது அடுக்கில் பின்னத்தைக் குறிப்பிடுதல். அதாவது, $\sqrt[n]{x}$ என்பதை $x^{\frac{1}{n}}$ (பின்ன அடுக்கு) என எழுதலாம்.

2-Real Numbers_TM.indd 62 26-12-2019 13:09:18

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}}$ மற்றும் $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$.

சில விகிதமுறா மூலங்களின் அடுக்குக்குறி வடிவம், படிக்கும் முறை, மூலக்குறியீடு , பின்ன அடுக்கு வடிவம் ஆகியவை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

அடுக்குக்குறி வடிவம்	மூலக்குறியீடு	பின்ன அடுக்கு வடிவம்	பொதுவாக நாம் படிக்கும் முறை
$2^6 = 64$	$2 = \sqrt[6]{64}$	$2 = 64^{\frac{1}{6}}$	2 என்பது 64இன் 6ஆவது மூலம்
$2^5 = 32$	$2 = \sqrt[5]{32}$	$2 = 32^{\frac{1}{5}}$	2 என்பது 32இன் 5ஆவது மூலம்
$2^4 = 16$	$2 = \sqrt[4]{16}$	$2 = 16^{\frac{1}{4}}$	2 என்பது 16இன் 4ஆவது மூலம்
$2^3 = 8$	$2 = \sqrt[3]{8}$	$2 = 8^{\frac{1}{3}}$	2 என்பது 8இன் கனமூலம் அல்லது 2 என்பது 8இன் 3ஆவது மூலம்
$2^2 = 4$	$2 = \sqrt[2]{4}$ அல்லது சுருக்கமாக, $2 = \sqrt{4}$	$2 = 4^{\frac{1}{2}}$	2 என்பது 4இன் வர்க்கமூலம் அல்லது 2 என்பது 4இன் 2 வது மூலம்

எடுத்துக்காட்டு 2.16

பின்வருவனவற்றை 2^n வடிவத்தில் எழுதுக :

(i) 8 (ii) 32 (iii) $\frac{1}{4}$ (iv) $\sqrt{2}$ (v) $\sqrt{8}$

தீர்வு

(i) $8 = 2\times2\times2$; எனவே $8 = 2^3$

(ii) $32 = 2\times2\times2\times2\times2 = 2^5$

(iii) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2\times2} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

(iv) $\sqrt{2} = 2^{1/2}$

(v) $\sqrt{8} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3$. இதனை $2^{\frac{3}{2}}$ எனவும் எழுதலாம்.

$x^{\frac{m}{n}}$ என்பதன் பொருள்: (m மற்றும் n என்பன மிகை முழுக்கள்)

$x^{\frac{m}{n}}$ என்பதை நாம் x இன் m ஆவது அடுக்கின் n ஆவது மூலம் அல்லது n ஆவது மூலத்தின் m ஆவது அடுக்கு என எழுதலாம்.

குறியீட்டில், $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ அல்லது $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$ அல்லது $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

2-Real Numbers_TM.indd 63 26-12-2019 13:09:20

எடுத்துக்காட்டு 2.17 மதிப்பு காண்க: (i) $81^{\frac{5}{4}}$ (ii) $64^{\frac{-2}{3}}$

தீர்வு

(i) $81^{\frac{5}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^5 = \left(\sqrt[4]{3^4}\right)^5 = 3^5 = 3\times3\times3\times3\times3 = 243$

(ii) $64^{\frac{-2}{3}} = \dfrac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^2} = \dfrac{1}{4^2}$ (எப்படி?) $= \dfrac{1}{16}$

பயிற்சி 2.5

1. பின்வருவனவற்றை 5^n வடிவத்தில் எழுதுக:
   (i) 625 (ii) $\frac{1}{5}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\sqrt{125}$
2. பின்வருவனவற்றை 4^n வடிவில் எழுதுக:
   (i) 16 (ii) 8 (iii) 32
3. மதிப்பு காண்க:
   (i) $(49)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $(243)^{\frac{2}{5}}$ (iii) $9^{\frac{-3}{2}}$ (iv) $\left(\frac{64}{125}\right)^{\frac{-2}{3}}$
4. பின்ன அடுக்கைப் பயன்படுத்தி எழுதுக:
   (i) $\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt[2]{7}$ (iii) $\left(\sqrt[3]{49}\right)^5$ (iv) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{100}}\right)^7$
5. கீழ்க்காண்பவற்றின் 5 வது மூலத்தைக் காண்க:
   (i) 32 (ii) 243 (iii) 100000 (iv) $\frac{1024}{3125}$

2.6 முறுடுகள் (Surds)

மெய்யெண்களைப் பற்றிய கருத்துகள், அவற்றை எண்கோட்டில் குறித்தல் மற்றும் கையாளுதல் ஆகியவற்றை நன்கு அறிந்த நாம் தற்போது குறிப்பிட்ட சில தோராய மதிப்புகளை எப்படி முறுடுகளாக தனித்துவமான முறையில் குறிப்பிடுவது என்பது பற்றி கற்க இருக்கின்றோம்.

$\sqrt{4}$ என்ற எண்ணை $\sqrt{\ }$ குறியீடு இல்லாமல் நம்மால் சுருக்கமாகக் கூற இயலுமா? ஆம் முடியும். $\sqrt{4}$ இக்குப் பதிலாக 2 என எளிமையாக எழுத முடியும். அப்படியானால், $\sqrt{\frac{1}{9}}$ யும் அவ்வாறே எழுதலாமா? மிகவும் எளிதாக எழுதலாம். $\sqrt{\ }$ குறியீடு இல்லாமல் இதன் மதிப்பு $\frac{1}{3}$ ஆகும்.

$\sqrt{0.01}$ இன் மதிப்பு என்ன? இதனையும் எளிதாக எழுதலாம். இதன் தீர்வு 0.1 ஆகும்.

$\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$ மற்றும் $\sqrt{0.01}$ என்பவற்றின் தீர்வு காணும்போது $\sqrt{\ }$ குறியீடு இல்லாமல்

இருப்பதை நம்மால் காண முடிகிறது. எல்லா இடங்களிலும் இவ்வாறு செய்ய இயலுமா? $\sqrt{18}$ என்பதைக் கருதுக. மூலக்குறியீடு இல்லாமல் இதன் மதிப்பை நம்மால் காண இயலுமா? 2–ன் வர்க்கமூலம், 5–ன் கனமூலம் போன்று மூலக்குறியீடு இல்லாமல் தீர்வு காண இயலாத எண்கள் முறுடுகள் எனப்படுகின்றன. அவை விகிதமுறு எண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட சமன்பாட்டின் விகிதமுறா மூலங்கள் ஆகும்.

> முறுடு என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் விகிதமுறா மூலம் ஆகும். $\sqrt[n]{a}$ என்பது ஒரு முறுடு, இங்கே $n \in \mathbb{N},\ n > 1$, 'a' ஒரு விகிதமுறு எண்.

எடுத்துக்காட்டுகள்: $\sqrt{2}$ ஒரு முறுடு. இது $x^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டின் விகிதமுறா மூலம் ஆகும். ($x^2 - 2 = 0$ என்பது விகிதமுறு எண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு என்பதைக் கவனிக்க. $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுறா எண். இதை $1.4142135\ldots$ என்ற முடிவுறாச் சுழல் தன்மையற்ற தசம எண்ணால் குறிப்பிடலாம்.)

$\sqrt[3]{3}$ (இது $3^{\frac{1}{3}}$ –க்குச் சமமானது) ஒரு முறுடு. ஏனெனில், இது $x^3 - 3 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் விகிதமுறா மூலம் ஆகும் ($\sqrt{3}$ ஒரு விகிதமுறா எண், இதை $1.7320508\ldots$ என்ற முடிவுறாச் சுழல் தன்மையற்ற தசம எண்ணால் குறிப்பிடலாம்).

$x^2 - 6x + 7 = 0$ போன்ற இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பது பற்றி நீங்கள் அடுத்த வகுப்பில் கற்க இருக்கிறீர்கள். மேற்கண்ட சமன்பாடானது விகிதமுறு எண்களைக் கெழுக்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு, அதன் ஒரு மூலம் $3+\sqrt{2}$ ஆனது ஒரு முறுடு ஆகும்.

$\sqrt{\dfrac{1}{25}}$ ஒரு முறுடா? இல்லை; இதை $\dfrac{1}{5}$ என்ற விகிதமுறு எண்ணாகச் சுருக்கி எழுத முடியும்.

$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$ இன் மதிப்பு எவ்வாறு இருக்கும்? இது முறுடு அல்ல. இதனை $\dfrac{2}{3}$ எனச் சுருக்க இயலும்.

நமக்குத் தெரிந்த மிக முக்கியமான விகிதமுறா எண் π ஒரு முறுடல்ல! அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாக இருந்த போதிலும், அதை $\sqrt{\ }$ குறியீட்டுக்குள் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக எழுத இயலாது. (அதாவது, விகிதமுறு கெழுக்களைக் கொண்ட எந்தவொரு சமன்பாட்டிற்கும் இது மூலமாக இருக்காது).

முறுடுகள் ஏன் முக்கியமாகின்றன? கணக்கீடுகள் செய்யும்போது, நாம் $\sqrt{2} = 1.414$, மற்றும் $\sqrt{3} = 1.732$ போன்ற தோராய மதிப்புகளை எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(1.414\right)^2 = 1.99936 \neq 2\ ; \qquad \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(1.732\right)^2 = 3.999824 \neq 4$$

இதிலிருந்து $\sqrt{2}$ மற்றும் $\sqrt{3}$ என்பவற்றின் தோராய மதிப்புகளை விட, வேறொரு துல்லியமான மற்றும் மிகச் சரியான மதிப்புகளை அவை கொண்டிருக்கின்றன என்பதை நம்மால் காண முடிகிறது. பொறியாளர்களும் விஞ்ஞானிகளும் பாலம் கட்டுதல், கட்டடக்கலை வேலைகள் போன்ற தங்கள் பணிகளைச் செய்யும்போது, மிகத் துல்லியமான மதிப்புகள் அவர்களுக்குத் தேவைப்படுகின்றன. எனவே முறுடுகளைப் பற்றி நாம் கற்பது இன்றியமையாததாகிறது.

2-Real Numbers_TM.indd 65 26-12-2019 13:09:23

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. பொருத்தமில்லாதது எது? உமது விடைக்குத் தகுந்த காரணம் கூறவும்..

$\sqrt{36},\ \sqrt{\frac{50}{98}},\ \sqrt{1},\ \sqrt{1.44},\ \sqrt[5]{32},\ \sqrt{120}$

$\sqrt{7},\ \sqrt{48},\ \sqrt[3]{36},\ \sqrt{5}+\sqrt{3},\ \sqrt{1.21},\ \sqrt{\frac{1}{10}}$

2. அனைத்து முறுடுகளும் விகிதமுறா எண்களா? உமது விடையைக் கலந்தாலோசிக்கவும்.
3. எல்லா விகிதமுறா எண்களும் முறுடுகளா? சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு சரிபார்க்க.

2.6.1 முறுடின் வரிசை (Order of a surd)

ஒரு முறுடானது எந்த மூலத்திலிருந்து பெறப்படுகிறதோ, அந்த மூலத்தின் வரிசை அந்த **முறுடின் வரிசை** எனப்படுகிறது. $\sqrt[n]{a}$ என்ற முறுடின் வரிசை n ஆகும். $\sqrt[5]{99}$ இன் வரிசை என்ன? இது 5 ஆகும்.

முறுடுகளை பல்வேறு வழிகளில் வகைப்படுத்தலாம்.

(i) ஒரே வரிசை கொண்ட முறுடுகள் (Surds of Same order)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட **முறுடுகளின் வரிசைகள் சமம்** எனில் அந்த முறுடுகள் ஒரே வரிசை கொண்ட முறுடுகள் எனப்படும். இவை **சம மூலக்குறியீடு கொண்ட முறுடுகள்** எனவும் அழைக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

$\sqrt{x},\ a^{\frac{3}{2}},\ \sqrt[2]{m}$ என்பன இரண்டாம் வரிசை முறுடுகள் அல்லது **இருபடி முறுடுகள்**.

$\sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{(x-2)},\ (ab)^{\frac{1}{3}}$ என்பன மூன்றாம் வரிசை முறுடுகள் அல்லது **கன முறுடுகள்**.

$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{10},\ \sqrt[4]{6}$ மற்றும் $8^{\frac{2}{5}}$ என்பன வெவ்வேறு வரிசை கொண்ட முறுடுகள்.

(ii) **முறுடின் எளிய வடிவம் (A surd in the simplest form)** ஒரு முறுடின் எளிய வடிவம் என்பது அதை விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா காரணிகளின் பெருக்கலாக எழுதும்போது, அதில் உள்ள விகிதமுறாக் காரணி கீழ்க்காணும் 3 விதிகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(அ) மூலத்தின் வரிசை இயன்ற அளவு மிகச் சிறியதாய் இருக்க வேண்டும்.

(ஆ) மூலக் குறியீட்டின் வரிசை பின்னமாக இருத்தல் கூடாது.

(இ) வரிசை n கொண்ட மூலக் குறியீடுக்குள் a^n வடிவில் எந்த ஒரு காரணியும் இருக்கக்கூடாது. இங்கு a ஒரு மிகை முழு.

எடுத்துக்காட்டு 2.18 பின்வருவனவற்றை ஒரே வரிசை கொண்ட முறுடுகளாக மாற்ற இயலுமா? (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt[4]{3}$ (iii) $\sqrt[3]{3}$

2-Real Numbers_TM.indd 66 26-12-2019 13:09:24

தீர்வு

(i) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ $= 3^{\frac{6}{12}}$ $= \sqrt[12]{3^6}$ $= \sqrt[12]{729}$

(ii) $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$ $= 3^{\frac{3}{12}}$ $= \sqrt[12]{3^3}$ $= \sqrt[12]{27}$

(iii) $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ $= 3^{\frac{4}{12}}$ $= \sqrt[12]{3^4}$ $= \sqrt[12]{81}$

கடைசி வரியிலிருந்து, மூன்றையும் ஒரே வரிசை கொண்ட முறுடுகளாக மாற்ற முடிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.19

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள முறுடுகளை எளிய வடிவில் எழுதுக: i) $\sqrt{8}$ ii) $\sqrt[3]{192}$
2. $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$ என்பதை மெய்ப்பிக்க.

தீர்வு

1. (i) $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$

   (ii) $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{4\times 4\times 4\times 3} = 4\sqrt[3]{3}$

2. $\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}$

   $\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

   $\sqrt[12]{2401} > \sqrt[12]{125}$

   ஆகவே,, $\sqrt[3]{7} > \sqrt[4]{5}$.

(iii) **முழுமையான மற்றும் கலப்பு முறுடுகள் (Pure and Mixed Surds)** எளிய வடிவில் ஒரு முறுடின் கெழு அல்லது குணகம் 1 எனில், அந்த முறுடு முழுமையான முறுடு எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{49}$ ஆகியவை முழுமையான முறுடுகள். ஒரு முறுடின் எளிய வடிவில் அதன் கெழு அல்லது குணகம் 1–ஐத் தவிர வேறு ஓர் எண்ணாக இருப்பின் அது கலப்பு முறுடு எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, $5\sqrt{3}$, $2\sqrt[4]{5}$, $3\sqrt[4]{6}$ என்பன கலப்பு முறுடுகள்.

(iv) **எளிய மற்றும் கூட்டு முறுடுகள் (Simple and Compound Surds)** ஒரே ஓர் உறுப்பை மட்டும் கொண்டுள்ள முறுடு எளிய முறுடு எனப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$ ஆகியன எளிய முறுடுகள். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முறுடுகள் கூட்டுச் செயலிகளால் (+ அல்லது −) இணைக்கப்பட்டிருந்தால் அது கூட்டு முறுடு ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $\sqrt{5}+3\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-2\sqrt{7}$, $\sqrt{5}-7\sqrt{2}+6\sqrt{3}$ ஆகியன கூட்டு முறுடுகள்.

2-Real Numbers_TM.indd 67 26-12-2019 13:09:25

(v) ஈருறுப்பு முறுடு (Binomial Surd) கூட்டல் அல்லது கழித்தல் முறையில் இணைத்து எழுதப்பட்ட விரிவில் இரண்டும் முறுடாகவோ அல்லது ஒன்று விகிதமுறு எண் மற்றொன்று ஒரு முறுடாகவோ இருப்பின் அது ஈருறுப்பு முறுடு எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{1}{2}-\sqrt{19}, 5+3\sqrt{2}, \sqrt{3}-2\sqrt{7}$ ஆகியன ஈருறுப்பு முறுடுகள் ஆகும் .

எடுத்துக்காட்டு 2.20 ஏறுவரிசையில் எழுதுக: $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[2]{4},\ \sqrt[4]{3}$

தீர்வு

$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[2]{4},\ \sqrt[4]{3}$ ஆகியவற்றின் வரிசைகள் $3,\ 2,\ 4$.

$3, 2, 4$ இன் மீ.பொ.ம $= 12$.

$$\sqrt[3]{2} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \left(2^{\frac{4}{12}}\right) = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16} \quad ; \quad \sqrt[2]{4} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \left(4^{\frac{6}{12}}\right) = \sqrt[12]{4^6} = \sqrt[12]{4096}$$

$$\sqrt[4]{3} = \left(3^{\frac{1}{4}}\right) = \left(3^{\frac{3}{12}}\right) = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$$

$\sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[2]{4}$ ஆனது $\sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{4096}$

ஏறுவரிசை $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[2]{4}$.

2.6.2 மூலக்குறியீட்டு விதிகள் (Laws of Radicals)

$m,\ n$ என்பன மிகை முழுக்கள், a மற்றும் b என்பன மிகை விகிதமுறு எண்கள் எனில், கீழ்க்காணும் மூலக்குறியீட்டு விதிகளை நினைவு கூர்தல் பயனுள்ளது.

வ. எண்.	மூலக்குறியீடு	அடுக்கு வடிவம்
(i)	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}}$
(ii)	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
(iv)	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$
(v)	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$

மூலக்குறியீட்டு விதிகளைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்கக்கூடிய சில கணக்குகளைத் தற்போது விவாதிப்போம்.

2-Real Numbers_TM.indd 68 26-12-2019 13:09:27

எடுத்துக்காட்டு 2.21 கொடுக்கப்பட்ட முறுடுகளை அதன் எளிய வடிவில் எழுதுக. மேலும், அவற்றின் வரிசை, மூல அடிமானம் மற்றும் கெழு ஆகியவற்றையும் கண்டறிக.

(i) $\sqrt[3]{108}$ (ii) $\sqrt[3]{(1024)^{-2}}$

தீர்வு

(i) $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27\times 4}$

$= \sqrt[3]{3^3\times 4}$

$= \sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{4}$ (மூலக்குறியீட்டு விதி - ii)

$= 3\times\sqrt[3]{4}$ (மூலக்குறியீட்டு விதி - i)

2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

வரிசை= 3; மூல அடிமானம் = 4; கெழு = 3

(ii) $\sqrt[3]{(1024)^{-2}} = \left[\sqrt[3]{\left(2^3\times 2^3\times 2^3\times 2\right)^{-2}}\right]$

$= \left[\sqrt[3]{\left(2^3\times 2^3\times 2^3\times 2\right)}\right]^{-2}$ [மூலக்குறியீட்டு விதி (i)]

$= \left[\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2}\right]^{-2}$ [மூலக்குறியீட்டு விதி(ii)]

$= \left[2\times 2\times 2\times\sqrt[3]{2}\right]^{-2}$ [மூலக்குறியீட்டு விதி (i)]

$= \left[8\times\sqrt[3]{2}\right]^{-2} = \left[\frac{1}{8}\right]^{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2}$

$= \frac{1}{64}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

2	1024
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

வரிசை = 3; மூல அடிமானம்= $\frac{1}{4}$; கெழு= $\frac{1}{64}$

(அடுக்கு வடிவத்தைப் பயன்படுத்தியும் இதே முடிவுகளைப் பெற இயலும்).

குறிப்பு

5 மற்றும் 6 என்ற எண்களைக் கருதுக. மேலும் $5=\sqrt{25}$ மற்றும் $6=\sqrt{36}$ ஆகும். ஆகவே, $\sqrt{26}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{31}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{33}$, $\sqrt{34}$, மற்றும் $\sqrt{35}$ என்பன 5 –க்கும் 6 –க்கும் இடைப்பட்ட முறுடுகளாகும்.

$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{18}$, $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times 3}=\sqrt{12}$ ஆகவே, $\sqrt{17}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{13}$ என்பன $2\sqrt{3}$ –க்கும் $3\sqrt{2}$ –க்கும் இடைப்பட்ட முறுடுகளாகும்.

2-Real Numbers_TM.indd 69 26-12-2019 13:09:29

2.6.3 முறுடுகளில் நான்கு அடிப்படைச் செயல்கள் (Four Basic Operations on Surds)

(i) முறுடுகளில் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் (Addition and subtraction of surds) ஒத்த முறுடுகளைக் கீழ்க்காணும் விதியைப் பயன்படுத்திக் கூட்டவோ கழிக்கவோ முடியும்.

$$a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = (a \pm c)\sqrt[n]{b}, \text{ இங்கு } b > 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.22 (i) $3\sqrt{7}$ மற்றும் $5\sqrt{7}$ ஐக் கூட்டுக. அவற்றின் கூடுதல் ஒரு விகிதமுறு எண்ணா அல்லது விகிதமுறா எண்ணா எனச் சரிபார்க்க.

(ii) $4\sqrt{5}$ ஐ $7\sqrt{5}$ இலிருந்து கழிக்க. தீர்வானது ஒரு விகிதமுறு எண்ணா அல்லது விகிதமுறா எண்ணா?

தீர்வு

(i) $3\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = (3+5)\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$. தீர்வு ஒரு விகிதமுறா எண்.

(ii) $7\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = (7-4)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. தீர்வு ஒரு விகிதமுறா எண்.

எடுத்துக்காட்டு 2.23 கீழ்க்காண்பவற்றைச் சுருக்குக:

(i) $\sqrt{63} - \sqrt{175} + \sqrt{28}$ (ii) $2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{625} - 4\sqrt[3]{320}$

தீர்வு

(i) $\sqrt{63} - \sqrt{175} + \sqrt{28} = \sqrt{9\times7} - \sqrt{25\times7} + \sqrt{4\times7}$

$= 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

$= \left(3\sqrt{7} + 2\sqrt{7}\right) - 5\sqrt{7}$

$= 5\sqrt{7} - 5\sqrt{7}$

$= 0$

(ii) $2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{625} - 4\sqrt[3]{320}$

$= 2\sqrt[3]{8\times5} + 3\sqrt[3]{125\times5} - 4\sqrt[3]{64\times5}$

$= 2\sqrt[3]{2^3\times5} + 3\sqrt[3]{5^3\times5} - 4\sqrt[3]{4^3\times5}$

$= 2\times2\sqrt[3]{5} + 3\times5\sqrt[3]{5} - 4\times4\sqrt[3]{5}$

$= 4\sqrt[3]{5} + 15\sqrt[3]{5} - 16\sqrt[3]{5}$

$= (4+15-16)\sqrt[3]{5} = 3\sqrt[3]{5}$

2-Real Numbers_TM.indd 70 26-12-2019 13:09:31

(ii) முறுடுகளில் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் (Multiplication and division of surds)

ஒத்த முறுடுகளைக் கீழ்க்காணும் விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பெருக்கவோ அல்லது வகுக்கவோ முடியும்.

முறுடுகளின் பெருக்கல் பண்புகள்	முறுடுகளின் வகுத்தல் பண்புகள்
(i) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (ii) $a\sqrt[n]{b} \times c\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{bd}$ இங்கே $b, d > 0$	(iii) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (iv) $\dfrac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \dfrac{a}{c}\sqrt[n]{\dfrac{b}{d}}$ இங்கே $b, d > 0$

எடுத்துக்காட்டு 2.24

$\sqrt[3]{40}$ மற்றும் $\sqrt[3]{16}$ ஐப் பெருக்குக.

தீர்வு

$$\sqrt[3]{40} \times \sqrt[3]{16} = \left(\sqrt[3]{2\times2\times2\times5}\right) \times \left(\sqrt[3]{2\times2\times2\times2}\right)$$
$$= \left(2\times\sqrt[3]{5}\right)\times\left(2\times\sqrt[3]{2}\right) = 4\times\left(\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}\right) = 4\times\sqrt[3]{2\times5}$$
$$= 4\sqrt[3]{10}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.25

$2\sqrt{72}\times5\sqrt{32}\times3\sqrt{50}$ இன் மதிப்பைக் கணக்கிட்டு விடையை எளிய வடிவில் தருக.

தீர்வு

$$2\sqrt{72}\times5\sqrt{32}\times3\sqrt{50} = \left(2\times6\sqrt{2}\right)\times\left(5\times4\sqrt{2}\right)\times\left(3\times5\sqrt{2}\right)$$
$$= 2\times5\times3\times6\times4\times5\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$$
$$= 3600\times2\sqrt{2}$$
$$= 7200\sqrt{2}$$

$\sqrt{72} = \sqrt{36\times2} = 6\sqrt{2}$
$\sqrt{32} = \sqrt{16\times2} = 4\sqrt{2}$
$\sqrt{50} = \sqrt{25\times2} = 5\sqrt{2}$

எடுத்துக்காட்டு 2.26

$\sqrt[9]{8}$ என்ற முறுடை $\sqrt[6]{6}$ ஆல் வகுக்க.

தீர்வு

$$\frac{\sqrt[9]{8}}{\sqrt[6]{6}} = \frac{8^{\frac{1}{9}}}{6^{\frac{1}{6}}}$$ (6, 9 இன் மீ.பொ.ம 18 என்பதைக் குறித்துக் கொள்க.)

$$= \frac{8^{\frac{2}{18}}}{6^{\frac{3}{18}}} \text{ (எப்படி?)} \qquad = \left(\frac{8^2}{6^3}\right)^{\frac{1}{18}} = \left(\frac{8\times8}{6\times6\times6}\right)^{\frac{1}{18}}$$
$$= \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{18}} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{18}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{2}{3}}$$

செயல்பாடு - 1

கீழ்க்காணும் முடிவுகள் ஆர்வமானதாக இருக்கிறதா?

$\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}$ மற்றும்

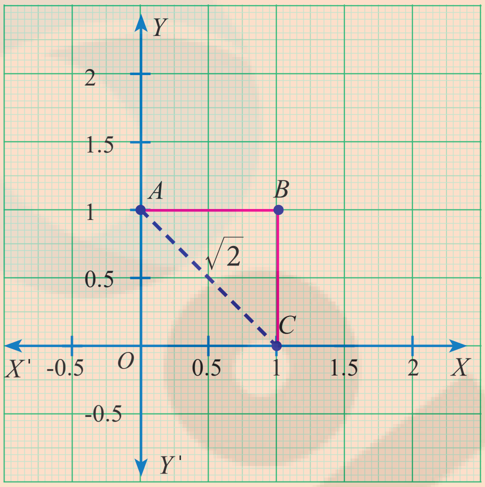
$\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$ என்பவை

சரியா என ஆராய்க. இதே வடிவில் மேலும் 4 புதிய முறுடுகளைக் காண்க.

2-Real Numbers_TM.indd 71
26-12-2019 13:09:32

செயல்பாடு–2

வரைபடத்தாளை எடுத்து, அதில் O, A, B, C ஐப் பின்வருமாறு குறிக்க.



சதுரம் $OABC$ இல்,

$OA = AB = BC = OC = 1$ அலகு

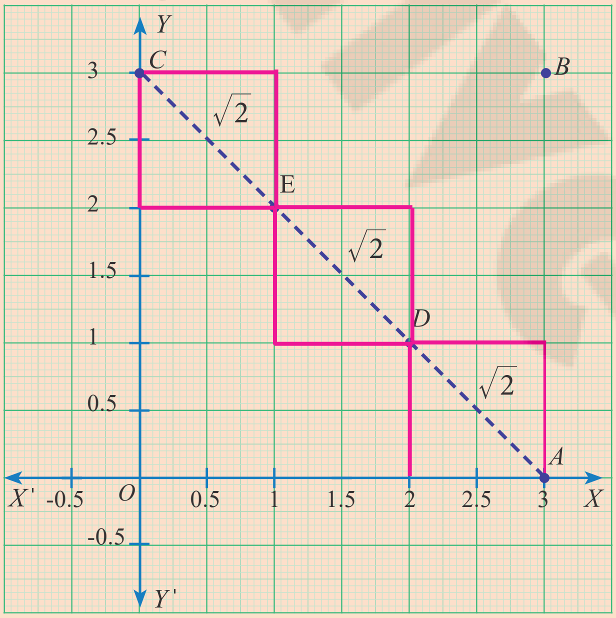
செங்கோண ΔOAC இல்,

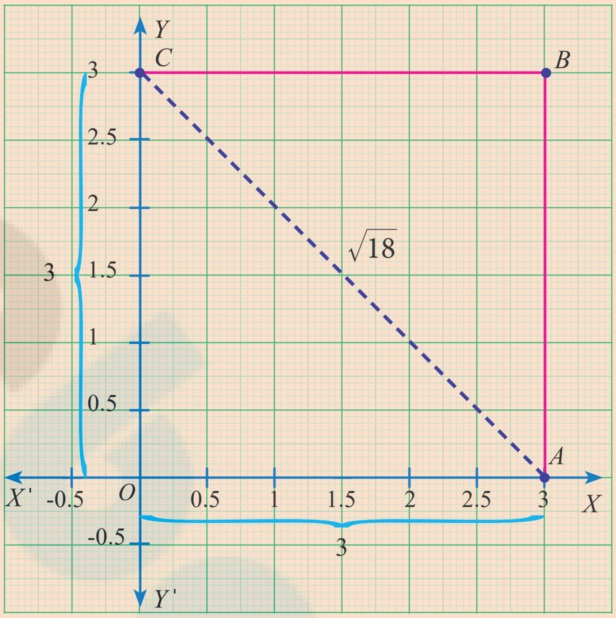
$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$= \sqrt{2}$ அலகு [பிதாகரஸ் தேற்றப்படி]

மூலைவிட்டத்தின் நீளம் $AC = \sqrt{2}$, ஒரு முறுடாகும்.

கீழ்க்காணும் வரைபடங்களைக் கருதுக.





மூலைவிட்டம் AC இன் நீளத்தை இரு வேறு வழிகளில் காணலாம்.

$AC = AD + DE + EC$

(ஓரலகு சதுரங்களின் மூலைவிட்டம்)

$AC = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \;\; = 3\sqrt{2}$ அலகுகள்

$AC \;= \sqrt{OA^2 + OC^2} \;= \sqrt{3^2 + 3^2}$

$AC \;= \sqrt{9 + 9} \;\; = \sqrt{18}$ அலகுகள்

இவை சமமா? விவாதிக்க.

இதே செயலை வேறுபட்ட பக்க அளவுகளைக் கொண்ட சதுரங்களை எடுத்துச் சரிபார்க்க.

பயிற்சி 2.6

1. முறுடுகளின் கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் பண்புகளைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக:

(i) $5\sqrt{3} + 18\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ (ii) $4\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5}$

(iii) $3\sqrt{75} + 5\sqrt{48} - \sqrt{243}$ (iv) $5\sqrt[3]{40} + 2\sqrt[3]{625} - 3\sqrt[3]{320}$

2-Real Numbers_TM.indd 72 26-12-2019 13:09:34

2. முறுடுகளின் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் பண்புகளைப் பயன்படுத்திச் சுருக்குக. :

(i) $\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{35} \div \sqrt{7}$ (iii) $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{125}$

(iv) $\left(7\sqrt{a}-5\sqrt{b}\right)\left(7\sqrt{a}+5\sqrt{b}\right)$ (v) $\left[\sqrt{\frac{225}{729}}-\sqrt{\frac{25}{144}}\right] \div \sqrt{\frac{16}{81}}$

3. $\sqrt{2}=1.414,\ \sqrt{3}=1.732,\ \sqrt{5}=2.236,\ \sqrt{10}=3.162$ எனில், கீழ்க்காண்பவற்றின் மதிப்புகளை மூன்று தசம இடத்திருத்தமாகக் காண்க.

(i) $\sqrt{40}-\sqrt{20}$ (ii) $\sqrt{300}+\sqrt{90}-\sqrt{8}$

4. முறுடுகளை இறங்கு வரிசையில் அமைக்க: (i) $\sqrt[3]{5}, \sqrt[9]{4}, \sqrt[6]{3}$ (ii) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}}, \sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}, \sqrt{\sqrt{3}}$

5. (i) இரு முறுடுகளின் கூட்டல் (ii) இரு முறுடுகளின் வேறுபாடு
(iii) இரு முறுடுகளின் பெருக்கல் (iv) இரு முறுடுகளின் ஈவு
ஆகிய நிகழ்வுகளில் உம்மால் ஒரு முழுமையான முறுடைப் பெற இயலுமா? ஒவ்வொரு விடையையும் ஓர் எடுத்துக்காட்டு கொண்டு விவரிக்க.

6. (i) இரு முறுடுகளின் கூட்டல் (ii) இரு முறுடுகளின் வேறுபாடு
(iii) இரு முறுடுகளின் பெருக்கல் (iv) இரு முறுடுகளின் ஈவு
ஆகிய நிகழ்வுகளில் உம்மால் ஒரு விகிதமுறு எண்ணைப் பெற இயலுமா? ஒவ்வொரு விடையையும் ஓர் எடுத்துக்காட்டு கொண்டு விவரிக்க.

2.7 முறுடுகளை விகிதப்படுத்துதல்(Rationalisation of Surds)

கொடுக்கப்பட்ட ஓர் உறுப்பை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்ற அதை எந்த உறுப்பால் பெருக்க அல்லது வகுக்க வேண்டுமோ, அந்த உறுப்பு கொடுக்கப்பட்ட உறுப்பின் "விகிதப்படுத்தும் காரணி" எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $\sqrt{3}$ இன் விகிதப்படுத்தும் காரணி $\sqrt{3}$ ($\therefore \sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ ஒரு விகிதமுறு எண்)

(ii) $\sqrt[7]{5^4}$ இன் விகிதப்படுத்தும் காரணி $\sqrt[7]{5^3}$ (பெருக்கற்பலன் $=\sqrt[7]{5^7}=5$, ஒரு விகிதமுறு எண்)

சிந்தனைக் களம் :

1. மேலே கண்ட எடுத்துக்காட்டு (i) இல் $\sqrt{12}$ என்பதும் ஒரு விகிதப்படுத்தும் காரணியா? $\sqrt{3}$ –க்கு வேறு ஏதேனும் எண்கள் விகிதப்படுத்தும் காரணியாக இருக்க முடியுமா?

2. எடுத்துக்காட்டு (ii) $\sqrt[7]{5^3}$ –க்கு வேறு ஏதேனும் எண்கள் விகிதப்படுத்தும் காரணியாக இருக்க இயலுமா?

3. முறுடைக் கொண்ட ஒரு விரிவாக்கத்திற்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விகிதப்படுத்தும் காரணிகள் இருக்கும்போது, அவற்றுள் மிகச் சிறியதை விகிதப்படுத்தும் காரணியாகக் கணக்கிடுவதற்கு நாம் எடுத்துக்கொண்டால் நமக்கு ஏதேனும் பயன் உண்டா?

2-Real Numbers_TM.indd 73 26-12-2019 13:09:35

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

கீழ்க்காணும் ஒவ்வொன்றுக்கும் விகிதப்படுத்தும் காரணியைக் கண்டறிந்து அவற்றைச் சரிபார்க்க.

(i) $\sqrt{18}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[3]{49}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{8}}$

2.7.1 இணை முறுடுகள்(Conjugate Surds)

$3+\sqrt{2}$ என்பதன் விகிதப்படுத்தும் காரணியை உம்மால் ஊகிக்க முடிகிறதா? இந்த முறுடானது ஒரு விகிதமுறு பகுதியையும், ஒரு மூலக்குறியீட்டுப் பகுதியையும் கொண்டுள்ளது. இந்நிலைகளில் விகிதப்படுத்தும் காரணி ஓர் சிறப்பு மிக்க வடிவம் ஆகும்.

$3+\sqrt{2}$ இன் விகிதப்படுத்தும் காரணி $3-\sqrt{2}$. இதை மிகவும் எளிமையாகச் சரிபார்க்கலாம்.

$$\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right) = 3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2 = 9-2 = 7 \text{ (ஒரு விகிதமுறு எண்)}$$

a, b என்பன விகிதமுறு எண்கள் எனில், $a+\sqrt{b}$ இன் விகிதப்படுத்தும் காரணி என்ன? $a-\sqrt{b}$ என்பது சரியா? சரிபார்க்க. a, b என்பன விகிதமுறு எண்கள் எனில், $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ என்பதன் விகிதப்படுத்தும் காரணி எது? $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ என்பது சரியா அல்லது $-\sqrt{a}+\sqrt{b}$ என்பது சரியா? ஆராய்க.

$a+\sqrt{b}$ மற்றும் $a-\sqrt{b}$ என்ற வடிவத்தில் உள்ள முறுடுகள் **இணை முறுடுகள்** என அழைக்கப்படுகின்றன. $\sqrt{b}+a$ இன் இணை எது? $-\sqrt{b}+a$ என்பது சரியா? முறுடுக்கு முன்னால் உள்ள குறியை மாற்றுவதன் மூலம் அந்த எண்ணின் இணை முறுடைப் பெறலாம் என்பதை அறிய முடிகிறது !

எடுத்துக்காட்டு 2.27 பகுதியை விகிதப்படுத்துக. (i) $\frac{7}{\sqrt{14}}$ (ii) $\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$

தீர்வு:

(i) விகிதப்படுத்தும் காரணியான $\sqrt{14}$ ஆல் பகுதி மற்றும் தொகுதியைப் பெருக்குக.

$$\frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}}\times\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{7\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

(ii)
$$\frac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \frac{\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)}\times\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5+\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}{5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{5^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times5\times\sqrt{3}}{25-3} = \frac{25+3+10\sqrt{3}}{22} = \frac{28+10\sqrt{3}}{22} = \frac{2\times[14+5\sqrt{3}]}{22}$$

$$= \frac{14+5\sqrt{3}}{11}$$

2-Real Numbers_TM.indd 74 26-12-2019 13:09:37

பயிற்சி 2.7

1. பகுதியை விகிதப்படுத்துக.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{50}}$ (ii) $\frac{5}{3\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{18}}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

2. பகுதியை விகிதப்படுத்திச் சுருக்குக.

   (i) $\frac{\sqrt{48}+\sqrt{32}}{\sqrt{27}-\sqrt{18}}$ (ii) $\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

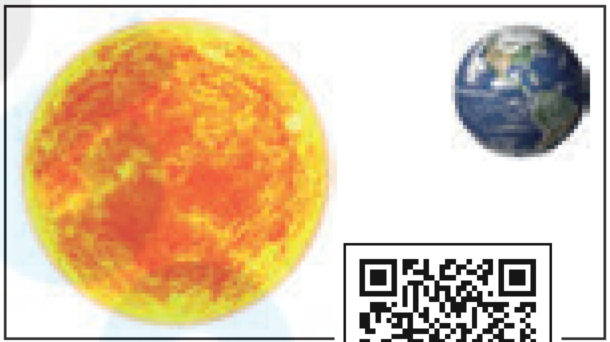
   (iii) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{6}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}+2}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}-2}$

3. $\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}+2}=a\sqrt{7}+b$ எனில், a மற்றும் b இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

4. $x=\sqrt{5}+2$ எனில், $x^2+\frac{1}{x^2}$ இன் மதிப்பு காண்க.

5. $\sqrt{2}=1.414$ எனில், $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ இன் மதிப்பை 3 தசம இடத் திருத்தமாகக் காணவும்.

2.8 அறிவியல் குறியீடு (Scientific Notation)



AJ1N8N

கதிரவனின் விட்டம் 13,92,000 கி.மீ மற்றும் பூமியின் விட்டம் 12,740 கி.மீ இவற்றை ஒப்பிடச் சொன்னால், அது கடினமானதாகத் தோன்றும். மாறாக, 13,92,000 என்பதை 1.392×10^6 எனவும் 12,740 என்பதை 1.274×10^4 எனவும் கொடுத்தால் அது எளிமையாகத் தோன்றும். இந்த வகையிலான வடிவமைப்பு அறிவியல் குறியீடு எனப்படும்.

இங்கு $\frac{1.392\cdot10^6}{1.274\cdot10^4}\simeq\frac{14}{13}\cdot10^2\simeq108$

இதிலிருந்து, கதிரவனுக்குள் தோராயமாக 108 பூமியை வரிசையாக அடுக்கி வைக்க இயலும் என்பதைத் தற்போது உம்மால் கற்பனை செய்ய முடிகிறதா!

அறிவியல் குறியீடு என்பது மிகப்பெரிய அல்லது மிகச் சிறிய எண்களைத் தசமக் குறியீட்டில் வடிவமைக்கும் ஒரு வழிமுறை ஆகும். இது எண்களை எளிமையாகப் பதிவு செய்யவும் பயன்படுத்தவும் அனுமதிக்கிறது.

2.8.1 அறிவியல் குறியீட்டில் தசம எண்களை எழுதுதல் (Writing a Decimal Number in Scientific Notation)

ஓர் எண்ணை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதக் கீழ்க்காணும் வழிமுறைகள் பயனுள்ளதாக அமையும்.

2-Real Numbers_TM.indd 75 26-12-2019 13:09:38

(i) தசமப் புள்ளிக்கு இடப்பக்கம் ஒரேயொரு பூச்சியமற்ற எண் இருக்குமாறு, தசமப் புள்ளியை நகர்த்துக.

(ii) பழைய தசமப் புள்ளிக்கும் புதிய தசமப் புள்ளிக்கும் இடையில் உள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடுக. இதை 'n' என்க. இதை 10 இன் அடுக்கில் 10^n என எழுத வேண்டும்.

(iii) தசமப் புள்ளியானது இடப்பக்கம் நகர்த்தப்பட்டிருந்தால் அடுக்கு 'n' ஆனது மிகை எண் ஆகும். அது வலப்பக்கம் நகர்த்தப்பட்டிருந்தால் அடுக்கு 'n' ஆனது குறை எண் ஆகும்.

N என்ற எண்ணை $N = a \times 10^n$ என எழுதலாம். இங்கே, $1 \le a < 10$, 'n' ஒரு முழு) என்றவாறு குறித்தலே அறிவியல் குறியீடு எனப்படும்.

கீழே அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 10 அடிமான எளிய எடுத்துக்காட்டுகள் மேற்கண்ட விளக்கத்தைத் தெளிவுபடுத்தும்.

தசமப் புள்ளி வடிவம்	அறிவியல் குறியீடு
100	1×10^2
1,000	1×10^3
10,000	1×10^4
1,00,000	1×10^5
10,00,000	1×10^6
1,00,00,000	1×10^7

தசமப் புள்ளி வடிவம்	அறிவியல் குறியீடு
0.01	1×10^{-2}
0.001	1×10^{-3}
0.0001	1×10^{-4}
0.00001	1×10^{-5}
0.000001	1×10^{-6}
0.0000001	1×10^{-7}

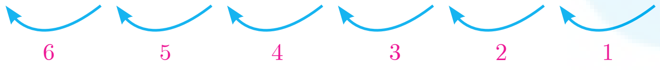
மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.28 அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.

(i) 9768854 (ii) 0.04567891 (iii) 72006865.48

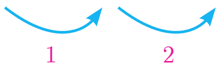
தீர்வு

(i) 9 7 6 8 8 5 4 . 0 $= 9.768854 \times 10^6$



தசமப் புள்ளியானது 6 இடங்கள் இடப்பக்கமாக நகர்த்தப்பட்டுள்ளது. எனவே, $n = 6$.

(ii) 0 . 0 4 5 6 7 8 9 1 $= 4.567891 \times 10^{-2}$



தசமப் புள்ளியானது இரண்டு இடங்கள் வலப்பக்கமாக நகர்த்தப்பட்டுள்ளது. எனவே, $n = -2$.

(iii) 7 2 0 0 6 8 6 5 . 4 8 $= 7.20068654 8 \times 10^7$

தசமப் புள்ளியானது 7 இடங்கள் இடப்பக்கமாக நகர்த்தப்பட்டுள்ளது. எனவே, $n = 7$.

2-Real Numbers_TM.indd 76 26-12-2019 13:09:39

2.8.2 அறிவியல் குறியீட்டைத் தசம வடிவிற்கு மாற்றுதல் (Converting Scientific Notation to Decimal Form)

அறிவியல் குறியீட்டில் உள்ள ஓர் எண்ணைப் பின்வரும் வழிமுறைகளைப் பின்பற்றி எளிமையாகத் தசம வடிவிற்கு மாற்றலாம்.

(i) தசம எண்ணை எழுதுக.

(ii) 10 இன் அடுக்கில் உள்ள எண் மிகை எண் எனில் வலப்பக்கமாகவும், குறை எண் எனில் இடப்பக்கமாகவும், அடுக்கில் உள்ள எண்ணிற்குச் சமமாகத் தசமப் புள்ளியை நகர்த்துக. தேவைப்படும் இடத்தில் பூச்சியத்தைச் சேர்த்துக்கொள்க.

(iii) அந்த எண்ணைத் தசம வடிவில் மீண்டும் எழுதுக.

எடுத்துக்காட்டு 2.29 கீழ்க்காணும் எண்களைத் தசம வடிவில் எழுதுக.

(i) 6.34×10^{4} (ii) 2.00367×10^{-5}

தீர்வு

(i) 6.34×10^{4}

$\Rightarrow$ 6 . 3 4 0 0 $= 63400$

1 2 3 4

(ii) 2.00367×10^{-5}

0 0 0 0 0 2 . 0 0 3 6 7

5 4 3 2 1

$= 0.0000200367$

2.8.3 அறிவியல் குறியீட்டில் உள்ள எண்களின் கணக்கீடுகள் (Arithmetic of Numbers in Scientific Notation)

(i) அறிவியல் குறியீட்டில் உள்ள எண்களின் அடுக்குகள் சமமாக இருந்தால், அவற்றின் கூட்டல் (அல்லது கழித்தல்) செயலை எளிமையாகச் செய்துவிடலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.30 பூமியின் நிறை 5.97×10^{24} கி.கி., நிலாவின் நிறை 0.073×10^{24} கி.கி. இவற்றின் மொத்த நிறை என்ன?

தீர்வு

மொத்த நிறை $= 5.97\times10^{24}$ கி.கி. $+$ 0.073×10^{24} கி.கி.

$= (5.97 + 0.073)\times10^{24}$ கி.கி.

$= 6.043\times10^{24}$ கி.கி.

2-Real Numbers_TM.indd 77 26-12-2019 13:09:39

(ii) மூலக்குறியீட்டு விதிகளைச் சரியாகப் பயன்படுத்தி, அறிவியல் குறியீட்டில் உள்ள எண்களின் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தலை எளிமையாகச் செய்து முடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.31 கீழ்க்காண்பவற்றை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.

(i) $(50000000)^4$ (ii) $(0.00000005)^3$ (iii) $(300000)^3 \times (2000)^4$ (iv) $(4000000)^3 \div (0.00002)^4$

தீர்வு

(i)
$$\begin{aligned}(50000000)^4 &= \left(5.0\times10^7\right)^4\\ &= (5.0)^4\times\left(10^7\right)^4\\ &= 625.0\times10^{28}\\ &= 6.25\times10^2\times10^{28}\\ &= 6.25\times10^{30}\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}(0.00000005)^3 &= \left(5.0\times10^{-8}\right)^3\\ &= (5.0)^3\times\left(10^{-8}\right)^3\\ &= (125.0)\times(10)^{-24}\\ &= 1.25\times10^2\times10^{-24}\\ &= 1.25\times10^{-22}\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}&(300000)^3\times(2000)^4\\ &= \left(3.0\times10^5\right)^3\times\left(2.0\times10^3\right)^4\\ &= (3.0)^3\times\left(10^5\right)^3\times(2.0)^4\times\left(10^3\right)^4\\ &= (27.0)\times\left(10^{15}\right)\times(16.0)\times\left(10^{12}\right)\\ &= \left(2.7\times10^1\right)\times\left(10^{15}\right)\times\left(1.6\times10^1\right)\times\left(10^{12}\right)\\ &= 2.7\times1.6\times10^1\times10^{15}\times10^1\times10^{12}\\ &= 4.32\times10^{1+15+1+12} = 4.32\times10^{29}\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}&(4000000)^3\div(0.00002)^4\\ &= \left(4.0\times10^6\right)^3\div\left(2.0\times10^{-5}\right)^4\\ &= (4.0)^3\times\left(10^6\right)^3\div(2.0)^4\times\left(10^{-5}\right)^4\\ &= \frac{64.0\times10^{18}}{16.0\times10^{-20}}\\ &= 4\times10^{18}\times10^{+20}\\ &= 4.0\times10^{38}\end{aligned}$$

சிந்தனைக் களம்:

1. 2.83104 என்ற எண்ணை, இரு எண்களின் பெருக்கற் பலனாக அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.
2. 2.83104 என்ற எண் ஈவாகக் கிடைக்குமாறு இரு எண்களை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.

2-Real Numbers_TM.indd 78 26-12-2019 13:09:42

பயிற்சி 2.8

1. கீழ்க்காணும் எண்களை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.
   (i) 569430000000 (ii) 2000.57
   (iii) 0.0000006000 (iv) 0.0009000002

2. கீழ்க்காணும் எண்களைத் தசம வடிவில் எழுதுக.
   (i) 3.459×10^{6} (ii) 5.678×10^{4}
   (iii) 1.00005×10^{-5} (iv) 2.530009×10^{-7}

3. கீழ்க்காண்பவற்றைச் சுருக்கி அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.
   (i) $(300000)^{2}\times(20000)^{4}$ (ii) $(0.000001)^{11}\div(0.005)^{3}$
   (iii) $\{(0.00003)^{6}\times(0.00005)^{4}\}\div\{(0.009)^{3}\times(0.05)^{2}\}$

4. கீழ்க்காணும் தகவலை அறிவியல் குறியீட்டில் எழுதுக.
   (i) உலக மக்கள்தொகை சுமார் 7000,000,000.
   (ii) ஓர் ஒளி ஆண்டு என்பது 9,460,528,400,000,000 கி.மீ. தூரத்தைக் குறிக்கிறது.
   (iii) ஓர் எலக்ட்ரானின் நிறை
   0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 938 22 கி.கி

5. சுருக்குக: (i) $(2.75\times10^{7})+(1.23\times10^{8})$ (ii) $(1.598\times10^{17})-(4.58\times10^{15})$
   (iii) $(1.02\times10^{10})\times(1.20\times10^{-3})$ (iv) $(8.41\times10^{4})\div(4.3\times10^{5})$

செயல்பாடு - 3

கதிரவனிலிருந்து கோள்களுக்கு உள்ள சராசரித் தொலைவு பின்வருமாறு பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. விடுபட்ட மதிப்புகளை உரிய வடிவில் எழுதுக. மேலும், கோள்களுக்கு உள்ள தொலைவின் அளவுகளைக் கதிரவனுக்கு அருகிலிருந்து வரிசைப்படுத்துக.

கோள்	தசம வடிவம்(கிமீ)	அறிவியல் குறியீடு (கிமீ)
வியாழன்		7.78×10^{8}
செவ்வாய்	58000000	
புதன்		2.28×10^{8}
யுரேனஸ்	2870000000	
வெள்ளி	108000000	
நெப்டியூன்	4500000000	
பூமி		1.5×10^{8}
சனி		1.43×10^{8}

2-Real Numbers_TM.indd 79 26-12-2019 13:09:43

பயிற்சி 2.9

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

AJAJAB

1. n என்பது ஓர் இயல் எண் எனில் $\sqrt{n}$ என்பது
   (1) எப்போதும் ஓர் இயல் எண். (2) எப்போதும் ஒரு விகிதமுறா எண்.
   (3) எப்போதும் ஒரு விகிதமுறு எண் (4) ஒரு விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்

2. பின்வருவனவற்றுள் எது உண்மையல்ல?
   (1) ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணும் மெய்யெண்.
   (2) ஒவ்வொரு முழுக்களும் விகிதமுறு எண்.
   (3) ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் விகிதமுறா எண்.
   (4) ஒவ்வோர் இயல் எண்ணும் ஒரு முழு எண்.

3. இரு விகிதமுறா எண்களின் கூடுதல் பற்றிய கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் எது உண்மை?
   (1) எப்போதும் ஒரு விகிதமுறா எண்.
   (2) ஒரு விகிதமுறு அல்லது விகிதமுறா எண்ணாக இருக்கலாம்.
   (3) எப்போதும் ஒரு விகிதமுறு எண்.
   (4) எப்போதும் ஒரு முழுக்களாகும்.

4. பின்வருவனவற்றுள் எது முடிவுறு தசமத் தீர்வு?
   (1) $\frac{5}{64}$ (2) $\frac{8}{9}$ (3) $\frac{14}{15}$ (4) $\frac{1}{12}$

5. பின்வருவனவற்றுள் எது விகிதமுறா எண்?
   (1) $\sqrt{25}$ (2) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ (3) $\frac{7}{11}$ (4) π

6. 2 மற்றும் 2.5 என்ற எண்களுக்கிடையே உள்ள ஒரு விகிதமுறா எண்
   (1) $\sqrt{11}$ (2) $\sqrt{5}$ (3) $\sqrt{2.5}$ (4) $\sqrt{8}$

7. $\frac{1}{3}$ ஐ எந்த மிகச் சிறிய விகிதமுறு எண்ணால் பெருக்கினால் அதன் தசம விரிவு ஓர் இலக்கத்தோடு முடிவுறு தசம விரிவாக அமையும்?
   (1) $\frac{1}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) 3 (4) 30

8. $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ எனில் $\frac{5}{7}$ இன் மதிப்பு என்ன?
   (1) $0.\overline{142857}$ (2) $0.\overline{714285}$ (3) $0.\overline{571428}$ (4) 0.714285

9. பின்வருவனவற்றுள் பொருந்தாததைக் காண்க.
   (1) $\sqrt{32} \times \sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ (3) $\sqrt{72} \times \sqrt{8}$ (4) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{18}}$

2-Real Numbers_TM.indd 80 26-12-2019 13:09:46

10. $0.3\overline{4} + 0.3\overline{4} =$

(1) $0.6\overline{87}$ (2) $0.\overline{68}$ (3) $0.6\overline{8}$ (4) $0.68\overline{7}$

11. கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் எது தவறு?

(1) 25 இன் வர்க்கமூலம் 5 அல்லது -5 (3) $\sqrt{25} = 5$

(2) $-\sqrt{25} = -5$ (4) $\sqrt{25} = \pm 5$

12. பின்வருவனவற்றுள் எது விகிதமுறு எண் அல்ல?

(1) $\sqrt{\frac{8}{18}}$ (2) $\frac{7}{3}$ (3) $\sqrt{0.01}$ (4) $\sqrt{13}$

13. $\sqrt{27} + \sqrt{12} =$

(1) $\sqrt{39}$ (2) $5\sqrt{6}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $3\sqrt{5}$

14. $\sqrt{80} = k\sqrt{5}$, எனில் $k=$?

(1) 2 (2) 4 (3) 8 (4) 16

15. $4\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} = \;=$

(1) $6\sqrt{10}$ (2) $8\sqrt{21}$ (3) $8\sqrt{10}$ (4) $6\sqrt{21}$

16. $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ இன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றிய பின் சுருங்கிய வடிவம்

(1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

17. $\left(2\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^2$ இன் சுருங்கிய வடிவம்

(1) $4\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ (2) $22 - 4\sqrt{10}$ (3) $8 - 4\sqrt{10}$ (4) $2\sqrt{10} - 2$

18. $(0.000729)^{\frac{-3}{4}} \times (0.09)^{\frac{-3}{4}} =$ ______

(1) $\frac{10^3}{3^3}$ (2) $\frac{10^5}{3^5}$ (3) $\frac{10^2}{3^2}$ (4) $\frac{10^6}{3^6}$

19. If $\sqrt{9^x} = \sqrt[3]{9^2}$, எனில், $x =$ ______

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

20. ஒரு செவ்வக வடிவ வீட்டு மனையின் நீளம் மற்றும் அகலங்கள் முறையே 5×10^5 மற்றும் 4×10^4 மீட்டர் எனில், அதன் பரப்பளவு என்ன?

(1) 9×10^1 மீ^{2} (2) 9×10^9 மீ^{2} (3) 2×10^{10} மீ^{2} (4) 20×10^{20} மீ^{2}

2-Real Numbers_TM.indd 81 26-12-2019 13:09:49

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- $\frac{p}{q}$, $q\neq 0$ என்ற வடிவில் உள்ள எண்ணின் தசம விரிவானது முடிவு பெறும் எனில், $\frac{p}{q}$ இன் தசம விரிவு முடிவுறு தசமவிரிவு (Terminating decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறு தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் முடிவுறு தசம எண் எனப்படும்
- $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ என்ற எண்ணின் தசம விரிவு காணும்போது எந்நிலையிலும் மீதி பூச்சியமாகவில்லை எனில், ஈவில் மீண்டும் மீண்டும் வரும் இலக்கங்களின் தொகுதி கிடைக்கும். இந்நிலையில் $\frac{p}{q}$ இன் தசம விரிவு முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவு (Non-terminating and recurring decimal expansion) எனப்படும். முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் முடிவுறாச் சுழல் தசம எண் எனப்படும்..
- $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$ வடிவில் உள்ள விகிதமுறு எண்ணை $\frac{p}{2^m \times 5^n}$ $(p \in \mathbb{Z}$ மற்றும் $m, n \in \mathbb{W})$ என்ற வடிவில் எழுத முடியுமானால், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறு தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும். அவ்வாறில்லையெனில், அந்த விகிதமுறு எண் முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவினைப் பெற்றிருக்கும்
- ஒரு விகிதமுறு எண்ணினை முடிவுறு தசம விரிவாகவோ அல்லது முடிவுறாச் சுழல் தசம விரிவாகவோ குறிப்பிடலாம்.
- முடிவுறாச் சுழல் தன்மையற்ற தசம விரிவினைக் கொண்ட எண் ஒரு விகிதமுறா எண் ஆகும். எனவே, ஒரு விகிதமுறா எண்ணை $\frac{p}{q}$, (p, q முழுக்கள் மற்றும் $q \neq 0$) என்ற வடிவில் எழுதமுடியாது.
- மெய்யெண்களின் கணமானது விகிதமுறு மற்றும் விகிதமுறா எண்களின் சேர்ப்புக் கணமாகும்.
- ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவோ அல்லது விகிதமுறா எண்ணாகவோ இருக்கும்.
- ஒரு மெய்யெண் விகிதமுறு எண் அல்ல எனில், அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும்.
- a என்பது மிகை விகிதமுறு எண், n ஒரு மிகை முழு மற்றும் $\sqrt[n]{a}$ ஒரு விகிதமுறா எண் எனில், $\sqrt[n]{a}$ என்பது ஒரு முறுடு எனப்படும்.
- m, n என்பன மிகை முழுக்கள், a, b என்பன மிகை விகிதமுறு எண்கள் எனில்,

  $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \sqrt[n]{a^n}$ (ii) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (iii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ (iv) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- ஒரு முறுடை மற்றொரு முறுடால் பெருக்கி விகிதமுறு எண்ணைப் பெறும் செயல்முறை விகிதப்படுத்துதல் எனப்படும்.
- N என்ற எண்ணை $N = a \times 10^n$ என எழுதலாம். இங்கே, $1 \leq a < 10$, (n ஒரு முழு) என்றவாறு குறித்தல் அறிவியல் குறியீடு எனப்படும்.

2-Real Numbers_TM.indd 82 26-12-2019 13:09:50

இணையச் செயல்பாடு–1

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி–1 கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரிதத் துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

படி–2 “Real Numbers” என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும் . இப்பக்கத்தில் பல பணித்தாள்கள் காணப்படும். புதிய கணக்குகளைச் செய்து பார்க்க “Square root spiral – 1st part” என்பதைச் சொடுக்கவும்.

படி–3 Steps எனும் நழுவலை இழுக்கவும். படிப்படியாக 2,3,4,5 என்ற எண்களின் வர்க்கமூல வடிவம் தோன்றும்.

படி–4 “Unit segment” எனும் நழுவலை இழுப்பதால் வர்க்கமூல வடிவத்தைப் பெரிதாகவும் தெளிவாகவும் காணலாம்.

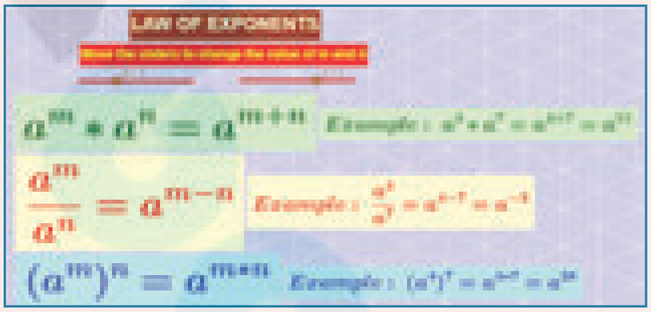
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

வர்க்கமூலம் : https://www.ggbm.at/m6GQc6mQ

B563_9_MAT_TM_T3

இணையச் செயல்பாடு–2

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



படி – 1: கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "Real Numbers" என்னும் பணித்தாளின் பக்கத்திற்குச் செல்க. இப்பணித்தாளில்

1. Rationalising the denominator for surds

2. Law of exponents ஆகிய இரண்டு செயல்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

முதல் செயல்பாட்டில், காரணிப்படுத்துவதற்கான வகுத்திகளும் எடுத்துக்காட்டுகளும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். மேலும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கட்டங்களில் a மற்றும் b இன் மதிப்புகளை உள்ளீடு செய்தோ மதிப்புகளை மாற்றியோ காரணிகளின் மதிப்புகளை அறிக.

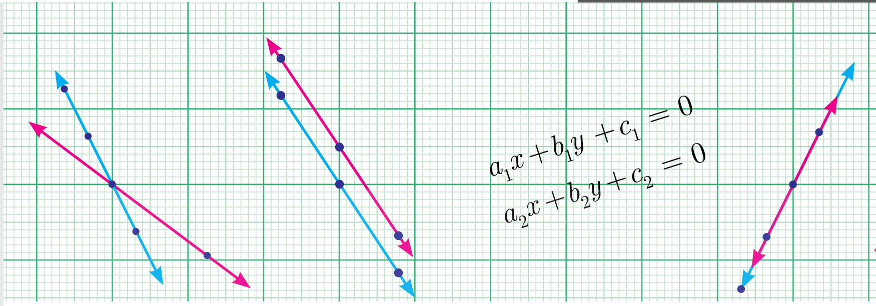
படி - 2 : இரண்டாம் செயல்பாட்டில் அடுக்கு விதி கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். மேலும் வலப்பக்கத்தில் எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். மதிப்புகளை மாற்றுவதற்கு m மற்றும் n நழுவல்களை நகர்த்தி, விடைகளைச் சரிபார்க்கவும்

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

மெய்யெண்கள் **https://ggbm.at/BYEWDpHU or Scan the QR Code.**

B563_9_MAT_TM_T3

3



இயற்கணிதம்

இயற்கணிதத்தைப் போல் வேறெதுவும் நடைமுறை வாழ்க்கையோடு தொடர்புடையது இல்லை என உறுதியாகக் கூற முடியும். - பிரான் லேபோவிச்

டையோபான்டஸ்

அலெக்ஸாண்டிரியாவின் டையோபான்டஸ் (Diophantus) 84 ஆண்டுகள் வாழ்ந்த கணித மேதையாவார். இவர் கி.பி.(பொ.ஆ) 201 இக்கும் கி.பி. (பொ.ஆ) 215 இக்கும் இடையில் பிறந்தவர். இவர் இயற்கணிதவியல் என்ற தொடர் புத்தகத்தின் ஆசிரியர் ஆவார். இவரது புத்தகங்கள் இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு பற்றி அமைந்தனவாகும். மேலும் இயற்கணிதத்தின் தந்தை எனவும் அழைக்கப்படுகிறார்.

கற்றல் விளைவுகள்

- பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகைப்படுத்துதலைப் புரிந்துகொள்ளுதல் மற்றும் அடிப்படைச் செயல்பாடுகளைச் செய்யும் திறனடைதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மதிப்புகளைக் காணல் மற்றும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- மீதித் தேற்றம் மற்றும் காரணித் தேற்றத்தைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல்.
- இருபடி மற்றும் முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.
- தொகுமுறை வகுத்தல் முறையில் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்துதல்.
- பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு மீப்பெரு பொது வகுத்தி காணுதல்.
- கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் வரைதல்.
- இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளை வரைபட முறை, இயற்கணித முறைகளில் தீர்த்தல்
- இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவு மற்றும் ஒருங்கமைவற்ற தன்மைகளைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.

CRLVD2

3 Algebra_TM_T1.indd 84 26-12-2019 12:14:42

3.1 அறிமுகம்

பல்லுறுப்புக் கோவைகளை ஏன் கற்க வேண்டும்?

இயற்கணிதத்தில் உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பற்றிய அனைத்தையும் இந்த இயல் உள்ளடக்கியது. இதில் உள்ளவை நீங்கள் முன்னரே சந்தித்த, ஆனால் முழுமையாக அறிமுகப்படுத்தப்படாத நண்பர்களே! இதற்குப் பிறகு வரும் அனைத்துக் கணிதப் பயணத்திலும், இவர்கள் உங்கள் நண்பர்களாகப் பயணிக்கத்தக்க வகையில் இவர்களை நாங்கள், உங்களுக்கு முழுமையாக அறிமுகப்படுத்த உள்ளோம்.

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

இது ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை. பார்ப்பதற்குச் சிறப்பு வாய்ந்ததாகத் தோன்றவில்லை. இல்லையா? நாம் முன்பே நிறைய இயற்கணிதக் கோவைகளைப் பார்த்திருக்கிறோம். எனவே, ஏன் இவற்றைப் பற்றிக் கவலைப்பட வேண்டும்? கணிதத்தில், பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஏன் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவை என்பதற்குப் பல காரணங்கள் உள்ளன.

இப்போது, அவற்றின் பயன்பாட்டை அறிய ஓர் எடுத்துக்காட்டைக் காண்போம். நாம் எண் கணிதத்தில் நிறையக் கற்று, அதன்பின் இயற்கணிதத்தில் தெரியாத எண்களைக் கொண்ட மாறிகள் பற்றிச் சிந்தித்தோம் என்பதை நினைவில் கொள்ளுங்கள்.

உண்மையில், நாம் இப்போது எண்களிடம் திரும்பச் சென்று, இயற்கணித மொழியில் அவற்றை எழுத முயல்வோம்.

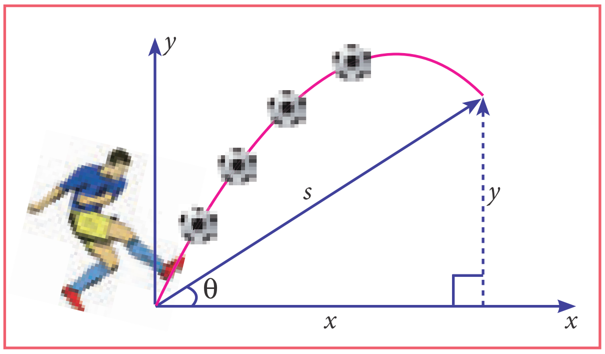
5418 என்ற ஓர் எண்ணைக் கவனியுங்கள். இது உண்மையில் "5" ஆயிரம் "4" நூறு "1" பத்து மற்றும் "8" ஒன்றுகள் .

இதைக் பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$5 \times 1000 + 4 \times 100 + 1 \times 10 + 8$$

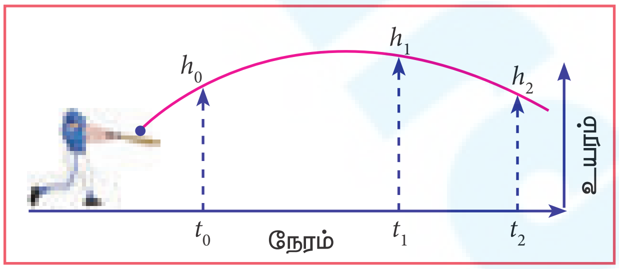
மேலும், இதனை

$5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8$ என்றவாறும் எழுதலாம்:



படம் 3.1

இது $5x^3 + 4x^2 + x + 8$ என்ற வடிவத்தில் உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது தெளிவு. இந்த வடிவத்தில் எழுதுவது எவ்வாறு பயனளிக்கும்? நாம் எப்போதும் எண்களைத் தசமத்தில் எழுதுகிறோம்தானே. ஆகையால் எப்போதும் $x = 10$. பின் இதில் என்ன வேடிக்கை? வகுத்தல் விதிகள் நினைவுள்ளதா? ஓர் எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 3 ஆல் வகுபட்டால் மட்டுமே, அந்த எண் 3 ஆல் வகுபடும் என்பதை நினைவு கொள்ளுங்கள். x என்பதை 3 ஆல் வகுத்த பிறகு மீதி 1 வருகிறதெனில், x^2, x^3, போன்றவற்றிற்கும் இது பொருந்தும் என்பதைக் கவனியுங்கள். இவை எல்லாம் 3 ஆல் வகுபட்ட பிறகு, 1 ஐ மீதியாகத் தருகின்றன. எனவே ஒவ்வோர் இலக்கத்தையும் 1 ஆல் பெருக்கி அவை அனைத்தையும் கூட்டினால், மொத்த இலக்கங்களின் கூடுதலை நீங்கள் பெறுகிறீர்கள். அது 3 ஆல் வகுபடும் எனில், மொத்த எண்ணிற்கும் அதேதான். 9 ஆல் வகுபடும் விதி, 2 அல்லது 5 ஆல் வகுபடும் விதி போன்றவற்றையும் இதேபோல



படம் 3.2

3 Algebra_TM_T1.indd 85 26-12-2019 12:14:43

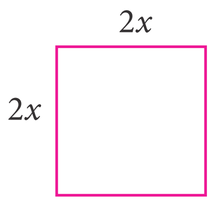
எளிதாக மெய்பிக்க இயலும். நமது நோக்கம் வகுத்தல் விதிகளை நிரூபிப்பது அல்ல. ஆனால் எண்களைப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் குறிப்பிடும்போது அவை பல புதிய எண் அமைப்புகளை நமக்கு அளிக்கின்றன என்பதை வெளிப்படுத்துவதே ஆகும். சொல்லப் போனால் எண்கள் மட்டுமல்லாமல் பலவகை பொருட்களைப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் குறிப்பிடும்போது, அவற்றிலிருந்து நாம் பலவற்றைக் கற்றுக்கொள்ள இயலும்.

இயற்கணிதத்தில் x^2, $5x^2-3$, $2x+7$ போன்றவற்றை x இன் சார்புகளாக நாம் உணரலாம். x மாறும்போது, சார்புகள் எவ்வாறு மாறுகின்றன என்பதைக் காண்பதற்கு நாம் ஒரு வரைபடம் வரைந்தால், அது சார்புகளின் செயல்பாட்டைப் புரிந்து கொள்ள மிகவும் உதவியாக இருக்கும். இப்போது அறிவியல், பொறியியல், வணிக ஆய்வுகள், பொருளாதாரம் மட்டுமல்லாமல் கணிதத்திலும் கூட நாம் சந்திக்கும் நல்ல பல சார்புகள் முழுவதுமாகப் பல்லுறுப்புக் கோவையைப் பிரதிபலிக்காவிடினும், அவை தோராயமாகப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளாக அமைகின்றன. உண்மையில், பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தோராயமான சார்புகள் உயர் கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருப்பொருளாகப் பயன்படுகின்றன.மேலும் இதே கருத்தின் அடிப்படையில் செயல்பட்டு பலர் தங்கள் வாழ்வியல் முறையை எளிதாக்குகின்றனர்.

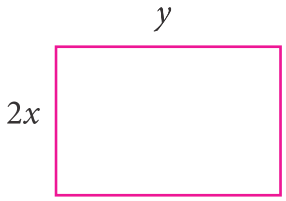
படம் 3.3

உயிரியல், கணினி அறிவியல், தொடர்பு அமைப்புகள் போன்றவற்றில் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் மிகப் பரவலாகப் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. இப்பட்டியல் தொடர்ந்துகொண்டே செல்கிறது. கொடுக்கப்பட்ட படங்கள் (படம் 3.1, 3.2, மற்றும் 3.3) ஓர் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் குறிக்கலாம். நாம், பல்லுறுப்புக் கோவைகள் என்ன என்பதை மட்டும் கற்றுக்கொள்ளப் போவதில்லை. அதற்கு மேலும் எண்களைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கூட்டல், பெருக்கல், வகுத்தல் போன்றவற்றை கற்றுள்ளோமோ அதே போல் பல்லுறுப்புக் கோவைகளிலும் கற்றுக்கொள்ள இருக்கிறோம்.

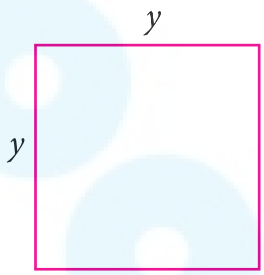
கொடுக்கப்பட்ட படங்களைக் கவனியுங்கள்



படம் 3.4



படம் 3.5



படம் 3.6

மேலே உள்ள 3 படங்களின் மொத்தப் பரப்பளவு $4x^2 + 2xy + y^2$, இந்தக் கோவையை நாம் இயற்கணிதக் கோவை என்று அழைக்கிறோம். இங்கே x மற்றும் y –க்கு வெவ்வேறான மதிப்புகள் அளிக்கும்போது வெவ்வேறு பரப்பளவு மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம். x மற்றும் y பக்கங்களின் மதிப்புகள் மாறக்கூடியதாக உள்ளதால், அவை மாறிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே மாறி என்பது வெவ்வேறு எண் மதிப்புகளைக் கொண்ட குறியீடு ஆகும்.

வழக்கமாக மாறிகள் x, y, z போன்ற எழுத்துகளால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. மேற்கண்ட இயற்கணிதக் கோவையில் உள்ள 4, 2 என்பவை மாறிலிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன. எனவே மாறிலி என்பது நிலையான எண் மதிப்பு கொண்ட குறியீடு ஆகும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 86 26-12-2019 12:14:45

மாறிலிகள் (Constants)

எந்த மெய்யெண்ணும் மாறிலியே. மாறிலிகள் மற்றும் எண்கணிதச் செயல்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி எண் கோவைகளை அமைக்கலாம்.

மாறிலிகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள் $1, 5, -32, \frac{3}{7}, -\sqrt{2}, 8.432, 1000000$ இன்னும் பிற.

மாறிகள் (Variables)

கோவைகளில் மாறிகள் மற்றும் மாறிலிகளை இணைத்துப் பயன்படுத்தும்போது, ஒரு வரம்பிற்கு உட்பட்ட எண்களைக் குறிக்கும் வழிகளில் ஒவ்வொரு மாறிக்கும் ஒரு மதிப்பைப் பெறுகிறோம். நாம் அறிந்த $2\pi r$ ஆனது ஆரம் r உடைய வட்டத்தின் சுற்றளவைக் குறிக்கின்றது. நாம் r இன் மதிப்பை 1 செமீ, 4 செமீ, 9 செமீ … என மாற்றினால் $2\pi, 8\pi, 18\pi$ ... என்ற சுற்றளவுகள் கொண்ட பெரிய வட்டங்கள் நமக்குக் கிடைக்கும்.

இந்த $2\pi r$ கோவையானது அனைத்து வட்டங்களின் சுற்றளவுகளுக்குமான சிறிய மற்றும் துல்லியமான விளக்கமாகும். நாம் எண்கணிதச் செயல்கள் மற்றும் இயற்கணிதக் கோவைகளை இணைத்துப் பயன்படுத்தும்போது, சார்புகள் மற்றும் எண்கள் என்ற உயர்தர மொழியைப் பெறுகிறோம். மாறிகள் என அழைக்கப்படும் தெரியாத மெய்யெண்களைக் குறிக்க x, y, a, b மற்றும் பல எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

இயற்கணிதக் கோவை (Algebraic Expression)

இயற்கணிதக் கோவை என்பது நான்கு அடிப்படைக் கணிதக் குறியீடுகளின் உதவியுடன் மாறி மற்றும் மாறிலிகளால் இணைக்கப்பட்டு அமையும் கோவை ஆகும்.

இயற்கணிதக் கோவைக்கு எடுத்துக்காட்டுகள்

$$x^3 - 4x^2 + 8x - 1,\ 4xy^2 + 3x^2y - \frac{5}{4}xy + 9,\ 5x^2 - 7x + 6$$

கெழுக்கள் (Coefficients)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையில் ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள மாறிகளின் பெருக்கல் காரணியே அதன் கெழு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$x^2 + 5x - 24$ என்பது மூன்று உறுப்புகளைக் கொண்ட இயற்கணிதக் கோவையாகும். இங்கு x என்பது ஒரு மாறி. x^2 இன் கெழு 1 மற்றும் x இன் கெழு 5 ஆகும். மேலும் -24 மாறிலி ஆகும் (24 அல்ல).

செயல்பாடு 1

கீழ்க்காணும் கோவைகளை மாறி, கெழு மற்றும் மாறிலிகளாகப் பிரித்து எழுதுக.

கோவை	$x + 7$	$3y - 2$	$5x^2$	$2xy + 11$	$-\frac{1}{2}p + 7$	$-8 + 3a$
மாறி	x			x, y		
கெழு	1				$-\frac{1}{2}$	
மாறிலி	7					-8

3 Algebra_TM_T1.indd 87 26-12-2019 12:14:46

3.2 பல்லுறுப்புக் கோவைகள் (Polynomials)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது மாறிகள் மற்றும் மாறிலிகளைக் கொண்டு நான்கு அடிப்படைச் செயல்களால் இணைக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஆகும். இங்கு மாறிகளின் அடுக்குகள் குறையற்ற முழுக்கள் ஆகும்.

ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவை (Polynomial in One Variable)

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ என்ற வடிவில் அமைந்த ஓர் இயற்கணிதக் கோவை பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். இங்கு x இன் படி 'n' மேலும் $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ ஆகியவை மாறிலிகள் $(a_n \neq 0)$ மற்றும் n ஒரு முழு எண்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் பொதுவாக $f(x), g(x), p(t), q(z)$ மற்றும் $r(x)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு

இயற்கணிதக் கோவையின் மாறி எந்த மெய்யெண் மதிப்பையும் பெறலாம். எனினும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் அடுக்கு எப்பொழுதும் குறையல்லாத ஒருங்கிணைந்த அடுக்காகும். (non negative integral) அதாவது எப்பொழுதும் முழு எண்களை மட்டுமே கொண்டிருக்கும். எல்லா a இன் மதிப்பிற்கும் $a^0 = 1$ என்பதை நினைவில் கொள்க.

எடுத்துக்காட்டாக

வ. எண்.	கொடுக்கப்பட்ட கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவை / பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல எனில் காரணம்
1	$4y^3 + 2y^2 + 3y + 6$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
2	$4x^{-4} + 5x^4$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	x இன் ஓர் அடுக்கு குறை எண் (-4)
3	$m^2 + \frac{4}{5}m + 8$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
4	$\sqrt{5}\,y^2$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
5	$2r^2 + 3r - 1 + \frac{1}{r}$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	r இன் ஓர் அடுக்கு ஒரு குறை எண் $\left(\frac{1}{r} = r^{-1}\right)$
6	$8 + \sqrt{q}$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	q இன் அடுக்கு பின்ன எண் $(\sqrt{q} = q^{\frac{1}{2}})$
7	$\sqrt{8}\,p^2 + 5p - 7$	பல்லுறுப்புக் கோவை	அடுக்குகள் அனைத்தும் மிகை முழுக்கள்
8	$5n^{\frac{4}{5}} + 6n - 1$	பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல.	n இன் ஓர் அடுக்குப் பின்ன எண் $\frac{4}{5}$

பல்லுறுப்புக் கோவையின் திட்ட வடிவம் (Standard Form of a Polynomial)

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை அதன் x இன் அடுக்கைப் பொறுத்து இறங்கு வரிசையிலோ அல்லது ஏறு வரிசையிலோ எழுத இயலும். இது பல்லுறுப்புக் கோவையின் திட்ட வடிவம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, (i) $8x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 9x + 6$ (ii) $5 - 3y + 6y^2 + 4y^3 - y^4$

3 Algebra_TM_T1.indd 88 26-12-2019 12:14:48

செயல்பாடு 2

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைத் திட்ட வடிவில் எழுதுக.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	திட்ட வடிவம்
1	$5m^4 - 3m + 7m^2 + 8$	
2	$\frac{2}{3}y + 8y^3 - 12 + \sqrt{5}\,y^2$	
3	$12p^2 - 8p^5 - 10p^4 - 7$	

பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி (Degree of the Polynomial)

ஒரு மாறியில் அமைந்த பல்லுறுப்புக் கோவையில், மாறியின் மிக உயர்ந்த அடுக்கே அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி (Degree) எனப்படும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மாறிகளைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் அதன் ஒவ்வோர் உறுப்பில் உள்ள மாறிகளின் அடுக்குகளின் கூடுதல் கண்டறியப்பட்டு, அதில் மிக உயர்ந்த அடுக்கே அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியாகும்.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி என்பது மிகக் குறிப்பிடத்தக்க அடுக்காகக் கருதப்படுகிறது. x^2+5x எனும்போது x இன் மிக உயரிய மதிப்புகளுக்கு, x^2 இன் மதிப்பானது $5x$ ஐ விட மிக அதிகமாக இருக்கும். எனவே, x இன் மிக உயரிய மதிப்புகளுக்கு $x^2 + 5x$ கிட்டத்தட்ட x^2 ஐ ஒத்திருப்பதாக நாம் சிந்திக்கலாம். ஆகையினால், அடுக்கு உயர்ந்ததாக இருப்பின் அதன் ஆதிக்கமும் அதிகமாக இருக்கும். அதனால்தான், நாம் மிக உயர்ந்த அடுக்கினைப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் முக்கியத் தகவலாகப் பயன்படுத்துவதோடு, அதற்கு ஒரு பெயரையும் வைத்துள்ளோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவையில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் படியையும் காண்க. மேலும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க.

$6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$

ஒவ்வோர் உறுப்பின் படியும் பின்வருமாறு

$6ab^8$ இன் படி $(1+8) = 9$

$5a^2b^3c^2$ இன் படி $(2+3+2) = 7$

$7ab$ இன் படி $(1+1) = 2$

$4b^2c$ இன் படி $(2+1) = 3$

2 இன் படி 0 (மாறிலி உறுப்பின் படி எப்பொழுதும் பூச்சியமாகக் கருதப்படும்).

CRVREP

பல்லுறுப்புக் கோவை $6ab^8 + 5a^2b^3c^2 - 7ab + 4b^2c + 2$ யின் படி.

= மிக உயர்ந்த படியைக் கொண்ட உறுப்பின் படியாகும்

$= 9$

3 Algebra_TM_T1.indd 89 26-12-2019 12:14:48

ஒரு சிறப்பு பல்லுறுப்புக் கோவை (A Very Special Polynomial)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் கெழுவானது எந்த மெய்யெண்ணாகவும் இருக்கலாம் என நாம் கூறியிருந்தோம். ஒருவேளை கெழு பூச்சியமாக இருப்பின் என்ன நிகழும்? அந்த உறுப்பு பூச்சியமாகிவிடும். எனவே நாம் அதனை எழுதத் தேவையில்லை. சரி, மற்ற அனைத்துக் கெழுக்களும் பூச்சியம் எனில் என்னவாகும்? இப்போது அனைத்துக் கெழுக்களும் பூச்சியம் என்பதை ஏற்றுக்கொண்டு அதற்கு ஒரு பெயரை அளிப்போம்.

இவ்வாறு அனைத்துக் கெழுக்களையும் பூச்சியமாகக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைகள்.

$g(t) = 0t^4 + 0t^2 - 0t$, $h(p) = 0p^2 - 0p + 0$ என்றவாறு இருக்கும்.

மேற்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியினைப் பற்றி நாம் பேசவில்லை என்பதை உணரலாம். இவை இரண்டும் வெவ்வேறு படிகளைப் பெற்றிருப்பினும் இரண்டுமே பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவைகள்தாம்.

பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி வரையறுக்கப்படவில்லை.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகைகள் (Types of Polynomials)

(i) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவை	
ஒருறுப்புக் கோவை	ஒரே ஓர் உறுப்பைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஒருறுப்புக் கோவை எனப்படும் எடுத்துக்காட்டு : 5, 6m, 12ab
ஈருறுப்புக் கோவை	இரண்டு உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை ஈருறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $5x + 3$, $4a - 2$, $10p + 1$
மூவுறுப்புக் கோவை	மூன்று உறுப்புகளை மட்டுமே கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை மூவுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $4x^2 + 8x - 12$, $3a^2 + 4a + 10$
(ii) "படி" இன் அடிப்படையில் பல்லுறுப்புக் கோவை	
மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி பூச்சியம் எனில் அது மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $5, -7, \frac{2}{3}, \sqrt{5}$
ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி ஒன்று எனில், அது ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $410x - 7$

இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி இரண்டு எனில், அது இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $2\sqrt{5}x^2+8x-4$
முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை	பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி மூன்று எனில், அது முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை எனப்படும். எடுத்துக்காட்டு : $12y^3$, $6m^3-7m+4$

எடுத்துக்காட்டு 3.2

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் வகைப்படுத்துக.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அடிப்படையில் வகைப்பாடு
(i)	$5t^3+6t+8t^2$	3 உறுப்புகள்	மூவுறுப்புக் கோவை
(ii)	$y-7$	2 உறுப்புகள்	ஈருறுப்புக் கோவை
(iii)	$\frac{2}{3}r^4$	1 உறுப்பு	ஒருறுப்புக் கோவை
(iv)	$6y^5+3y-7$	3 உறுப்புகள்	மூவுறுப்புக் கோவை
(v)	$8m^2+7m^2$	1 (ஒத்த உறுப்புகள். எனவே $15m^2$ ஒருறுப்பு)	ஒருறுப்புக் கோவை

எடுத்துக்காட்டு 3.3

கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை அவற்றின் படிகளின் அடிப்படையில் வகைப்படுத்துக.

வ. எண்	பல்லுறுப்புக் கோவை	படி	வகை
(i)	$\sqrt[3]{4}\,z+7$	படி ஒன்று	ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை
(ii)	z^3-z^2+3	படி மூன்று	முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை
(iii)	$\sqrt{7}$	படி பூச்சியம்	மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவை
(iv)	$y^2-\sqrt{8}$	படி இரண்டு	இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவை

3.2.1 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் எண்கணிதம் (Arithmetic of Polynomials)

பல்லுறுப்புக் கோவைகள் பற்றிய அதிகத் தகவல்களை அறிந்ததோடு மட்டுமல்லாமல், அவை பல வழிகளில் வகைப்படுத்தப்படுகின்றன என்பதையும் நாம் கண்டோம். இப்போது நாம் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வைத்து என்ன செய்யப் போகிறோம்? x இல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கருதுக.

3 Algebra_TM_T1.indd 91 26-12-2019 12:14:50

நாம் x இன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பில் அந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையை மதிப்பீடு செய்யலாம். x இன் மதிப்பு மாறும்போது பல்லுறுப்புக் கோவையால் உருவான சார்பு எவ்வாறு மாறுகிறது என நாம் கேட்கலாம். பல்லுறுப்புக் கோவை சமன்பாட்டை எழுதி $P(x)=0$ எனக் கொண்டு நாம் x இன் தீர்வு காணலாம். இந்த இயலை நாம் கடந்து செல்கையில் இது போன்ற பல செயல்களைச் செய்ய இருக்கிறோம். அவற்றை, நாம் எண்களைப் போன்றே செயல்படுத்த இருக்கிறோம்! இந்த இயலின் தொடக்கத்திலேயே, ஒவ்வொரு மிகை முழு எண்ணையும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாக எழுத முடியும் எனக் கூறும்போது நாம் இதற்கான ஒரு குறிப்பை அளித்துள்ளோம்.

எண் கணிதத்தைத் தொடர்ந்து, பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுதல், ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றைக் கழித்தல், பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குதல், ஒன்றினை மற்றொன்றால் வகுத்தல் ஆகியவற்றை முயற்சி செய்ய உள்ளோம். பல்லுறுப்புக் கோவைகள் தொடர்பான ஆர்வமளிக்கும் பல பண்புகளைக் கற்கும்போது, எண்களுக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கும் இடையே உள்ள ஒப்புமை ஆழமானதாக மாறிவிடும். தற்போது, பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் செயல்பாடுகளை எளிமையாக முயற்சி செய்து வரையறுப்பது வேடிக்கையானதாகவே இருக்கும்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூட்டல் (Addition of Polynomials)

இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதலும் மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

குறிப்பு

ஒத்த உறுப்புகளை மட்டுமே கூட்ட இயலும். $3x^2+5x^2$ என்பது $8x^2$ ஆகும். ஆனால் மாறுபட்ட உறுப்புகள் $3x^2$ மற்றும் $5x^3$ ஐக் கூட்டினால் $3x^2+5x^3$ என்ற ஒரு புதிய பல்லுறுப்புக் கோவை கிடைக்கும்

எடுத்துக்காட்டு 3.4 $p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$ மற்றும் $q(x) = x^2 + 2x + 4$ எனில், $p(x) + q(x)$ காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை	திட்ட வடிவம்
$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$	$2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$
$q(x) = x^2 + 2x + 4$	$x^2 + 2x + 4$
$p(x) + q(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 9$	

$p(x) + q(x)$ என்பதும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே என்பதைக் காணலாம். எனவே, இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதலும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கழித்தல் (Subtraction of Polynomials)

இரண்டு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கழித்தல் மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்..

குறிப்பு

ஒத்த உறுப்புகளை மட்டுமே கழிக்க இயலும். $8x^2 - 5x^2$ என்பதைக் கழித்தால் $3x^2$ கிடைக்கும். ஆனால் $5x^3$ ஐ $3x^2$ இல் கழிக்கக் கிடைக்கும் $3x^2 - 5x^3$ என்பது ஒரு புதிய பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.5 $p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$ மற்றும் $q(x) = x^2 + 2x + 4$ எனில் $p(x) - q(x)$ காண்க.

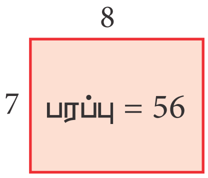
தீர்வு

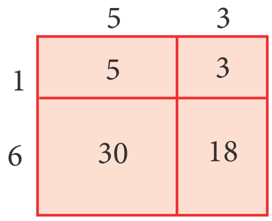
கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவை	திட்ட வடிவம்
$p(x) = 4x^2 - 3x + 2x^3 + 5$	$2x^3 + 4x^2 - 3x + 5$
$q(x) = x^2 + 2x + 4$	$x^2 + 2x + 4$
$p(x) - q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$	

$p(x) - q(x)$ என்பதும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே என்பதைக் காணலாம். எனவே இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வித்தியாசம் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே.

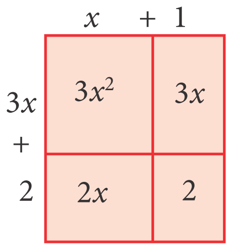
இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கல் (Multiplication of Two Polynomials)

8 அலகுகள் நீளமும் 7 அலகுகள் அகலமும் உடைய ஒரு செவ்வகத்தைக் கீழ்க்கண்டவாறு 4 செவ்வகங்களாகப் பிரிக்கும் பொழுது பரப்பு மாறாமல் உள்ளதை நாம் உணர்கிறோம். இது பல்லுறுப்புக் கோவையின் பெருக்கலைப் படிக்கத் தூண்டுகோலாக அமைகிறது.





$(x+1)$ நீளமும் $(3x+2)$ அகலமும் கொண்ட ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பினைப் பின்வருமாறு கண்டறியலாம்.



எனவே செவ்வகத்தின் பரப்பளவு
$= 3x^2 + 3x + 2x + 2$
$= 3x^2 + 5x + 2$

> x என்பது மாறி மற்றும் m, n என்பவை மிகை முழுக்கள் எனில், $x^m \times x^n = x^{m+n}$ ஆகும். இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்குத் தொகையும் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.6 பெருக்குக : $(4x - 5)$ மற்றும் $(2x^2 + 3x - 6)$.

தீர்வு

$(4x-5)$ மற்றும் $(2x^2+3x-6)$ ஐப் பெருக்குவதற்கு, முதல் பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் இரண்டாவது பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒவ்வோர் உறுப்புடன் பகிர்ந்து பெருக்குதல் வேண்டும். இந்த எடுத்துக்காட்டில் நாம் $4x$ மற்றும் -5 ஐப் பகிர வேண்டியது தேவையாகிறது. பிறகு ஒத்த உறுப்புகளை இணைக்க வேண்டும்.

$$(4x - 5)(2x^2 + 3x - 6) = 4x(2x^2 + 3x - 6) - 5(2x^2 + 3x - 6)$$

3 Algebra_TM_T1.indd 93 26-12-2019 12:14:53

$$= 8x^3 + 12x^2 - 24x - 10x^2 - 15x + 30$$

$$= 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$$

மாற்றுமுறையாக கெழுக்களைப் பிரித்துப் பெருக்கும் முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

	2	+3	-6
		+4	-5
	−10	−15	+30
8	+12	−24	
8	+2	−39	+30

$\therefore \quad (4x - 5)(2x^2 + 3x - 6) = 8x^3 + 2x^2 - 39x + 30$

பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் கோவைகளில் எவை பல்லுறுப்புக் கோவைகளாகும்? பல்லுறுப்புக் கோவை இல்லை எனில், அதற்கான காரணம் கூறுக.

 (i) $\frac{1}{x^2} + 3x - 4$ (ii) $x^2(x - 1)$

 (iii) $\frac{1}{x}(x + 5)$ (iv) $\frac{1}{x^{-2}} + \frac{1}{x^{-1}} + 7$

 (v) $\sqrt{5}x^2 + \sqrt{3}x + \sqrt{2}$ (vi) $m^2 - \sqrt[3]{m} + 7m - 10$

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையிலும் x^2 *மற்றும்* x-இன் கெழுக்களைக் காண்க.

 (i) $4 + \frac{2}{5}x^2 - 3x$ (ii) $6 - 2x^2 + 3x^3 - \sqrt{7}x$

 (iii) $\pi x^2 - x + 2$ (iv) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x + 0.5$

 (v) $x^2 - \frac{7}{2}x + 8$

3. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படியைக் காண்க.

 (i) $1 - \sqrt{2}y^2 + y^7$ (ii) $\frac{x^3 - x^4 + 6x^6}{x^2}$

 (iii) $x^3(x^2 + x)$ (iv) $3x^4 + 9x^2 + 27x^6$

 (v) $2\sqrt{5}p^4 - \frac{8p^3}{\sqrt{3}} + \frac{2p^2}{7}$

4. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைத் திட்ட வடிவில் மாற்றி எழுதுக.

 (i) $x - 9 + \sqrt{7}x^3 + 6x^2$ (ii) $\sqrt{2}x^2 - \frac{7}{2}x^4 + x - 5x^3$

 (iii) $7x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 4x - 1$ (iv) $y^2 + \sqrt{5}y^3 - 11 - \frac{7}{3}y + 9y^4$

3 Algebra_TM_T1.indd 94 26-12-2019 12:14:55

5. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கூட்டுக. மேலும் கூட்டி வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க.

(i) $p(x) = 6x^2 - 7x + 2$; $q(x) = 6x^3 - 7x + 15$

(ii) $h(x) = 7x^3 - 6x + 1$; $f(x) = 7x^2 + 17x - 9$

(iii) $f(x) = 16x^4 - 5x^2 + 9$; $g(x) = -6x^3 + 7x - 15$

6. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் கழிக்க. மேலும் கழித்து வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க.

(i) $p(x) = 7x^2 + 6x - 1$; $q(x) = 6x - 9$

(ii) $f(y) = 6y^2 - 7y + 2$; $g(y) = 7y + y^3$

(iii) $h(z) = z^5 - 6z^4 + z$; $f(z) = 6z^2 + 10z - 7$

7. $2x^3 + 6x^2 - 5x + 8$ உடன் எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கூட்ட $3x^3 - 2x^2 + 6x + 15$ கிடைக்கும்?

8. $2x^4 + 4x^2 - 3x + 7$ இலிருந்து எந்தப் பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கழிக்க $3x^3 - x^2 + 2x + 1$ கிடைக்கும்?

9. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைப் பெருக்குக. பெருக்கி வரும் பல்லுறுப்புக் கோவையின் படியைக் காண்க :

(i) $p(x) = x^2 - 9$; $q(x) = 6x^2 + 7x - 2$

(ii) $f(x) = 7x + 2$; $g(x) = 15x - 9$

(iii) $h(x) = 6x^2 - 7x + 1$; $f(x) = 5x - 7$

10. ஓர் இனிப்பின் விலை ₹$(x + y)$. அமீர் $(x + y)$ இனிப்புகளை வாங்கினார். எனில் அவர் கொடுத்த மொத்தத் தொகையை x மற்றும் y களில் காண்க. மேலும் $x = 10$, $y = 5$ எனில் அமீர் கொடுத்த தொகை எவ்வளவு?

11. ஒரு செவ்வகத்தின் நீளம் $(3x+2)$ அலகுகள் மற்றும் அதன் அகலம் $(3x-2)$ அலகுகள் எனில் x ஐப் பொருத்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க. $x = 20$ எனில், அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

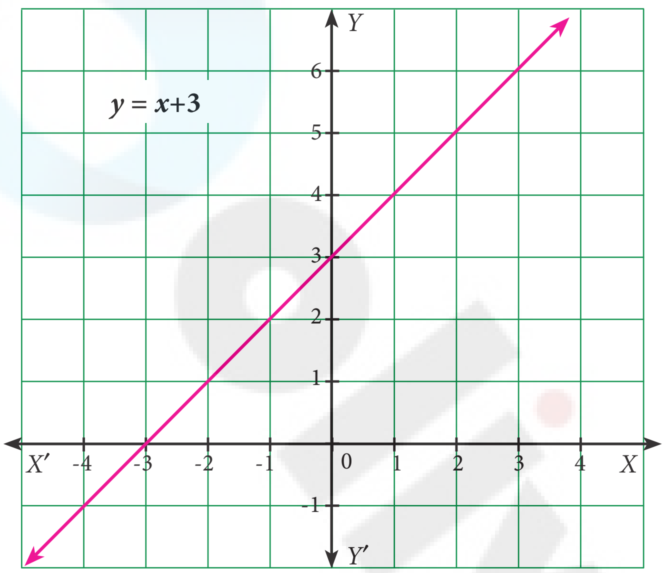
12. $p(x)$ என்பது படி 1ஐக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை மற்றும் $q(x)$ என்பது படி 2 ஐக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனில் $p(x) \times q(x)$ என்பது எவ்வகைப் பல்லுறுப்புக் கோவை?

3.2.2 பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு மற்றும் பூச்சியங்கள் (Value and Zeros of a Polynomial)

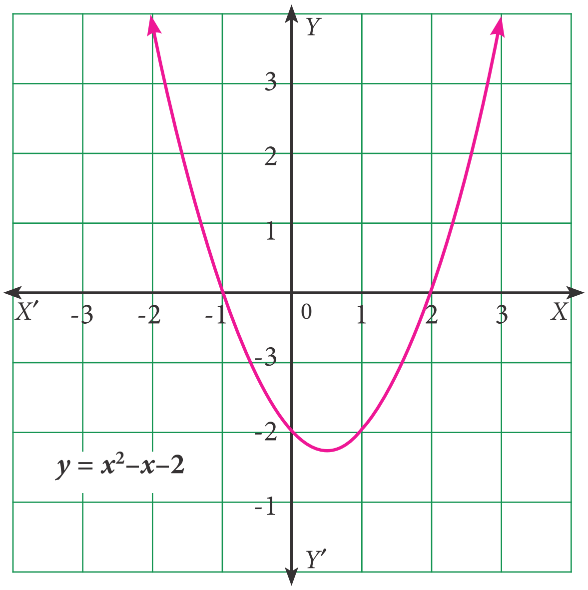
கீழ்க்காணும் இரு வரைபடங்களைப் பார்க்கவும். முதலாவது ஒருபடி மற்றும் இரண்டாவது இருபடி ஆகும். முதல் வரைபடம் x அச்சை $(x = -3)$ ஒரு புள்ளியில் வெட்டுகிறது. மற்றும் இரண்டாம் வரைபடம் $(x = -1$ மற்றும் $x = 2)$ இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அவை இரண்டும் y அச்சை ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வெட்டுகின்றன. பொதுவாக, ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கும் ஒரு

3 Algebra_TM_T1.indd 95 26-12-2019 12:14:57

வரைபடம் உண்டு. அந்த வரைபடத்தைப் படமாகக் காட்டலாம். (நமக்குச் சூத்திரங்களை விடப் படங்கள் பிடிக்குமல்லவா?) வரைபடங்கள். அது ஒரு நேர்க்கோடா?, வளைவரையா? அதன் வடிவம் என்ன? எத்தனை இடங்களில் x அச்சை வெட்டுகின்றன? போன்ற பயனுள்ள பல தகவல்களைக் கொண்டுள்ளன.



படம் 3.7



படம் 3.8

பொதுவாக, $x = a$ எனில், பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் மதிப்பு $p(a)$ எனக் குறிக்கப்படும். $p(x)$ இல் x இன் மதிப்பிற்குப் பதிலாக, a எனப் பிரதியிட, $p(\text{a})$ கிடைக்கும். இங்கு, a ஒரு மெய்யெண்.

x இன் பல மதிப்புகளுக்கு $p(x)$ இன் மதிப்பு பூச்சியம் ஆகலாம் என்பதைக் கவனிக்க (படத்தில் உள்ளது போல). x இன் எத்தனை மதிப்புகளுக்கு மற்றும் எந்த மதிப்புகளுக்கு $p(x)$ பூச்சியம் ஆகும்? என்று ஆர்வமாகக் கேட்கத் தோன்றும். x இன் அந்த மதிப்புகளையே பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ இன் பூச்சியங்கள் என்போம்.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்புகள் என்பன வரைபடத்தில் நாம் குறிக்கும் மதிப்புகளே என்பதை நாம் காணலாம். மேலும், நாம் குறிக்கும் புள்ளிகள் x அச்சை வெட்டும்போது பல்லுறுப்புக் கோவை பூச்சியம் ஆவதை எளிதாகக் காணலாம்.

நேர்க்கோடு அல்லது வளைவரையானது x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகளைப் பொருத்தே அதன் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை அமையும்

குறிப்பு

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை $\leq$ பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி.

படம் 3.7 இல் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 1

படம் 3.8 இல் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கை 2

பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பு (Value of a Polynomial)

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில் $x = a$ எனப் பிரதியிட அதன் மதிப்பு $p(a)$ எனக் கிடைக்கும். இது x ஐ a என மாற்றுவதால் கிடைக்கும் $(a \in R)$

3 Algebra_TM_T1.indd 96 26-12-2019 12:14:58

எடுத்துக்காட்டாக,

$f(x) = x^2 + 3x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையில்

$x = 2$ எனும்போது

$f(x)$ இன் மதிப்பு $f(2) = 2^2+3(2)-1 = 4+6-1 = 9$.

பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் (Zeros of Polynomial)

(i) $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதில் x இடத்தில் 1 ஐப் பிரதியிட $p(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 3(1) - 14$

$= 4 - 6 + 3 - 14 \quad = -13$

எனவே $x = 1$ எனில் $p(x)$ இன் மதிப்பு -13 எனலாம்.

$x = 0$ எனும் போது $p(0) = 4(0)^3 - 6(0)^2 + 3(0) - 14$

$= 0 - 0 + 0 - 14 = -14$

எனவே $x = 0$ எனில் $p(x)$ இன் மதிப்பு -14 ஆகும்.

(ii) $x = 2$ என $p(x)$ இல் பிரதியிட $p(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) - 14$

$= 32 - 24 + 6 - 14 \quad = 0$

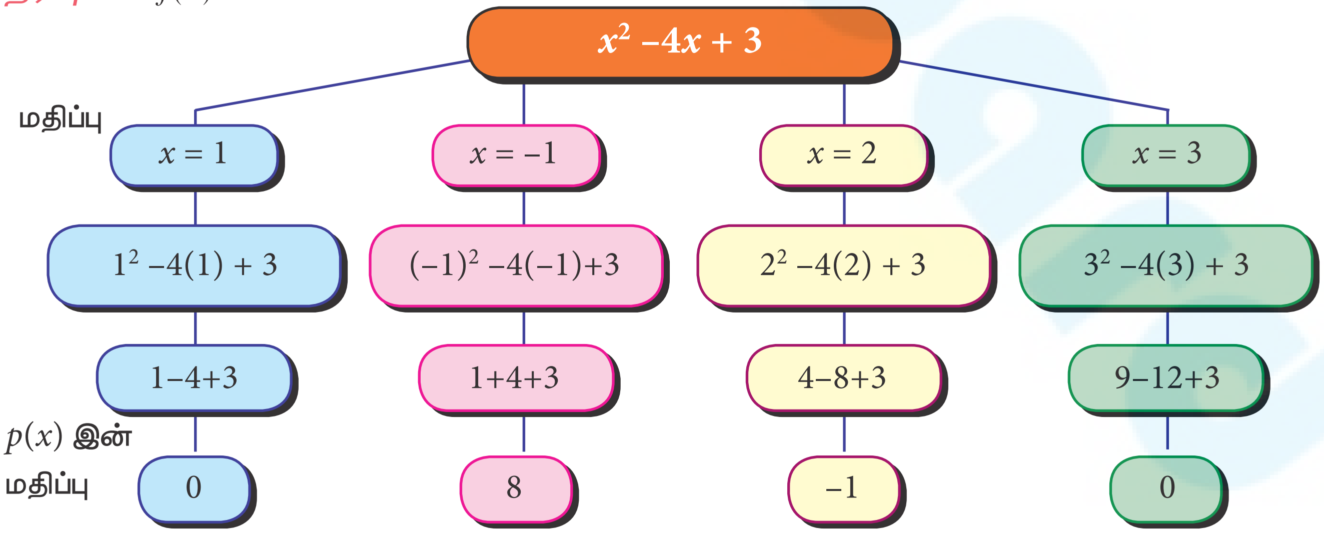
$x = 2$ எனும்போது $p(x)$ இன் மதிப்பு 0 ஆகும். எனவே நாம் 2 ஐ $p(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 14$ இன் பூச்சியங்களில் ஒன்று எனக் கூறுகிறோம்.

பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் (Roots of a Polynomial Equation)

பொதுவாக, $p(a) = 0$ எனில், a என்பது $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் ஒரு பூச்சியமாகும். அல்லது a என்பது $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.7 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ எனில், $f(1), f(-1), f(2), f(3)$. ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. மேலும் $f(x)$இன் பூச்சியங்களைக் காண்க.

தீர்வு: $f(x) = x^2 - 4x + 3$



படம் 3.9

3 Algebra_TM_T1.indd 97 26-12-2019 12:14:59

$x = 1$ மற்றும் $x = 3$ எனும்போது பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ இன் மதிப்பு பூச்சியமாகும், பல்லுறுப்புக் கோவை $f(x)$ இன் பூச்சியங்கள் 1 மற்றும் 3 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

(i) $f(x) = 2x + 1$ (ii) $f(x) = 3x - 5$

தீர்வு

(i) கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2\left(x - (-\frac{1}{2})\right)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 2(0) = 0$$

எனவே, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ என்பது $f(x)$ இன் பூச்சியமாகும்.

(ii) கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = 3x - 5 = 3\left(x - \frac{5}{3}\right)$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 3\left(\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\right) = 3(0) = 0$$

எனவே, $x = \frac{5}{3}$ என்பது $f(x)$ இன் பூச்சியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.9

பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.

(i) $5x - 3 = 0$ (ii) $-7 - 4x = 0$

தீர்வு

(i) $5x - 3 = 0$

$$5x = 3$$
$$x = \frac{3}{5}$$

(ii) $-7 - 4x = 0$

$$4x = -7$$
$$x = \frac{-7}{4} = -\frac{7}{4}$$

குறிப்பு

- ஒருபல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம் என்பது பூச்சியமாக மட்டுமே இருக்க வேண்டியதில்லை எந்த மெய்யெண்ணாகவும் இருக்கலாம்.
- ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலிப் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு பூச்சியங்கள் இல்லை.
- பூச்சியப் பல்லுறுப்புக் கோவையில் அனைத்து மெய்யெண்களும் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

$x^2 - 9$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு -3 மற்றும் 3 என்பன பூச்சியங்களா என்று சரிபார்க்கவும்?

தீர்வு

$$f(x) = x^2 - 9$$
$$f(-3) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$
$$f(+3) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

ஆகவே, -3 மற்றும் 3 என்பன $x^2 - 9$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 98 26-12-2019 12:15:00

பயிற்சி 3.2

1. $f(y) = 6y - 3y^2 + 3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மதிப்பைக் காண்க.
   (i) $y = 1$ (ii) $y = -1$ (iii) $y = 0$

2. $p(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ எனில், $p(2\sqrt{2})$ ஐக் காண்க.

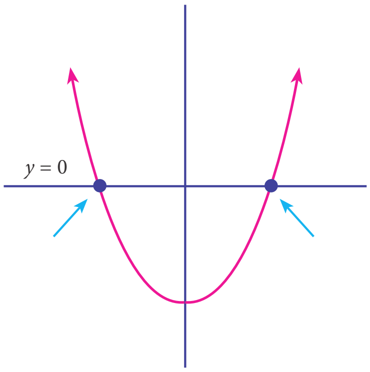
3. கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களைக் காண்க.
   (i) $p(x) = x - 3$ (ii) $p(x) = 2x + 5$ (iii) $q(y) = 2y - 3$
   (iv) $f(z) = 8z$ (v) $p(x) = ax$ இங்கு $a \neq 0$ (vi) $h(x) = ax + b,\ a \neq 0,\ a, b \in R$

4. பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் காண்க.
   (i) $5x - 6 = 0$ (ii) $x + 3 = 0$ (iii) $10x + 9 = 0$ (iv) $9x - 4 = 0$

5. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு அவற்றிற்கு எதிரே குறிப்பிட்டுள்ளவை பூச்சியங்களா எனச் சரிபார்க்க.
   (i) $p(x) = 2x - 1,\ x = \frac{1}{2}$ (ii) $p(x) = x^3 - 1,\ x = 1$
   (iii) $p(x) = ax + b,\ x = \frac{-b}{a}$ (iv) $p(x) = (x + 3)(x - 4),\ x = 4, x = -3$

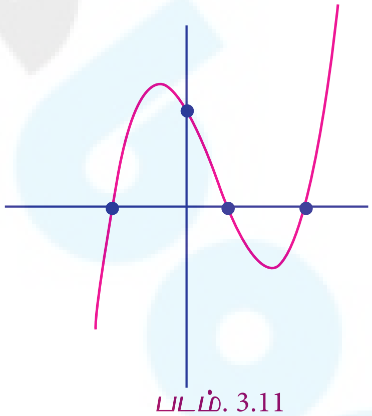
6. பின்வரும் வரைபடங்களால் குறிக்கப்படும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(i)



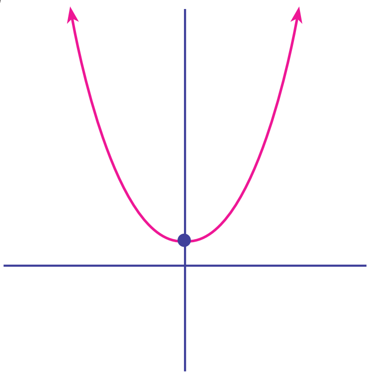
படம். 3.10

(ii)



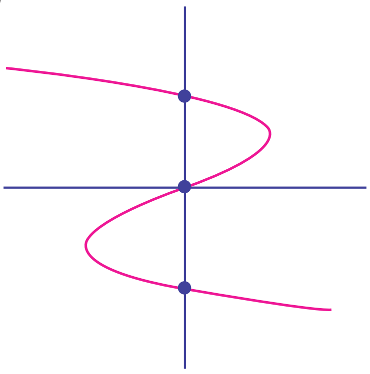
படம். 3.11

(iii)



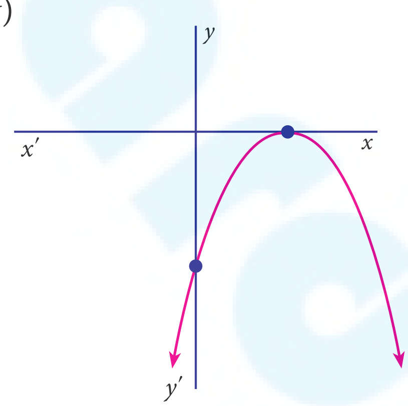
படம். 3.12

(iv)



படம். 3.13

(v)



படம். 3.14

3 Algebra_TM_T1.indd 99 26-12-2019 12:15:01

3.3 மீதித் தேற்றம் (Remainder Theorem)

இப்பகுதியில் மீதியைக் காண எளிய மற்றும் அழகான ஒரு முறையைக் காண்போம் .

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை ஒருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க, மீதித் தேற்றம் என அழைக்கப்படும் மிகவும் பிரபலமான இயற்கணிதத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

> $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 1 ஐ விடப் பெரியதாகவோ அல்லது சமமாகவோ இருந்து, அதை $(x-a)$ என்ற நேரியக் கோவையால் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p(a)$ ஆகும். இங்கு a ஒரு மெய்யெண்.

மீதித் தேற்றத்தின் முக்கியத்துவம்: இத்தேற்றத்தின் மூலம் ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைச் சிக்கலான நீள்வகுத்தல் முறையில் வகுக்காமலேயே அதன் மீதியைக் காண இயலும். .

குறிப்பு

- $p(x)$ ஐ $(x+a)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p(-a)$ ஆகும்.
- $p(x)$ ஐ $(ax-b)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p(\frac{b}{a})$ ஆகும்.
- $p(x)$ ஐ $(ax+b)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி $p(-\frac{b}{a})$ ஆகும்.

CS5HGC

எடுத்துக்காட்டு 3.11

வ. எண்	வினா	தீர்வு	குறிப்பு
1	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $x + 1$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி.	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $f(-1) = (-1)^3+3(-1)^2+3(-1)+1$ $= -1+3-3+1 = 0$ எனவே, தேவையான மீதி 0	$g(x) = x+1$ $g(x) = 0$ $\Rightarrow x+1 = 0$ $x = -1$
2	$f(x) = x^3 - x + 1$ என்பது $g(x) = 2 - 3x$ இன் மடங்கா என ஆராய்க.	$\therefore f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8}{27} - \frac{2}{3} + 1$ $= \frac{8-18+27}{27} = \frac{17}{27} \neq 0$ $\Rightarrow f(x)$ என்பது $g(x)$ இன் மடங்கல்ல.	$g(x) = 2-3x$ $= 0$ எனச் சமப்படுத்த $x = \frac{2}{3}$ எனக் கிடைக்கிறது.
3	$f(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x - a)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதி.	$f(x) = x^3-ax^2 + 6x - a$ $f(a) = a^3 - a(a)^2 + 6a - a$ $= a^3 - a^3 + 5a$ $= 5a$ எனவே, தேவையான மீதி $5a$	$g(x) = x-a$ $g(x) = 0$ $\Rightarrow x - a = 0$ $x = a$

3 Algebra_TM_T1.indd 100 26-12-2019 12:15:03

4	$2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை k இன் எந்த மதிப்பிற்குப் பல்லுறுப்புக் கோவை $(x + 2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்?	$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6$ என்க $f(x)$ ஐ $(x+2)$ ஆனது மீதியின்றி வகுக்க $f(-2) = 0$ ஆக இருக்க வேண்டும். அதாவது, $2(-2)^4+3(-2)^3+2k(-2)^2 + 3(-2)+6=0$ $2(16) + 3(-8) + 2k(4) -6 + 6=0$ $32-24 + 8k = 0$ $8k = -8\ ,\quad k = -1$ எனவே, $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $(x-2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபட வேண்டுமெனில் $k = -1$ ஆக இருக்க வேண்டும்.	$g(x)=x+2$ $g(x)=0$ $x+2 = 0$ $x = -2$

எடுத்துக்காட்டு 3.12

$f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 -3x + 2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையால் மீதியின்றி வகுபடும் என்று நீள் வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தாமல் நிரூபி.

தீர்வு

$$f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 3x - 2$$

$g(x) = x^2 - 3x + 2$ என்க

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 3x + 2 \\ &= x^2 - 2x - x + 2 \\ &= x(x-2) - 1(x-2) \\ &= (x-2)(x-1) \end{aligned}$$

மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $(x-1)$, $(x-2)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையால் மீதியின்றி வகுபடும் என்று நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^4 - 6(1)^3 + 3(1)^2 + 3(1) - 2 \\ &= 2 - 6 + 3 + 3 - 2 \quad = 0 \\ f(2) &= 2(2)^4 - 6(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) - 2 \\ &= 32 - 48 + 12 + 6 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

எனவே, $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $(x-1)$ $(x-2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

அதாவது, $f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $x^2 -3x + 2$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 101 26-12-2019 12:15:04

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-a)$ ஆல் வகுக்க மீதி $p(a)=0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும். மீதித் தேற்றம் காரணித் தேற்றத்திற்கு முன்னெடுத்துச் செல்கிறது.

3.3.1 காரணித் தேற்றம் (Factor Theorem)

$p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி $n \geq 1$ மற்றும் 'a' என்பது ஒரு மெய்யெண் எனில்,

(i) $p(a)=0$ ஆக உள்ளபோது, $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி ஆகும்.

(ii) $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், $p(a)=0$ ஆகும்.

நிரூபணம் $p(x)$ என்பது வகுபடும் கோவை மற்றும் $(x-a)$ வகுக்கும் கோவை.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் விதியின் படி (division algorithm) $p(x)=(x-a)\,q(x)+p(a)$ இதில், $q(x)$ என்பது ஈவு மற்றும் மீதி $p(a)$ ஆகும்.

(i) $p(a)=0$ எனில், $p(x)=(x-a)\,q(x)$ ஆகும். மேலும், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

(ii) $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணியானதால்,

$$p(x)=(x-a)g(x)$$

இவ்வாறு,

$$\begin{aligned} p(a) &= (a-a)\,g(a) \\ &= 0\times g(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், $p(a)=0$ ஆகும்.

> **சிந்தனைக் களம்**
>
> $a(a\neq 0), b$ என்பன எவையேனும் இரு முழுக்கள் என்க. a என்பது b இன் வகுத்தி எனில், $b = ax$ இங்கு x என்பது ஒரு முழுக்கள் (Integer) ஆகும்

குறிப்பு

- $p(a)=0$ எனில், $(x-a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி. (ஏனெனில் $x-a=0,\ x=a$)
- $p(-a)=0$ எனில், $(x+a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி. (ஏனெனில் $x+a=0,\ x=-a$)
- $p\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$ எனில், $(ax+b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
  $\left(\text{ஏனெனில் } ax+b=0, ax=-b, x=-\dfrac{b}{a}\right)$
- $p\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$ எனில், $(ax-b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
  $\left(\text{ஏனெனில் } ax-b=0, ax=b, x=\dfrac{b}{a}\right)$
- $p(a)=0$ மற்றும் $p(b)=0$ எனில், $(x-a)\,(x-b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
  $\left(\text{ஏனெனில் } \begin{array}{lll} x-a=0 & \text{or} & x-b=0 \\ x=a & \text{or} & x=b \end{array}\right)$

3 Algebra_TM_T1.indd 102 26-12-2019 12:15:07

எடுத்துக்காட்டு 3.13

$(x+2)$ என்பது $x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ இன் ஒரு காரணி எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$p(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின்படி, $(x+2)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், மீதி

$$p(-2) = 0$$

$$p(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 - 2(-2) + 20$$

$$= -8 - 4(4) + 4 + 20$$

$$p(-2) = 0$$

எனவே, $(x+2)$ என்பது $x^3 - 4x^2 - 2x + 20$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

> $(x+2)$ இன் பூச்சியம் காண,
>
> $x + 2 = 0$
>
> $x = -2$

எடுத்துக்காட்டு 3.14

$(3x-2)$ என்பது $3x^3 + x^2 - 20x + 12$ இன் ஒரு காரணியா?

தீர்வு $p(x) = 3x^3 + x^2 - 20x + 12$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின்படி, $(3x-2)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், மீதி $p\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ ஆகும்.

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 20\left(\frac{2}{3}\right) + 12$$

$$= 3\left(\frac{8}{27}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) - 20\left(\frac{2}{3}\right) + 12$$

$$= \frac{8}{9} + \frac{4}{9} - \frac{120}{9} + \frac{108}{9}$$

$$= \frac{(120-120)}{9}$$

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

ஆகவே, $(3x-2)$ என்பது $3x^3 + x^2 - 20x + 12$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

> $3x-2$ இன் பூச்சியம் காண,
>
> $3x - 2 = 0$
>
> $3x = 2$
>
> $x = \frac{2}{3}$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

- $p(___) = 0$ எனில், $(x+3)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(___) = 0$ எனில், $(3-x)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(___) = 0$ எனில், $(y-3)$ என்பது $p(y)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(___) = 0$ எனில், $(-x-b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.
- $p(___) = 0$ எனில், $(-x+b)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

3 Algebra_TM_T1.indd 103 26-12-2019 12:15:09

எடுத்துக்காட்டு 3.15 $2x^3-6x^2+mx+4$ இன் ஒரு காரணி $(x-2)$ எனில், m இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

$p(x)=2x^3-6x^2+mx+4$ என்க.

காரணித் தேற்றத்தின் படி, மீதி $p(2)=0$ எனில், $(x-2)$ ஒரு காரணியாகும்.

$$\begin{aligned} p(2) &= 0\\ 2(2)^3-6(2)^2+m(2)+4 &= 0\\ 2(8)-6(4)+2m+4 &= 0\\ -4+2m &= 0\\ m &= 2 \end{aligned}$$

> $x-2$ இன் பூச்சியம் காண,
>
> $x-2=0$
>
> $x=2$

பயிற்சி 3.3

1. $p(x) = x^3-5x^2+4x-3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை $g(x) = x-2$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மடங்கா எனச் சரிபார்க்க .

2. மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $p(x)$ ஐ $g(x)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.
   (i) $p(x) = x^3-2x^2-4x-1$; $g(x)=x+1$
   (ii) $p(x) = 4x^3-12x^2+14x-3$; $g(x)=2x-1$
   (iii) $p(x) = x^3-3x^2+4x+50$; $g(x)=x-3$

3. $3x^3-4x^2+7x-5$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x+3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

4. $x^{2018}+2018$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $x-1$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க.

5. $p(x)=2x^3-kx^2+3x+10$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-2)$ஆல் மீதியின்றி வகுத்தால் k இன் மதிப்பைக் காண்க

6. $2x^3+ax^2+4x-12$ மற்றும் x^3+x^2-2x+a என்ற இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளை $(x-3)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மீதிகள் சமமானால், a இன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும், அதன் மீதியைக் காண்க.

7. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கு $(x-1)$ என்பது காரணியா எனக் காண்க.
   $i)\ x^3+5x^2-10x+4$ $\quad ii)\ x^4+5x^2-5x+1$

8. காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $2x^3-5x^2-28x+15$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x-5)$ என்பது ஒரு காரணி எனக்காட்டுக.

3 Algebra_TM_T1.indd 104 26-12-2019 12:15:11

9. $x^3 - 3x^2 - mx + 24$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x+3)$ என்பது ஒரு காரணி எனில், m இன் மதிப்பைக் காண்க.

10. $ax^2 + 5x + b$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x-2)$ மற்றும் $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ஆகியவை காரணிகள் எனில், $a = b$ எனக்காட்டுக.

11. $(x-1)$ என்பது $kx^3 - 2x^2 + 25x - 26$ ஐ மீதியின்றி வகுக்குமெனில் (வகுத்தி) k இன் மதிப்பைக் காண்க.

12. $x^2 - 2x - 8$ என்பது ஒரு செவ்வகத்தின் பரப்பு எனில், $(x+2)$ மற்றும் $(x-4)$ என்பன அவற்றின் பக்கங்களா என்பதைக் காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திச் சரிபார்க்க.

3.4 இயற்கணித முற்றொருமைகள் (Algebraic Identies)

ஒரு சமன்பாடு, அதிலுள்ள மாறிகளின் எம்மதிப்புக்கும் பொருந்துமாறு இருக்குமானால் அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமை எனப்படும்.

பின்வரும் முற்றொருமைகளை நாம் முன்பே கற்றிருக்கின்றோம்.

(1) $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ (2) $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$ (4) $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

குறிப்பு

- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
- $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$
- $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$
- $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2$

எடுத்துக்காட்டு 3.16 பின்வருவனவற்றை முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி விரித்தெழுதுக.

(i) $(3x+4y)^2$ (ii) $(2a-3b)^2$ (iii) $(5x+4y)(5x-4y)$ (iv) $(m+5)(m-8)$

தீர்வு

(i) $(3x+4y)^2$ [ஏனெனில், $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$]

$(3x+4y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$ [$a = 3x,\ b = 4y$ எனப் பிரதியிட]

$= 9x^2 + 24xy + 16y^2$

(ii) $(2a-3b)^2$ [ஏனெனில், $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$]

$(2a-3b)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3b) + (3b)^2$ [$x = 2a,\ y = 3b$ எனப் பிரதியிட]

$= 4a^2 - 12ab + 9b^2$

3 Algebra_TM_T1.indd 105 26-12-2019 12:15:14

(iii) $(5x+4y)(5x-4y)$ [ஏனெனில், $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$]

$$(5x+4y)(5x-4y) = (5x)^2 - (4y)^2$$ [$a = 5x \quad b = 4y$ எனப் பிரதியிட]

$$= 25x^2 - 16y^2$$

(iv) $(m+5)(m-8)$ [ஏனெனில், $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$]

$$(m+5)(m-8) = m^2 + (5-8)m - (5)(8)$$

$$= m^2 - 3m - 40$$ [$x = m,\ a = 5,\ b = 8$ எனப் பிரதியிட]

3.4.1 $(a+b+c)^2$ என்ற மூவுறுப்புக் கோவையின் விரிவாக்கம் (Expansion of Trinomial)

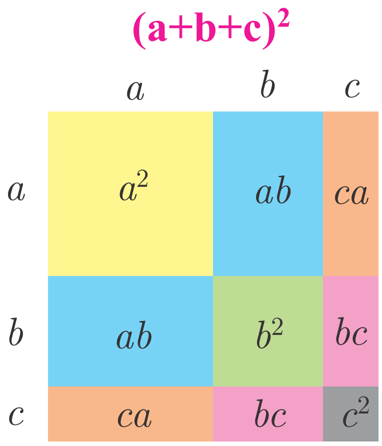
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$x = a+b,\ y = c$ எனப் பிரதியிட,

எனவே, $(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)(c) + c^2$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$



எனவே,
$(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

எடுத்துக்காட்டு 3.17 $(a-b+c)^2$ இன் விரிவு காண்க.

தீர்வு

$(a+b+c)^2$ இன் விரிவில் 'b' ஐ '$-b$' எனப் பிரதியிட,

முற்றொருமை $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ இன் படி,

$$(a+(-b)+c)^2 = a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ca$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$$

எடுத்துக்காட்டு 3.18 $(2x+3y+4z)^2$ இன் விரிவு காண்க.

தீர்வு

முற்றொருமையின்படி,

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$a = 2x, b = 3y$ மற்றும் $c = 4z$ எனப் பிரதியிட,

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

பின்வரும் முற்றொருமைகளை விரிவுபடுத்திச் சரிபார்க்க.

$$(a+b+c)^2 = (-a-b-c)^2$$

$$(-a+b+c)^2 = (a-b-c)^2$$

$$(a-b+c)^2 = (-a+b-c)^2$$

$$(a+b-c)^2 = (-a-b+c)^2$$

3 Algebra_TM_T1.indd 106 26-12-2019 12:15:19

$$(2x+3y+4z)^2 = (2x)^2+(3y)^2+(4z)^2+2(2x)(3y)+2(3y)(4z)+2(4z)(2x)$$
$$= 4x^2+9y^2+16z^2+12xy+24yz+16xz$$

எடுத்துக்காட்டு 3.19 $3m+2n-4l$ பக்க அளவு கொண்ட சதுரத்தின் பரப்பளவு காண்க.

தீர்வு

சதுரத்தின் பரப்பளவு = பக்கம் × பக்கம்

$= (3m+2n-4l)\times(3m+2n-4l)$

$= (3m+2n-4l)^2$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$a = 3m$ $b = 2n$ $c = -4\,l$ எனப் பிரதியிட,

$$[3m+2n+(-4l)]^2 = (3m)^2+(2n)^2+(-4l)^2+2(3m)(2n)+2(2n)(-4l)+2(-4l)(3m)$$
$$= 9m^2+4n^2+16l^2+12mn-16ln-24lm$$

எனவே, சதுரத்தின் பரப்பளவு

$= [9m^2+4n^2+16l^2+12mn-16ln-24lm]$ சதுர அலகுகள்

3.4.2 மூன்று ஈருறுப்புக் கோவைகளின் பெருக்கற்பலனை உள்ளடக்கிய முற்றொருமைகள் (Identities involving Product of Three Binomials)

$$(x+a)(x+b)(x+c) = [(x+a)\ (x+b)]\ (x+c)$$
$$= [x^2+(a+b)x+ab](x+c)$$
$$= x^2(x)+(a+b)(x)(x)+abx+x^2c+(a+b)(x)c+abc$$
$$= x^3+ax^2+bx^2+abx+cx^2+acx+bcx+abc$$
$$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

எனவே,

$$(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

எடுத்துக்காட்டு 3.20 கீழ்க்காண்பனவற்றை விரித்தெழுதுக.

(i) $(x+5)(x+6)(x+4)$ (ii) $(3x-1)(3x+2)(3x-4)$

தீர்வு

முற்றொருமை $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$ ... (1)

(i) $(x+5)(x+6)(x+4)$

$= x^3+(5+6+4)x^2+(30+24+20)x+(5)(6)(4)$

$= x^3+15x^2+74x+120$

$a = 5$ $b = 6$ $c = 4$ என (1)ல் பிரதியிட,

3 Algebra_TM_T1.indd 107 26-12-2019 12:15:23

(ii) $(3x-1)(3x+2)(3x-4)$

$$= (3x)^3 + (-1+2-4)(3x)^2 + (-2-8+4)(3x) + (-1)(2)(-4)$$
$$= 27x^3 + (-3)9x^2 + (-6)(3x) + 8$$
$$= 27x^3 - 27x^2 - 18x + 8$$

$x \Rightarrow 3x,\ a \Rightarrow -1$
$b \Rightarrow 2,\quad c \Rightarrow -4$
என (1)ல் பிரதியிட,

3.4.3 $(x+y)^3$ மற்றும் $(x-y)^3$ –ன் விரிவாக்கம்

$$(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

கீழ்க்காணும் முற்றொருமையில், $a = b = c = y$ எனப் பிரதியிட,

நாம் பெறுவது,

$$(x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + (y+y+y)x^2 + (yy+yy+yy)x + yyy$$
$$= x^3 + (3y)x^2 + (3y^2)x + y^3$$

எனவே, $(x+y)^3 \equiv x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

அல்லது $(x+y)^3 \equiv x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$

y –க்கு $-y$, எனப் பிரதியிட,

$(x-y)^3 \equiv x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ அல்லது

$(x-y)^3 \equiv x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$

எடுத்துக்காட்டு 3.21 $(5a-3b)^3$ ஐ விரித்தெழுதுக.

தீர்வு

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ என்பது நாம் அறிந்தது.

$$(5a-3b)^3 = (5a)^3 - 3(5a)^2(3b) + 3(5a)(3b)^2 - (3b)^3$$
$$= 125a^3 - 3(25a^2)(3b) + 3(5a)(9b^2) - (3b)^3$$
$$= 125a^3 - 225a^2b + 135ab^2 - 27b^3$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \equiv (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

மேற்கண்ட முற்றொருமையை வலப்புறமுள்ள கோவைகளைப் பெருக்கிச் சரிபார்க்கலாம்.

குறிப்பு

- $(x+y+z)=0$ எனில், $x^3 + y^3 + 2^3 = 3xyz$ ஆகும்.
- கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் போன்றவற்றைச் சில முற்றொருமைகளில் பயன்படுத்துதல் (நிரூபணமின்றி).

  (i) $x^3 + y^3 \equiv (x+y)^3 - 3xy(x+y)$ (ii) $x^3 - y^3 \equiv (x-y)^3 + 3xy(x-y)$

3 Algebra_TM_T1.indd 108 26-12-2019 12:15:26

எடுத்துக்காட்டு 3.22 $(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$ இன் பெருக்கற்பலனைக் காண்க.

தீர்வு

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$ என்பது நாம் அறிந்ததே!

$$(2x+3y+4z)(4x^2+9y^2+16z^2-6xy-12yz-8zx)$$
$$= (2x)^3+(3y)^3+(4z)^3-3(2x)(3y)(4z)$$
$$= 8x^3+27y^3+64z^3-72xyz$$

எடுத்துக்காட்டு 3.23 முற்றொருமையைப் பயன்படுத்தி $10^3-15^3+5^3$ இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு

முற்றொருமையின்படி , $a+b+c=0$, எனில் $a^3+b^3+c^3=3abc$

இங்கு, $a+b+c = 10-15+5=0$

$$10^3+(-15)^3+5^3 = 3(10)(-15)(5)$$
$$10^3-15^3+5^3 = -2250$$

> $a = 10$, $b = -15$, $c = 5$ எனப் பிரதியிட

பயிற்சி 3.4

1. கீழ்க்காண்பவற்றை விரிவாக்குக:
   (i) $(x+2y+3z)^2$ (ii) $(-p+2q+3r)^2$
   (iii) $(2p+3)(2p-4)(2p-5)$ (iv) $(3a+1)(3a-2)(3a+4)$

2. முழுவதும் விரிவாக்காமல் x^2 இன் கெழு, x இன் கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளை இயற்கணித முற்றொருமையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.
   (i) $(x+5)(x+6)(x+7)$ (ii) $(2x+3)(2x-5)(2x-6)$

3. $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+14x^2+59x+70$ எனில், கீழ்க்காண்பனவற்றின் மதிப்பு காண்க.
   (i) $a+b+c$ (ii) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (iii) $a^2+b^2+c^2$ (iv) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}$

4. விரிவுபடுத்துக:
   (i) $(3a-4b)^3$ (ii) $\left(x+\frac{1}{y}\right)^3$

5. இயற்கணித முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மதிப்பு காண்க.
   (i) 98^3 (ii) 1001^3

3 Algebra_TM_T1.indd 109 26-12-2019 12:15:29

6. $(x+y+z) = 9$ மற்றும் $(xy+yz+zx)=26$ எனில், $x^2+y^2+z^2$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

7. $3a+4b=10$ மற்றும் $ab=2$ எனில், $27a^3+64b^3$ இன் மதிப்பு காண்க.

8. $x-y=5$ மற்றும் $xy=14$ எனில், x^3-y^3 இன் மதிப்பு காண்க.

9. $a+\frac{1}{a}=6$ எனில், $a^3+\frac{1}{a^3}$ இன் மதிப்பு காண்க.

10. $x^2+\frac{1}{x^2}=23$ எனில், $x+\frac{1}{x}$ மற்றும் $x^3+\frac{1}{x^3}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

11. $\left(y-\frac{1}{y}\right)^3=27$ எனில், $y^3-\frac{1}{y^3}$ இன் மதிப்பு காண்க.

12. சுருக்குக. (i) $(2a+3b+4c)(4a^2+9b^2+16c^2-6ab-12bc-8ca)$

(ii) $(x-2y+3z)(x^2+4y^2+9z^2+2xy+6yz-3xz)$

13. முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்தி மதிப்பு காண்க.

(i) $7^3-10^3+3^3$ (ii) $1+\frac{1}{8}-\frac{27}{8}$

14. $2x-3y-4z=0$ எனில், $8x^3-27y^3-64z^3$ ஐக் காண்க.

3.5 காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation)

பொதுவாகக் காரணிப்படுத்துதல் என்பது பெருக்கலின் திருப்புகைச் (reverse) செயல்பாடே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் : (i) 3யையும், 5யையும் பெருக்கும்போது 15 கிடைக்கும். 15ஐக் காரணிப்படுத்தும்போது 3, 5 காரணிகளாகக் கிடைக்கும்.

(ii) $(x+2)$ மற்றும் $(x+3)$ ஐப் பெருக்கும்போது, x^2+5x+6 கிடைக்கிறது. x^2+5x+6 ஐக் காரணிப்படுத்தும்போது $(x+2)$ மற்றும் $(x+3)$ ஆகியன காரணிகளாகக் கிடைக்கின்றன.

பெருக்குதல் (↓)		காரணிப்படுத்துதல் (↑)	
	$(x+3)(x+2)$		$(x+3)(x+2)$
	$x(x+2)+3(x+2)$		$x(x+2)+3(x+2)$
	$x^2+2x+3x+6$		$x^2+2x+3x+6$
	x^2+5x+6		x^2+5x+6

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட பெரிய படியுடைய பல்லுறுப்புக் கோவையைச் சிறிய படியுடைய கோவைகளின் பெருக்கற்பலனாக மாற்றி எழுதும் முறையே காரணிப்படுத்துதல் ஆகும். இங்கு மீளக் காரணிப்படுத்த வாய்ப்பில்லாதவாறு சிறிய படியுடைய கோவைகள் அமைதல் வேண்டும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 110 26-12-2019 12:15:32

காரணிப்படுத்துதலில் இரு முக்கிய வழிகள்

(i) பொதுவான காரணிமுறை

$ab + ac$

$a \times b + a \times c$

$a(b + c)$ காரணி அமைப்பு

(ii) குழுவாக எழுதுதல்

$a + b - pa - pb$

$(a + b) - p(a + b)$ குழுவாக அமைத்தல்

$(a + b)(1 - p)$ காரணி அமைப்பு

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காரணிப்படுத்தும்போது, பொதுவான காரணிகளை எடுத்துக் காரணி அமைப்பாக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.24 காரணிப்படுத்துக.

(i) $am + bm + cm$ (ii) $a^3 - a^2b$ (iii) $5a - 10b - 4bc + 2ac$ (iv) $x + y - 1 - xy$

தீர்வு

(i) $am + bm + cm$

$am + bm + cm$

$m(a + b + c)$ காரணி அமைப்பு

(ii) $a^3 - a^2b$

$a^2 \cdot a - a^2 \cdot b$ குழுவாக அமைத்தல்

$a^2 \times (a - b)$ காரணி அமைப்பு

(iii) $5a - 10b - 4bc + 2ac$

$5a - 10b + 2ac - 4bc$

$5(a - 2b) + 2c(a - 2b)$

$(a - 2b)(5 + 2c)$

(iv) $x + y - 1 - xy$

$x - 1 + y - xy$

$(x - 1) + y(1 - x)$

$(x - 1) - y(x - 1)$

$(x - 1)(1 - y)$

$(a - b) = -(b - a)$

3.5.4 முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation using Identity)

(i) $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$ (ii) $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a - b)^2$

(iii) $a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$ (iv) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \equiv (a + b + c)^2$

(v) $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (vi) $a^3 - b^3 \equiv (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(vii) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \equiv (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

குறிப்பு

- $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$; • $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$
- $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$; • $a^6 - b^6 = (a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

(i) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$ என நிரூபி. (ii) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = 4$ என நிரூபி.

3 Algebra_TM_T1.indd 111 26-12-2019 12:15:36

எடுத்துக்காட்டு 3.25

காரணிப்படுத்துக.

(i) $9x^2+12xy+4y^2$ (ii) $25a^2-10a+1$ (iii) $36m^2-49n^2$

(iv) x^3-x (v) x^4-16 (vi) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6xz$

தீர்வு

(i) $9x^2+12xy+4y^2 = (3x)^2+2(3x)(2y)+(2y)^2$

$= (3x+2y)^2$ [ஏனெனில் $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$]

(ii) $25a^2-10a+1 = (5a)^2-2(5a)(1)+1^2$

$= (5a-1)^2$ [ஏனெனில் $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$]

(iii) $36m^2-49n^2 = (6m)^2-(7n)^2$

$= (6m+7n)(6m-7n)$ [ஏனெனில் $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$]

(iv) $x^3-x = x(x^2-1)$

$= x(x^2-1^2)$

$= x(x+1)(x-1)$

(v) $x^4-16 = x^4-2^4$ [ஏனெனில் $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$]

$= (x^2+2^2)(x^2-2^2)$

$= (x^2+4)(x+2)(x-2)$

(vi) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+12yz-6xz$

$= (-x)^2+(2y)^2+(3z)^2+2(-x)(2y)+2(2y)(3z)+2(3z)(-x)$

$= (-x+2y+3z)^2$ (அல்லது) $(x-2y-3z)^2$

எடுத்துக்காட்டு 3.26

பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $27x^3+125y^3$ (ii) $216m^3-343n^3$

(iii) $2x^4-16xy^3$ (iv) $8x^3+27y^3+64z^3-72xyz$

சிந்தனைக் களம்

பின்வருபவை 15ஆல் வகுபடுமா எனச் சோதிக்க.

(i) 2017^3+2018^3

(ii) 2018^3-1973^3

தீர்வு

(i) $27x^3+125y^3 = (3x)^3+(5y)^3$

$= (3x+5y)\left((3x)^2-(3x)(5y)+(5y)^2\right)$ [ஏனெனில் $(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$]

$= (3x+5y)(9x^2-15xy+25y^2)$

3 Algebra_TM_T1.indd 112 26-12-2019 12:15:41

(ii) $216m^3 - 343n^3 = (6m)^3 - (7n)^3$ [ஏனெனில் $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$]

$$= (6m - 7n)\left((6m)^2 + (6m)(7n) + (7n)^2\right)$$

$$= (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2)$$

(iii) $2x^4 - 16xy^3 = 2x(x^3 - 8y^3)$

$$= 2x\left(x^3 - (2y)^3\right)$$ [ஏனெனில் $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$]

$$= 2x\left((x - 2y)(x^2 + (x)(2y) + (2y)^2)\right)$$

$$= 2x(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

(iv) $8x^3 + 27y^3 + 64z^3 - 72xyz$

$$= (2x)^3 + (3y)^3 + (4z)^3 - 3(2x)(3y)(4z)$$

$$= (2x + 3y + 4z)(4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 6xy - 12yz - 8xz)$$

பயிற்சி 3.5

1. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $2a^2 + 4a^2b + 8a^2c$ (ii) $ab - ac - mb + mc$
2. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $x^2 + 4x + 4$ (ii) $3a^2 - 24ab + 48b^2$ (iii) $x^5 - 16x$
   (iv) $m^2 + \frac{1}{m^2} - 23$ (v) $6 - 216x^2$ (vi) $a^2 + \frac{1}{a^2} - 18$
3. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 12xy + 30yz + 20xz$
   (ii) $25x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 20xy + 12yz - 30xz$
4. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $8x^3 + 125y^3$ (ii) $27x^3 - 8y^3$ (iii) $a^6 - 64$
5. பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:
   (i) $x^3 + 8y^3 + 6xy - 1$ (ii) $l^3 - 8m^3 - 27n^3 - 18lmn$

3.5.5 $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ என்ற அமைப்பில் உள்ள இருபடிப் பல்லுறுப்புக் கோவைகளைக் (மூவுறுப்புக்கோவை) காரணிப்படுத்தல் (Factorising the Quadratic Polynomial (Trinomial))

$ax^2 + bx + c$ இன் நேரிய காரணிகள் $(kx + m)$ மற்றும் $(lx + n)$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும்.

எனவே, $ax^2 + bx + c = (kx + m)(lx + n) = klx^2 + (lm + kn)x + mn$

3 Algebra_TM_T1.indd 113 26-12-2019 12:15:45

x^2, x இன் கெழு மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளை இருபுறமும் ஒப்பீடு செய்யும்போது நமக்கு $a = kl$, $b = (lm + kn)$ மற்றும் $c = mn$ எனக் கிடைக்கின்றன. இதில் ac என்பது kl மற்றும் mn இன் பெருக்கற்பலன் ஆகும். இது x இன் கெழுவான lm மற்றும் kn இன் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம். ஆகவே, $(kl \times mn) = (lm \times kn)$.

$ax^2 + bx + c$ ஐக் காரணிப்படுத்த பின்பற்ற வேண்டிய படிகள்

படி 1 : x^2 இன் கெழுவை மாறிலி உறுப்புடன் பெருக்க வேண்டும். அதாவது, ac.

படி 2 : ac ஐ இரு எண்களாகப் பிரிக்க வேண்டும். அவ்வாறு பிரிக்கும்போது எண்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் முறையே b மற்றும் ac இக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

படி 3 : இவ்வெண்களை இரு சோடிகளாகப் பிரித்துக் காரணிப்படுத்த வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.27

காரணிப்படுத்துக : $2x^2 + 15x + 27$

தீர்வு $ax^2 + bx + c$ உடன் $2x^2 + 15x + 27$ ஐ சமப்படுத்த,

$a = 2, \ b = 15, \ c = 27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2 \times 27 = 54$ மற்றும் கூடுதல் $b = 15$

எண்களின் பெருக்கல் ac = 54	எண்களின் கூடுதல் b = 15	எண்களின் பெருக்கல் ac = 54	எண்களின் கூடுதல் b = 15
1 × 54	55	–1 × –54	–55
2 × 27	29	–2 × –27	–29
3 × 18	21	–3 × –18	–21
6 × 9	**15**	–6 × –9	–15

6 மற்றும் 9 ஆகியன தேவையான காரணிகள்

6, 9 என்ற காரணிகள் $b = 15$ மற்றும் $ac = 54$ என்பதை நிறைவு செய்வதைக் காண முடிகிறது. மைய உறுப்பை $6x$ மற்றும் $9x$ என மாற்றி அமைக்க.

$$2x^2 + 15x + 27 = 2x^2 + 6x + 9x + 27$$
$$= 2x(x + 3) + 9(x + 3)$$
$$= (x + 3)(2x + 9)$$

எனவே, $2x^2 + 15x + 27 = (x + 3)\ (2x + 9)$

எடுத்துக்காட்டு 3.28

காரணிப்படுத்துக : $2x^2 - 15x + 27$

தீர்வு $ax^2 + bx + c$ உடன் $2x^2 - 15x + 27$ ஐச் சமப்படுத்த,

$a = 2, \ b = -15, \ c = 27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2 \times 27 = 54$,

மற்றும் கூடுதல் $b = -15$

எண்களின் பெருக்கல் ac = 54	எண்களின் கூடுதல் b = –15	எண்களின் பெருக்கல் ac = 54	எண்களின் கூடுதல் b =–15
1 × 54	55	–1 × –54	–55
2 × 27	29	–2 × –27	–29
3 × 18	21	–3 × –18	–21
6 × 9	15	**–6 × –9**	**–15**

–6 மற்றும் –9 ஆகியன தேவையான காரணிகள்

மைய உறுப்பை $-6x$ மற்றும் $-9x$ என மாற்றி அமைக்க,

$$2x^2 - 15x + 27 = 2x^2 - 6x - 9x + 27$$
$$= 2x(x - 3) - 9(x - 3) = (x - 3)(2x - 9)$$

எனவே, $2x^2 - 15x + 27$ இன் காரணிகள் $(x - 3)$ மற்றும் $(2x - 9)$ ஆகும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 114 26-12-2019 12:15:48

எடுத்துக்காட்டு 3.29

காரணிப்படுத்துக $2x^2+15x-27$

தீர்வு ax^2+bx+c ஐ $2x^2+15x-27$ உடன் சமப்படுத்த,

$a=2,\ b=15,\ c=-27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2\times-27 = -54$, மற்றும் கூடுதல் $b = 15$

மைய உறுப்பை $-3x$ மற்றும் $18x$ என மாற்றி அமைக்க,

எண்களின் பெருக்கல் $ac = -54$	எண்களின் கூடுதல் $b = 15$	எண்களின் பெருக்கல் $ac = -54$	எண்களின் கூடுதல் $b = 15$
-1×54	53	1×-54	-53
-2×27	25	2×-27	-25
-3×18	**15**	3×-18	-15
-6×9	3	6×-9	-3
-3 மற்றும் 18 ஆகியன தேவையான காரணிகள்			

$$2x^2+15x-27 = 2x^2+18x-3x-27$$
$$= 2x(x+9)-3(x+9) \qquad = (x+9)(2x-3)$$

எனவே, $2x^2+15x-27$ இன் காரணிகள் $(x+9)$ மற்றும் $(2x-3)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.30

காரணிப்படுத்துக : $2x^2-15x-27$

தீர்வு ax^2+bx+c ஐ $2x^2-15x-27$ உடன் சமப்படுத்த

$a=2,\ b=-15,\ c=-27$

பெருக்கற்பலன் $ac = 2\times-27=-54$, மற்றும் கூடுதல் $b = -15$

மைய உறுப்பை $-18x$ மற்றும் $3x$ என மாற்றி அமைக்க,

எண்களின் பெருக்கல் $ac = -54$	எண்களின் கூடுதல் $b = -15$	எண்களின் பெருக்கல் $ac = -54$	எண்களின் கூடுதல் $b = -15$
-1×54	53	1×-54	-53
-2×27	25	2×-27	-25
-3×18	15	**3×-18**	**-15**
-6×9	3	6×-9	-3
3 மற்றும் -18 ஆகியன தேவையான காரணிகள்			

$$2x^2-15x-27 = 2x^2-18x+3x-27$$
$$= 2x(x-9)+3(x-9) \qquad = (x-9)(2x+3)$$

எனவே, $2x^2-15x-27 = (x-9)(2x+3)$

எடுத்துக்காட்டு 3.31

$(x+y)^2+9(x+y)+20$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$x+y=p$, என்க.

$p^2+9p+20$ ஐ

ax^2+bx+c உடன் சமப்படுத்த,

$a=1,\ b=9,\ c=20$

பெருக்கற்பலன், $ac = 1\times20 = 20$,

மற்றும் கூடுதல் $b=9$

எண்களின் பெருக்கல் $ac = 20$	எண்களின் கூடுதல் $b = 9$	எண்களின் பெருக்கல் $ac = 20$	எண்களின் கூடுதல் $b = 9$
1×20	21	-1×-20	-21
2×10	12	-2×-10	-12
4×5	**9**	-4×-5	-9
4 மற்றும் 5 ஆகியன தேவையான காரணிகள்			

3 Algebra_TM_T1.indd 115 26-12-2019 12:15:51

மைய உறுப்பை $4p$ மற்றும் $5p$ என மாற்றி அமைக்க,

$$\begin{aligned} p^2+9p+20 &= p^2+4p+5p+20 \\ &= p(p+4)+5(p+4) \\ &= (p+4)(p+5) \end{aligned}$$

$p = x+y$ எனப் பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது,

$$(x+y)^2+9(x+y)+20 = (x+y+4)(x+y+5)$$

AK37F9

பயிற்சி 3.6

1. பின்வருவனவற்றை காரணிப்படுத்துக:

   (i) $x^2+10x+24$ (ii) $z^2+4z-12$ (iii) $p^2-6p-16$

   (iv) $t^2+72-17t$ (v) $y^2-16y-80$ (vi) $a^2+10a-600$

2. பின்வருவனவற்றை காரணிப்படுத்துக:

   (i) $2a^2+9a+10$ (ii) $5x^2-29xy-42y^2$ (iii) $9-18x+8x^2$

   (iv) $6x^2+16xy+8y^2$ (v) $12x^2+36x^2y+27y^2x^2$ (vi) $\left(a+b\right)^2+9\left(a+b\right)+18$

3. பின்வருவனவற்றை காரணிப்படுத்துக:

   (i) $(p-q)^2-6(p-q)-16$ (ii) $m^2+2mn-24n^2$ (iii) $\sqrt{5}a^2+2a-3\sqrt{5}$

   (iv) a^4-3a^2+2 (v) $8m^3-2m^2n-15mn^2$ (vi) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy}$

3.6 பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வகுத்தல் (Division of Polynomials)

13 மற்றும் 5 என்ற இரு எண்களை எடுத்துக் கொள்வோம். 13 ஐ 5 ஆல் வகுக்கும் போது ஈவு மற்றும் மீதி என்ன?

ஈவு 2 மற்றும் மீதி3. இதையே 13 என்பதை (5×2)+3 என எழுதலாம்.

தற்போது முயன்று பார்ப்போம்.

வகுக்க	கிடைக்கும் வடிவம்	மீதி	வகுப்பான்
11 ஐ 4 ஆல்	(4×2)+3	3	4
22 ஐ 11 ஆல்	(11×2)+0	0	11

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து, மீதியானது வகுத்தியை விடக் குறைவானது என்பது தெளிவாகிறது. மீதி பூச்சியமெனில் வகுபடும் எண்ணானது வகுத்தியின் மடங்காகும் எனக் கூற இயலும்.

வகுபடும் எண் = (வகுத்தி × ஈவு) + மீதி.

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையை மற்றொரு பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க இயலுமா?

இயலும் வழக்கமான எண் வகுத்தலைப் போல வகுக்கலாம்.

பல்லுறுப்புக் கோவை வகுத்தலை ஒருறுப்புக் கோவை வகுத்தலிலிருந்து தொடங்குவோம்.

3 Algebra_TM_T1.indd 116 26-12-2019 12:15:54

3.6.1 பல்லுறுப்புக் கோவைகளுக்கான வகுத்தல் விதியின் வடிவம் (Division Algorithm for Polynomials)

பொதுவாக, $p(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகிய இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் $p(x)$ இன் படி $\geq$ $g(x)$ இன் படி மற்றும் $g(x) \neq 0$ எனில், $q(x)$ மற்றும் $r(x)$ என்ற இரு தனித்த பல்லுறுப்புக் கோவைகள்

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x) \qquad \ldots (1)$$

என்ற வடிவத்தில் கிடைக்கும்.

இங்கு $r(x) = 0$ அல்லது $r(x)$ இன் படி $<$ $g(x)$ இன் படி.

பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ என்பது வகுபடும் எண், $g(x)$ என்பது வகுத்தி, $q(x)$ என்பது ஈவு $r(x)$ என்பது மீதி. எனவே, சமன்பாடு (1) யைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

வகுபடும் கோவை = (வகுக்கும் கோவை × ஈவு) + மீதி.

> $r(x)$ பூச்சியம் எனில், $p(x)$ என்பது $g(x)$ இன் மடங்கு. அதாவது $g(x)$ என்பது $p(x)$ ஐ வகுக்கும்.

இது சற்றுக் கடினமாகத் தோன்றினால் கவலை வேண்டாம், பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுப்பது எப்படி என்று தெரிந்துகொண்டு பயிற்சி செய்தால் எளிதாகும். இதற்குக் கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகள் உதவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.32 $x^3 - 4x^2 + 6x$ ஐ x ஆல் வகுக்க. இங்கு $x \neq 0$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 6x}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{4x^2}{x} + \frac{6x}{x}, \quad x \neq 0$$
$$= x^2 - 4x + 6$$

எடுத்துக்காட்டு 3.33 $(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$ இன் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

தீர்வு $(5x^2 - 7x + 2) \div (x - 1)$

$$\begin{array}{r|l} & 5x-2 \\ \hline x-1 & 5x^2 - 7x + 2 \\ & 5x^2 - 5x \\ & (-) \quad (+) \\ \hline & \quad -2x + 2 \\ & \quad -2x + 2 \\ & \quad (+) \quad (-) \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

(i) $\frac{5x^2}{x} = 5x$

(ii) $5x(x-1) = 5x^2 - 5x$

(iii) $-\frac{2x}{x} = -2$

(iv) $-2(x-1) = (-2x+2)$

∴ ஈவு $= 5x-2$ மீதி $= 0$

3 Algebra_TM_T1.indd 117 26-12-2019 12:15:57

எடுத்துக்காட்டு 3.34

$f(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $g(x)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7), g(x) = 2x+1.$ (ii) $f(x) = x^4-3x^3+5x^2-7, g(x) = x^2+x+1$

தீர்வு

(i) $f(x) = (8x^3-6x^2+15x-7), g(x) = 2x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2 - 5x + 10 \\
\hline
2x+1 & 8x^3-6x^2+15x-7 \\
 & 8x^3+4x^2 \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -10x^2+15x \\
 & -10x^2-5x \\
 & (+)\ \ (+) \\
\hline
 & 20x-7 \\
 & 20x+10 \\
 & (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -17
\end{array}
$$

$\therefore$ ஈவு $= 4x^2 - 5x + 10$, மீதி $= -17$

(ii) $f(x) = x^4-3x^3+5x^2-7, g(x) = x^2+x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + 8 \\
\hline
x^2+x+1 & x^4-3x^3+5x^2+0x-7 \\
 & x^4+x^3+x^2 \\
 & (-)\ \ (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -4x^3+4x^2+0x \\
 & -4x^3-4x^2-4x \\
 & (+)\ \ (+)\ \ (+) \\
\hline
 & 8x^2+4x-7 \\
 & 8x^2+8x+8 \\
 & (-)\ \ (-)\ \ (-) \\
\hline
 & -4x-15
\end{array}
$$

$\therefore$ ஈவு $= x^2 - 4x + 8$, மீதி $= -4x - 15$

3.6.2 தொகுமுறை வகுத்தல் (Synthetic Division)

பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுப்பதற்குத் தொகுமுறை வகுத்தல் என்பது ஒரு சுருக்கமான முறையாகும். இதில் மாறிகளைப் பயன்படுத்தாமல் இருப்பதால் அது கணக்கீட்டிற்கு எளிமையாகவும், நீள்வகுத்தலை விடக் குறைவான இடத்தையும் எடுத்துக்கொள்கிறது. இதுவே இதன் முக்கியப் பயனாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.35

$p(x) = (3x^3 - 2x^2 - 5 + 7x)$ ஐ $d(x) = x + 3$ ஆல் வகுத்து ஈவு $q(x)$ மற்றும் மீதி காண்க.

தீர்வு படி 1: வகுபடும் கோவை மற்றும் வகுக்கும் கோவை இரண்டையும் திட்ட வடிவிற்கு மாற்றுக.

$3x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ (திட்ட வடிவம்)

$x + 3$ (திட்ட வடிவம்)

வகுபடும் கோவையின் கெழுக்களை முதல் வரிசையில் எழுதவும். விடுபட்ட (இல்லாத) உறுப்பின் கெழுவுக்கு '0' எனப் பிரதியிட,

$3 \quad -2 \quad 7 \quad -5$

படி 2: வகுபடும் கோவையின் பூச்சியத்தைக் காண்க.

$x + 3 = 0$ எனவே $x = -3$

3 Algebra_TM_T1.indd 118 26-12-2019 12:15:58

படி 3: வகுபடும் கோவையின் பூச்சியத்தை முதல் வரிசைக்கு முன்னால் எழுதுக. இரண்டாம் வரிசையில் பூச்சியத்தை முதல் உறுப்புக்குக் கீழே எழுதுக.

-3	3	-2	7	-5	முதல் வரிசை
	0				இரண்டாம் வரிசை

படி 4: இரண்டாம், மூன்றாம் வரிசையைக் கீழ்க்காணுமாறு பூர்த்தி செய்க.

-3	3		-2		7		-5	முதல் வரிசை
	0	-3×3 →	-9	-3×-11 →	33	-3×40 →	-120	இரண்டாம் வரிசை
	3		-11		40		-125	மூன்றாம் வரிசை

மூன்றாவது வரிசையில் உள்ள கடைசி உறுப்பைத் தவிர ஏனைய உறுப்புகள் அனைத்தும் ஈவின் கெழுக்களாகும்.

ஈவு $3x^2-11x+40$ மற்றும் மீதி -125.

எடுத்துக்காட்டு 3.36 தொகுமுறை வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி $(3x^3-4x^2-5)$ ஐ $(3x+1)$ ஆல் வகுத்து ஈவு, மீதி காண்க.

தீர்வு

$3x+1$ இன் பூச்சியம் காண,

$$3x+1=0$$
$$3x=-1$$
$$x=-\frac{1}{3}$$

$p(x)=3x^3-4x^2-5,\ d(x)=(3x+1)$ என்க.

திட்ட வடிவம் $p(x)=3x^3-4x^2+0x-5$ மற்றும் $d(x)=3x+1$

$-\frac{1}{3}$	3	-4	0	-5	
	0	-1	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{9}$	
	3	-5	$\frac{5}{3}$	$\frac{-50}{9}$	மீதி

$$3x^3-4x^2-5=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(3x^2-5x+\frac{5}{3}\right)-\frac{50}{9}$$

$$=\frac{(3x+1)}{3}\times3\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9}\right)-\frac{50}{9}$$

$$3x^3-4x^2-5=(3x+1)\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9}\right)-\left(\frac{50}{9}\right)$$

[குறிப்பு: $(p(x)=d(x)q(x)+r$]

எனவே, ஈவு $\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9}\right)$ மற்றும் மீதி $\frac{-50}{9}$

3 Algebra_TM_T1.indd 119 26-12-2019 12:16:00

எடுத்துக்காட்டு 3.37 $x^4+10x^3+35x^2+50x+29$ ஐ $(x+4)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு x^3-ax^2+bx+6, எனில், a, b இன் மதிப்பு மற்றும் மீதி ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

> $x+4$ இன் பூச்சியம் காண,
>
> $x+4=0$
>
> $x=-4$

$p(x)=x^4+10x^3+35x^2+50x+29$ என்க.

திட்ட வடிவம் $=x^4+10x^3+35x^2+50x+29$

கெழுக்கள் 1 10 35 50 29

-4	1	10	35	50	29	
	0	-4	-24	-44	-24	
	1	6	11	6	5	மீதி

ஈவு $x^3+6x^2+11x+6$ ஐ x^3-ax^2+bx+6 உடன் ஒப்பிட,

x^2 இன் கெழு $6=-a$ x இன் கெழு $11=b$

ஆகவே, $a=-6$, $b=11$ மற்றும் மீதி $=5$.

பயிற்சி 3.7

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளை வகுத்து ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.
   (i) $(4x^3+6x^2-23x+18)\div(x+3)$ (ii) $(8y^3-16y^2+16y-15)\div(2y-1)$
   (iii) $(8x^3-1)\div(2x-1)$ (iv) $(-18z+14z^2+24z^3+18)\div(3z+4)$

2. செவ்வகத்தின் பரப்பு $x^2+7x+12$. அதன் அகலம் $(x+3)$ எனில், அதன் நீளம் காண்க.

3. இணைகரத்தின் பரப்பு $25x^2-16$. அதன் அடிப்பக்கம் $(5x+4)$ எனில், அதன் உயரம் காண்க.

4. $(x+5)$ விவரங்களின் கூடுதல் (x^3+125) எனில், விவரங்களின் சராசரியைக் காண்க.

5. தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி ஈவு மற்றும் மீதி காண்க:
   (i) $(x^3+x^2-7x-3)\div(x-3)$ (ii) $(x^3+2x^2-x-4)\div(x+2)$
   (iv) $(3x^3-2x^2+7x-5)\div(x+3)$ (vi) $(8x^4-2x^2+6x+5)\div(4x+1)$

6. $(8x^4-2x^2+6x-7)$ ஐ $(2x+1)$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $(4x^3+px^2-qx+3)$ எனில், p, q மற்றும் மீதியைக் காண்க.

7. $3x^3+11x^2+34x+106$ ஐ $x-3$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $3x^2+ax+b$ எனில், a, b மற்றும் மீதி ஆகியவற்றைக் காண்க.

3.6.3 தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்திக் காரணிப்படுத்துதல் (Factorisation using Synthetic Division)

ஒரு முப்படிக் கோவையைத் தொகுமுறை வகுத்தலின் உதவியால் எவ்வாறு ஒருபடிக் கோவைகளாகக் காரணிப்படுத்த இயலும் என்பதை இப்பகுதியில் நாம் கற்கலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ –க்கு ஒருபடிக் காரணி ஒன்றைத் தெரிந்து

3 Algebra_TM_T1.indd 120 26-12-2019 12:16:03

கொண்ட பிறகு, தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி $p(x)$ இன் இருபடிக் காரணியைக் காணலாம். மேலும், அந்த இருபடிக் கோவையை இயலுமெனில் ஒருபடிக் காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாகக் காரணிப்படுத்தலாம்.

குறிப்பு

- மாறிலிக் கோவை அல்லாத ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ –க்கு $p(a) = 0$ என இருந்தால் மட்டுமே $x = a$ என்பது அதன் பூச்சியமாகும்.
- $x{-}a$ ஆனது $p(x)$ –க்கு ஒரு காரணி என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $p(a) = 0$ ஆகும். (காரணித் தேற்றம்)

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு $(x - 1)$ மற்றும் $(x + 1)$ ஆகியன காரணிகளாகுமா என்பதை அடையாளம் காணுதல்:

- $p(x)$ இன் அனைத்து உறுப்புகளின் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலி உறுப்பின் கூடுதல் பூச்சியம் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $p(x)$ –க்கு $(x{-}1)$ ஒரு காரணியாகும்.
- $p(x)$ இன் இரட்டைப் படை அடுக்குகளில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்கள் மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளின் கூடுதலானது ஒற்றைப்படை அடுக்குகளில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $(x{+}1)$ ஆனது $p(x)$ –க்கு ஒரு காரணியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.38

(i) $x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ –க்கு $(x - 1)$ ஒரு காரணியாகும் என நிரூபி.

(ii) $x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ –க்கு $(x + 1)$ ஒரு காரணியாகும் என நிரூபி.

தீர்வு (i) $p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 7$ என்க.

கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 - 7 + 13 - 7 = 0$

எனவே, $(x - 1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

(ii) $q(x) = x^3 + 7x^2 + 13x + 7$ என்க.

இரட்டைப்படை அடுக்குகள் கொண்ட உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 7 + 7 = 14$

ஒற்றைப்படை அடுக்குகள் கொண்ட உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 + 13 = 14$

எனவே, $(x + 1)$ என்பது $q(x)$ இன் ஒரு காரணி.

எடுத்துக்காட்டு 3.39

$x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ ஐ நேரிய காரணிகளாகக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு $p(x) = x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ என்க.

அனைத்து உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 + 13 + 32 + 20 = 66 \neq 0$

எனவே, $(x - 1)$ என்பது ஒரு காரணியல்ல.

இரட்டைப்படை அடுக்கு கொண்ட உறுப்பின் கெழு மற்றும் மாறிலியின் கூடுதல் $= 13 + 20 = 33$

ஒற்றைப்படை அடுக்குகள் கொண்ட உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் $= 1 + 32 = 33$

ஆகவே, $(x + 1)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி.

3 Algebra_TM_T1.indd 121 26-12-2019 12:16:04

மற்ற நேரிய காரணிகளைக் காணத் தொகுமுறை வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

முறை I	முறை II
$\begin{array}{r\|rrrr} -1 & 1 & 13 & 32 & 20 \\ & 0 & -1 & -12 & -20 \\ \hline -2 & 1 & 12 & 20 & 0 \text{ (மீதி)} \\ & 0 & -2 & -20 & \\ \hline & 1 & 10 & 0 \text{ (மீதி)} & \end{array}$ $p(x) = (x+1)(x+2)(x+10)$ எனவே, $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ $= (x+1)(x+2)(x+10)$	$\begin{array}{r\|rrrr} -1 & 1 & 13 & 32 & 20 \\ & 0 & -1 & -12 & -20 \\ \hline & 1 & 12 & 20 & 0 \text{ (மீதி)} \end{array}$ பிறகு, $p(x) = (x+1)(x^2 + 12x + 20)$ இப்போது, $x^2 + 12x + 20 = x^2 + 10x + 2x + 20$ $= x(x+10) + 2(x+10)$ $= (x+2)(x+10)$ எனவே, $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$ $= (x+1)(x+2)(x+10)$

எடுத்துக்காட்டு 3.40 $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு

$p(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ என்க.

$x = 1$ எனில் $p(1) = 1 - 5 - 2 + 24 = 18 \neq 0$ $(x-1)$ ஒரு காரணியல்ல.

$x = -1$ எனில் $p(-1) = -1 - 5 + 2 + 24 = 20 \neq 0$ $(x+1)$ ஒரு காரணியல்ல.

ஆகவே, மற்ற x இன் காரணிகளைக் காண முயன்று தவறிக் கற்றல் (trial and error method) முறையைப் பயன்படுத்தவும்.

$x = 2$ எனில்,

$p(2) = 2^3 - 5(2)^2 - 2(2) + 24$

$= 8 - 20 - 4 + 24$

$= 8 \neq 0$

ஆகவே, $(x-2)$ ஒரு காரணியல்ல

$x = -2$ எனில்,

$p(-2) = (-2)^3 - 5(-2)^2 - 2(-2) + 24$

$= -8 - 20 + 4 + 24$

$p(-2) = 0$

ஆகவே, $(x+2)$ ஒரு காரணியாகும்

குறிப்பு

$x^2 - 7x + 12$ –க்கு 3 ஆனது ஒரு பூச்சியமா என சோதிக்கும்போது, 3 ஒரு பூச்சியமில்லை எனில், -3 அல்லது 4 அல்லது, -4 … பூச்சியமா எனச் சோதிக்க.

3 Algebra_TM_T1.indd 122 26-12-2019 12:16:07

–2	1	–5	–2	24
	0	–2	+14	–24
3	1	–7	12	0 (மீதி)
	0	3	–12	
	1	–4	0 (மீதி)	

எனவே, $(x+2)(x-3)(x-4)$ ஆகியன காரணிகள்.

ஆகவே, $x^3 - 5x^2 - 2x^2 + 24 = (x+2)(x-3)(x-4)$

பயிற்சி 3.8

1. தொகுமுறை வகுத்தல் முறையினைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றைக் காரணிப்படுத்துக:

(i) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

(ii) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

(iii) $-7x + 3 + 4x^3$

(iv) $x^3 + x^2 - 14x - 24$

(v) $x^3 - 7x + 6$

(vi) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

3.7 மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ.பொ.வ) [Greatest Common Divisor (GCD)]

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியானது (சுருக்கமாக மீ.பொ.வ) அதன் பொதுக் காரணிகளுள் அதிகபட்சப் பொதுப்படியைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இதுவே மீப்பெரு பொதுக்காரணி (மீ.பொ.கா) [Highest Common Factor (HCF)] என்பது தெரிந்ததே.

எடுத்துக்காட்டாக, $14xy^2$ மற்றும் $42xy$ என்ற கோவைகளைக் கருதுவோம். 14 மற்றும் 42இன் பொது வகுத்திகள் 2, 7 மற்றும் 14 ஆகும். இவற்றின் மீ.பொ.வ 14 ஆகும். xy^2 மற்றும் xy இன் பொது வகுத்திகளாவன x, y மற்றும் xy இவற்றின் மீ.பொ.வ xy ஆகும்.

$$14xy^2 = 1 \times 2 \times 7 \times x \times y \times y$$

$$42xy = 1 \times 2 \times 3 \times 7 \times x \times y$$

எனவே, $14xy^2$ மற்றும் $42xy$ இன் மீ.பொ.வ $14xy$ ஆகும்.

காரணிப்படுத்துதல் முறையில் மீ.பொ.வ. காணுதல் (To find the GCD by Factorisation)

(i) கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு கோவையையும், காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதவும்.

(ii) வகுக்கும் கோவைகளின் பொதுவான உயர் படி கொண்ட கோவையே மீ.பொ.வ ஆகும்.

(iii) கோவைகளில் கெழுக்கள் எண்களாக இருப்பின், அவற்றின் மீ.பொ.வ கண்டறிந்து அதைக் கோவைகளின் மீ.பொ.வ.வுடன் பெருக்க வேண்டும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 123 26-12-2019 12:16:08

எடுத்துக்காட்டு 3.41

கீழ்க்காண்பனவற்றிற்கு மீ.பொ.வ. காண்க.

(i) $16x^3y^2,\ 24xy^3z$ (ii) (y^3+1) மற்றும் (y^2-1)

(iii) $2x^2-18$ மற்றும் x^2-2x-3 (iv) $(a-b)^2,\ (b-c)^3,\ (c-a)^4$

தீர்வு

(i) $16x^3y^2 = 2\times2\times2\times2\times x^3y^2 = 2^4\times x^3\times y^2 = 2^3\times 2\times x^2\times x\times y^2$

$24xy^3z = 2\times2\times2\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y^3\times z = 2^3\times3\times x\times y\times y^2\times z$

ஆகவே, மீ.பொ.வ. $= 2^3xy^2$

(ii) $y^3+1 = y^3+1^3 = (y+1)(y^2-y+1)$

$y^2-1 = y^2-1^2 = (y+1)(y-1)$

ஆகவே, மீ.பொ.வ. $= (y+1)$

(iii) $2x^2-18 = 2(x^2-9) = 2(x^2-3^2) = 2(x+3)(x-3)$

$$\begin{aligned} x^2-2x-3 &= x^2-3x+x-3 \\ &= x(x-3)+1(x-3) \\ &= (x-3)(x+1) \end{aligned}$$

ஆகவே, மீ.பொ.வ $= (x-3)$

(iv) $(a-b)^2,\ (b-c)^3,\ (c-a)^4$

1ஐத் தவிர, பொதுவான காரணி இல்லை. எனவே, மீ.பொ.வ $= 1$.

பயிற்சி 3.9

1. கீழ்க்காண்பனவற்றிற்கு மீ.பொ.வ காண்க.

(i) $p^5,\ p^{11},\ p^9$ (ii) $4x^3,\ y^3,\ z^3$

(iii) $9a^2b^2c^3,\ 15a^3b^2c^4$ (iv) $64x^8,\ 240x^6$

(v) $ab^2c^3,\ a^2b^3c,\ a^3bc^2$ (vi) $35x^5y^3z^4,\ 49x^2yz^3,\ 14xy^2z^2$

(vii) $25ab^3c,\ 100a^2bc,\ 125ab$ (viii) $3abc, 5xyz, 7pqr$

2. கீழ்க்காண்பனவற்றிற்கு மீ.பொ.வ காண்க.

(i) $(2x+5),\ (5x+2)$ (ii) $a^{m+1},\ a^{m+2},\ a^{m+3}$ (iii) $2a^2+a,\ 4a^2-1$

(iv) $3a^2,\ 5b^3,\ 7c^4$ (v) $x^4-1,\ x^2-1$ (vi) $a^3-9ax^2,\ (a-3x)^2$

3 Algebra_TM_T1.indd 124 26-12-2019 12:16:14

3.8 இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடு (Linear Equation in Two Variables)

இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரியச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் $ax + by + c = 0$ ஆகும். இதில், a, b, c ஆகியன மெய்யெண்கள், a மற்றும் b ஆகிய இரண்டும் பூச்சியமற்றவை (x, y என்பன இரண்டு மாறிகள், c என்பது மாறிலி).

எடுத்துக்காட்டுகள்

இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடு	இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடல்லாதவை
$2x + y = 4$	$xy + 2x = 5$ (ஏன்?)
$-5x + \frac{1}{2} = y$	$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 25$ (ஏன்?)
$5x = 35y$	$x(x+1) = y$ (ஏன்?)

ஒரு படியில் அமைந்த இரண்டு மாறிகளைக் கொண்டதும் அந்த இரண்டு மாறிகளின் பெருக்குதல் இல்லாமலும் அமையும் சமன்பாடானது இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடாகும். (இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு சமன்பாட்டின் படி 1 எனில் அச்சமன்பாடு இரு மாறியில் அமைந்த நேரியச் சமன்பாடு எனப்படும்).

உதாரணமாக $2x + y = 4$ என்பது நேரியச் சமன்பாடாகுமா? நீங்கள் நினைப்பது சரிதான். ஏனென்றால் இச்சமன்பாட்டின் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடாகும். அதனைச் சரிபார்ப்போமா ?

$2x + y = 4$ என்ற வரைபடம் வரைய சில புள்ளிகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றை நாம் இணைக்க வேண்டி இருக்கிறது. (அப்புள்ளிகளே சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் வரிசைச் சோடிகள் ஆகும்). கொடுக்கப்பட்டுள்ள சோடிப் புள்ளிகளைக் கொண்டு $2x + y = 4$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு அட்டவணையைத் தயாரிக்க

$y = 4 - 2x$ என்பதாக எடுத்துக்கொள்வோம். (ஏன்? எப்படி?)

$x = -4$ எனில், $y = 4 - 2(-4) = 4 + 8 = 12$

$x = -2$ எனில், $y = 4 - 2(-2) = 4 + 4 = 8$

$x = 0$ எனில், $y = 4 - 2(0) = 4 + 0 = 4$

$x = +1$ எனில், $y = 4 - 2(+1) = 4 - 2 = 2$

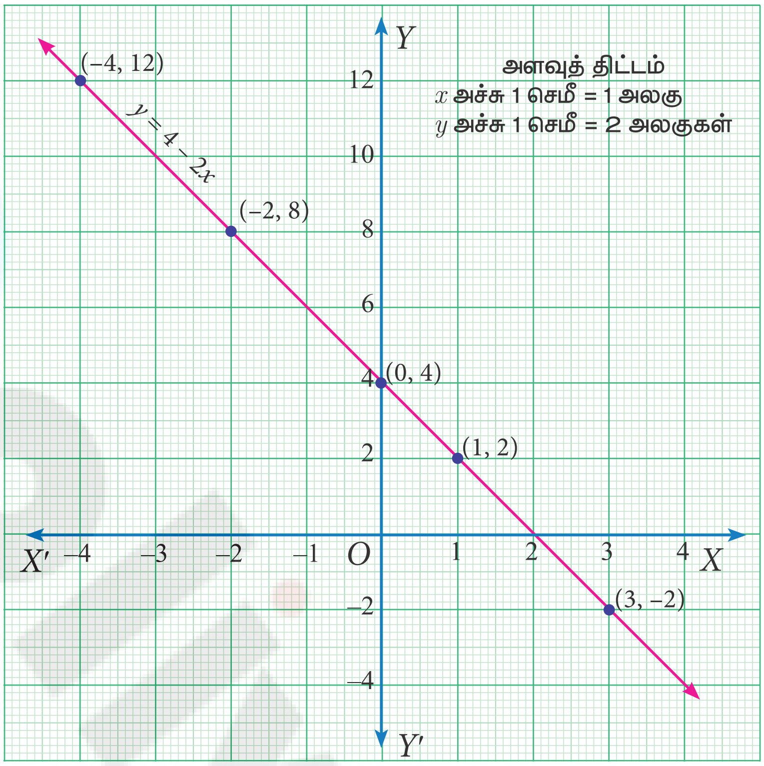
$x = +3$ எனில், $y = 4 - 2(+3) = 4 - 6 = -2$

இந்த மதிப்புகளைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்:

x-இன் மதிப்பு	-4	-2	0	1	3
y-இன் மதிப்பு	12	8	4	2	-2

(ஒரு கோட்டினை அமைக்க, நமக்குப் பல புள்ளிகள் தேவைப்படுகிறதா? ஒரு கோட்டினை அமைக்க இரண்டு புள்ளிகள் போதுமானது. இதைச் சரிபார்ப்பதற்காகக் கூடுதலாக ஒரு புள்ளியினை எடுத்துக்கொள்ளலாம்).

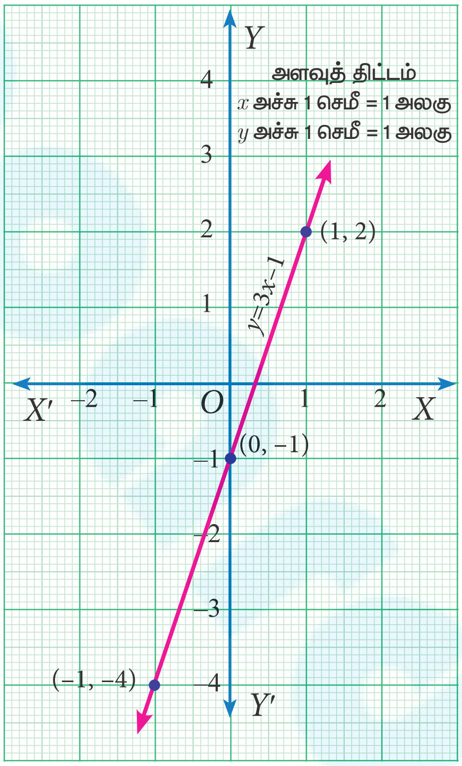
3 Algebra_TM_T1.indd 125 26-12-2019 12:16:14



படம் 3.15

$(-4,12)$, $(-2,8)$, $(0,4)$, $(1,2)$ மற்றும் $(3,-2)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிக்கும்பொழுது அவை ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவதைக் காணலாம். இதிலிருந்து $2x + y = 4$ என்ற சமன்பாடு ஒரு நேர்க்கோடாக அமைகிறது என்பது தெளிவாகின்றது. (ஆகவே இது **ஒரு நேரிய சமன்பாடு** எனப்படுகிறது).

கோட்டின் மீதுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளும் இந்தச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்வதால் கோட்டின் மீதுள்ள அனைத்துப் புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடிகளும் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.



படம் 3.16

எடுத்துக்காட்டு 3.42 பின்வருவனவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக.

(i) $y = 3x - 1$ (ii) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 3$

தீர்வு

(i) $y = 3x - 1$ என்ற கோட்டிற்கான புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடிகளைக் காண்பதற்கு அட்டவணையைத் தயாரிக்கலாம்.

x-இன் மதிப்பாக எந்த மதிப்பை வேண்டுமென்றாலும் எடுத்துக்கொள்ளலாம், இங்கு -1, 0 மற்றும் 1 ஐ மட்டுமே எடுத்துக்கொள்வோம் .

3 Algebra_TM_T1.indd 126 26-12-2019 12:16:16

$x = -1$ எனில், $y = 3(-1)-1 = -4$

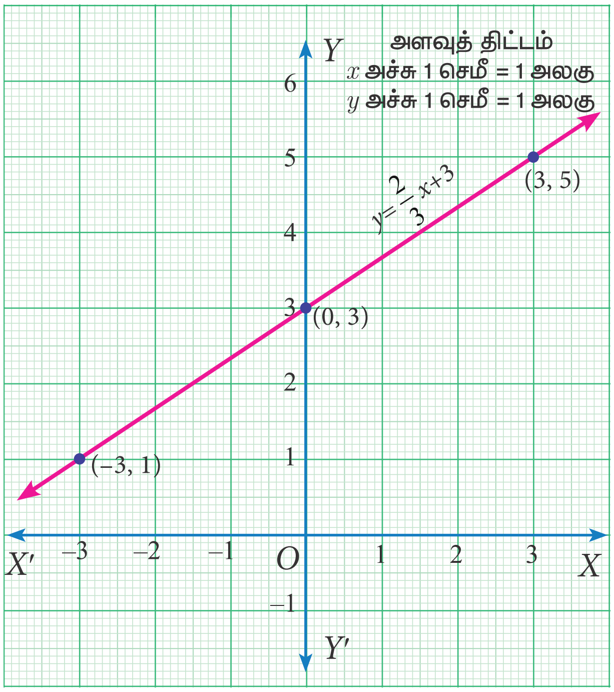
$x = 0$ எனில், $y = 3(0)-1 = -1$

$x = 1$ எனில், $y = 3(1)-1 = 2$

x	-1	0	1
y	-4	-1	2

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் (x,y) :

$(-1, -4), (0, -1), (1, 2).$



படம் 3.17

(ii) $y = \left(\frac{2}{3}\right)x + 3$ என்ற கோட்டின் புள்ளிகளின் வரிசைச் சோடிகளைக் காண்பதற்கான அட்டவணையைத் தயாரிக்கலாம்.

x இன் மதிப்புகளை $-3,\ 0,\ 3$ என எடுத்துக்கொள்கிறோம். (ஏன்?)

$x = -3$ எனில், $y = \frac{2}{3}(-3)+3 = 1$

$x = 0$ எனில், $y = \frac{2}{3}(0)+3 = 3$

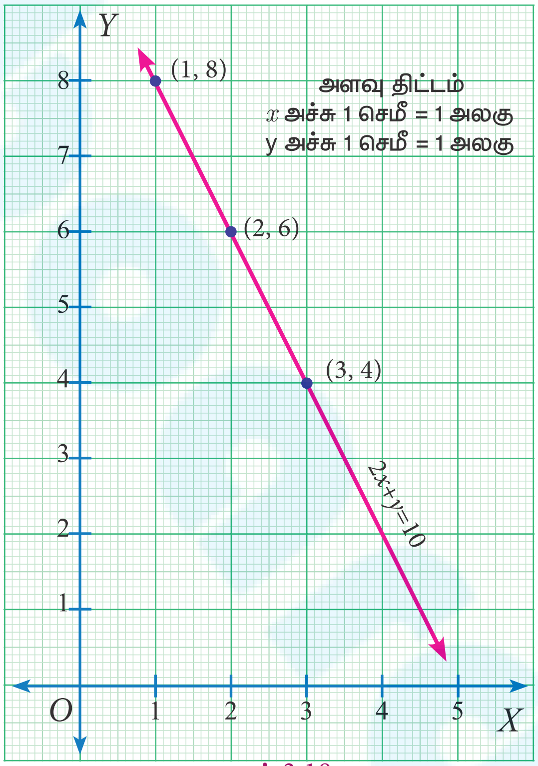
$x = 3$ எனில், $y = \frac{2}{3}(3)+3 = 5$

x	-3	0	3
y	1	3	5

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் (x,y) :

$(-3,1), (0,3), (3,5).$

3.8.1 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் (Simultaneous Linear Equations)



படம் 3.18

சமன்பாடுகளை வரைபடத்தில் குறிப்பது பற்றி ஏற்கனவே அறிந்த நாம், தற்போது சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு குறித்தும், குறிப்பாக இரண்டு ஒருங்கமைந்த நேரியச் சமன்பாடுகளைப் பற்றி கற்க இருக்கிறோம்.

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் என்றால் என்ன? இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகள் ஒரே வகையான மாறிகளைக் கொண்டிருந்தால் அவை **ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள்** ஆகும்.

இவை ஏன் நமக்குத் தேவைப்படுகின்றன? $2x + y = 10$ ஐப் போன்ற ஒரு சமன்பாட்டிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு. $(1,8), (2,6), (3,4)$ மற்றும் மேலும் சில புள்ளிகளும் வரைபடத்தில் உள்ள கோட்டின் மீது அமையும் முடிவுறாத தீர்வுகளாகும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 127 26-12-2019 12:16:19

இது போன்ற ஒரு சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதற்கு, இதனுடன் சேர்த்து மற்றொரு சமன்பாட்டையும் பயன்படுத்தினால் மட்டுமே ஒரே நேரத்தில் இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்கும் ஒரு வரிசைச் சோடியைத் தீர்வாகப் பெற முடியும். இதுபோன்று இரண்டு சமன்பாடுகளை ஒருங்கிணைத்துத் தீர்க்கக் கிடைக்கும் அர்த்தமுள்ள சூழ்நிலைகளை ஏற்படுத்தும் சமன்பாடுகளை **ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள்** என்கிறோம்.

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளை நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழ்நிலையின் மூலம் புரிந்துகொள்ளுதல்.

அனிதா இரண்டு அழிப்பான்களையும் ஒரு கரி எழுதுகோலையும் ₹10 இக்கு வாங்கினாள் என்று கருதுக. அவற்றின் தனிப்பட்ட விலை பற்றி அனிதாவிற்குத் தெரியவில்லை. ஓர் அழிப்பானின் விலையை x எனவும், ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலையை y எனவும் கொண்டு இதற்கு ஒரு சமன்பாட்டினை நாம் அமைப்போம்.

அதாவது, $2x + y = 10$ ...(1)

இப்பொழுது, ஓர் அழிப்பான் மற்றும் ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலையைத் தனித்தனியாக அறிந்துகொள்ள அனிதா விரும்புகிறாள்.

அதற்காக அவள் x மற்றும் y இக்குப் பல மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி சமன்பாடு (1) இக்கு தீர்வு காண முயற்சி செய்கிறாள்.

$2 \times$ ஓர் அழிப்பானின் விலை + ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலை $=$ ₹10

$2(1)+8 = 10$

$2(1.5)+7 = 10$

$2(2)+6 = 10$

$2(2.5)+5 = 10$

$2(3)+4 = 10$

⋮ ⋮

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் :

x	1	1.5	2	2.5	3	...
y	8	7	6	5	4	...

F6786R

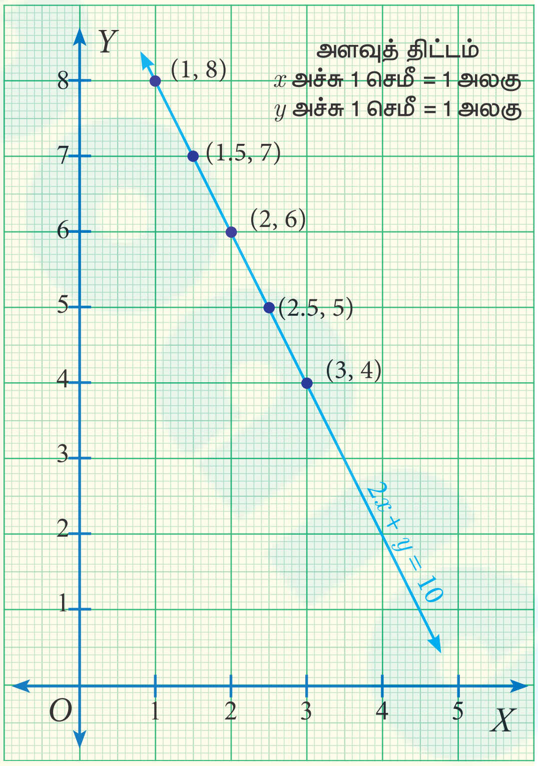
அவள் எண்ணற்ற விடைகளைப் பெறுகிறாள். ஆகையால் அவள் இரண்டாவது சமன்பாட்டைக் கொண்டு விலையை அறிய முயற்சிக்கிறாள்.

அனிதாவிற்கு மேலும் சில கரி எழுதுகோல்கள் மற்றும் அழிப்பான்கள் தேவைப்படுகிறது. இப்பொழுது அவர் வாங்கிய 3 அழிப்பான்கள் மற்றும் 4 கரி எழுதுகோல்களுக்காகக் கடைக்காரர் மொத்தத் தொகையாக ₹30 ஐப் பெற்றுக்கொள்கிறார். இதற்கு முன்பு அமைத்ததைப் போலவே நாம் மற்றொரு சமன்பாட்டை அமைக்கலாம்.

$3x + 4y = 30$ ...(2)

இப்பொழுதும் அவள் கீழ்க்கண்டவாறு எண்ணற்ற தீர்வுகளைப் பெறுகிறாள்.

$3 \times$ ஓர் அழிப்பானின் விலை $+ 4$ (ஒரு கரி எழுதுகோலின் விலை) $=$ ₹30



படம் 3.19

3 Algebra_TM_T1.indd 128 26-12-2019 12:16:20

$3(2)+4\,(6) = 30$

$3(4)+4\,(4.5) = 30$

$3(6)+4\,(3) = 30$

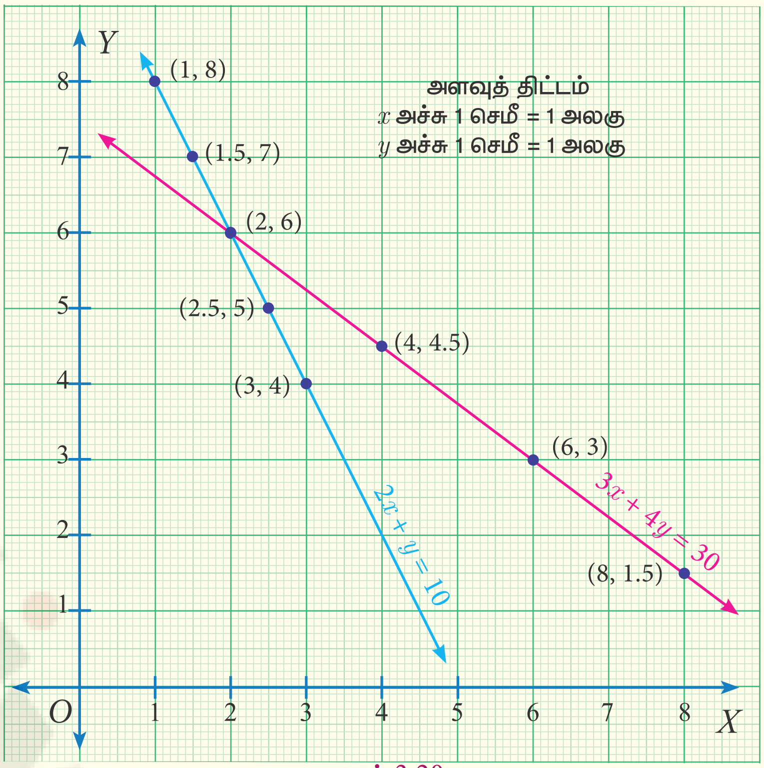
$3(8)+4\,(1.5) = 30$

$\vdots \qquad \vdots$

குறிக்க வேண்டிய புள்ளிகள் :

x	2	4	6	8	...
y	6	4.5	3	1.5	...

இதனை அவளது ஆசிரியருடன் கலந்துரையாடும்போது அதற்கு அவர் இரண்டு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே அமைத்துத் தீர்க்கும்போது ஒரே ஒரு தீர்வுதான் கிடைக்கும் என்று கூறினார்.



படம் 3.20

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) ஐத் தீர்க்க, ஓர் அழிப்பானின் விலை ₹2 என்றும் ஒரு எழுதுகோலின் விலை ₹6 என்றும் பெறுகிறோம். இதனை வரைபடத்தில் (படம் 3.20) காண முடியும்.

இது போன்ற நிகழ்வில் ஓர் அர்த்தமுள்ள சூழ்நிலையை உருவாக்க நம்மால் இணைத்துக் கருதப்படும் சமன்பாடுகளே ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் எனப்படுகின்றன.

ஆகவே, ஒரே வகையான மாறிகளில் அமைந்த இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகளை **ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள்** அல்லது **நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு** அல்லது **நேரிய சமன்பாடுகளின் சோடி என அழைக்கப்படுகின்றன.**

எடுத்துக்காட்டு 3.43

$x - 2y = 7$ மற்றும் $2x + 3y = 7$ என்ற ஒருங்கமைந்த சமன்பாடுகளுக்கு $(5, -1)$ என்பது தீர்வாகுமா என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை $x - 2y = 7$ ...(1)

$2x + 3y = 7$ ...(2)

$x = 5,\ y = -1$ எனில், நமக்குக் கிடைப்பது,

(1) இலிருந்து $x - 2y = 5 - 2(-1) = 5 + 2 = 7$ (வலது பக்கம்)

(2) இலிருந்து $2x + 3y = 2(5) + 3(-1) = 10-3 = 7$ (வலது பக்கம்)

ஆகவே, $x = 5,\ y = -1$ என்ற மதிப்புகளானது சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ ஒரே நேரத்தில் நிறைவு செய்கிறது. ஆகவே, $(5,-1)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தீர்வாகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

$2x - 5y - 2 = 0$ மற்றும் $x + y - 6 = 0$ ஆகிய ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு $(3, 3)$ என்பது ஒரு தீர்வாகுமா என்பதை வரைபடம் மூலம் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

3 Algebra_TM_T1.indd 129 26-12-2019 12:16:20

3.8.2 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகள் (Methods of solving simultaneous linear equations)

ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கப் பல வழிமுறைகள் உள்ளன. அவற்றைப் பெரும்பாலும் வடிவியல் முறை மற்றும் இயற்கணித முறை என வகைப்படுத்தலாம்.

வடிவியல் முறை	இயற்கணித முறை
1. வரைபட முறை	1. பிரதியிடல் முறை 2. நீக்கல் முறை 3. குறுக்குப் பெருக்கல் முறை

வரைபட முறையின் மூலம் தீர்வு காணுதல் (Solving by Graphical Method)

இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டை எவ்வாறு வரைபடம் வரைந்து விளக்கலாம் என்பதை முன்னரே கண்டுள்ளோம். இங்கு நாம் இரு மாறிகளில் அமைந்த இரு நேரிய சமன்பாடுளின் வரைபடம் வரைந்து அதன் மூலம் ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கான தீர்வை காண முடியும் என்பதைப் பற்றிக் கற்கப்போகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.44 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க. $x+y=5;\ 2x-y=4.$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை $x+y=5$ ...(1)

$2x-y=4$ ...(2)

சமன்பாடு (1) இக்கு வரைபடம் வரைதல் எளிது.

முதற்கோட்டின் மீதுள்ள இரண்டு புள்ளிகளின் x மற்றும் y மதிப்புகளை பின்வருமாறு காணலாம்.

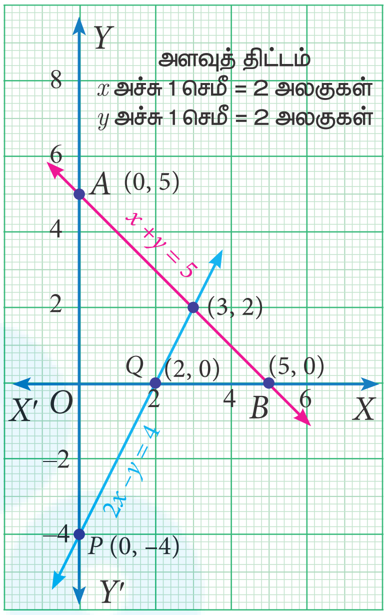
$x=0$ எனில், (1) இலிருந்து $y=5$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, $A(0,5)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

$y=0$ எனில், (1) இலிருந்து $x=5$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, $B(5,0)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள மற்றொரு புள்ளியாகும்.

வரைபடத்தில் A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றை இணைத்துக் கோடு (1) வரைக.



படம் 3.21

இதே முறையைப் பயன்படுத்திச் சமன்பாடு (2) இக்கும் வரைபடம் வரையலாம்.

$x=0$ எனில், (2) இலிருந்து $y=-4$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே $(0,-4)$ என்பது கோட்டின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி.

$y=0$ எனில், (2) இலிருந்து $x=2$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே $Q(2,0)$ என்பது அந்தக் கோட்டின் மீதுள்ள மற்றொரு புள்ளி ஆகும்.

வரைபடத்தில் P மற்றும் Q ஆகிய புள்ளிகளைக் குறித்து

> **குறிப்பு**
> கிடைக்கப்பெற்ற தீர்வானது இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வாக அமைகிறதா (நிறைவு செய்கிறதா) என்று சரிபார்த்தல் நலம்.

3 Algebra_TM_T1.indd 130 26-12-2019 12:16:21

இரண்டு புள்ளிகளையும் இணைத்துக் கோடு (2) வரைக.

இந்த இரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியான (3,2) என்பது சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) இன் தீர்வாகும். இரு கோடுகளுக்கும் ஒரே ஒரு புள்ளி தீர்வாக அமைகிறது. ஆகவே, தீர்வு $x = 3,\ y = 2$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.45 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க $3x + 2y = 6;\ 6x + 4y = 8$

தீர்வு ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் அட்டவணை தயாரித்து வரிசைச் சோடிப் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

$3x + 2y = 6$ இன் வரைபடம்

x	-2	0	2
y	6	3	0

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள் :

$(-2,6),\ (0,3),\ (2,0)$

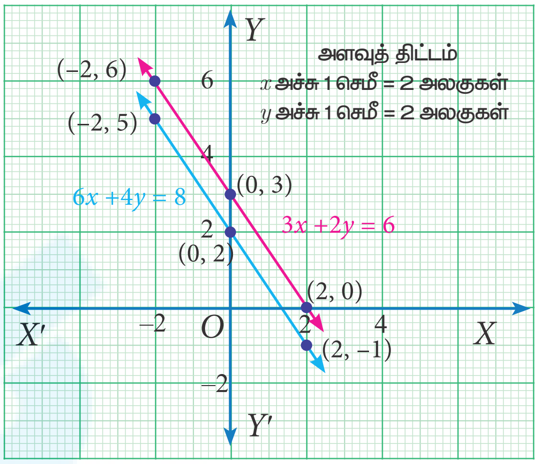
$6x + 4y = 8$ இன் வரைபடம்

x	-2	0	2
y	5	2	-1

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள்:

$(-2,5),\ (0,2),\ (2,-1)$

இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் வரைபடம் வரைந்தால், இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக அமைந்து நமக்கு வெட்டும்புள்ளியைக் கொடுக்காததைக் காணலாம். இதன் மூலமாக இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் பொதுவான வெட்டும்புள்ளி தீர்வாக அமையாததைக் காணலாம். எனவே, இச்சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு கிடையாது.



படம் 3.22

எடுத்துக்காட்டு 3.46 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு வரைபடம் மூலம் தீர்வு காண்க $y = 2x + 1;\ -4x + 2y = 2$

தீர்வு ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் அட்டவணை தயாரித்து வரிசைச் சோடிப் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

$y = 2x + 1$ இன் வரைபடம்

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5

குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள் :

$(-2, -3),\ (-1, -1),\ (0,1),\ (1,3),\ (2, 5)$

$-4x + 2y = 2$ இன் வரைபடம்

$2y = 4x + 2$

$y = 2x + 1$

x	-2	-1	0	1	2
$2x$	-4	-2	0	2	4
1	1	1	1	1	1
$y = 2x+1$	-3	-1	1	3	5

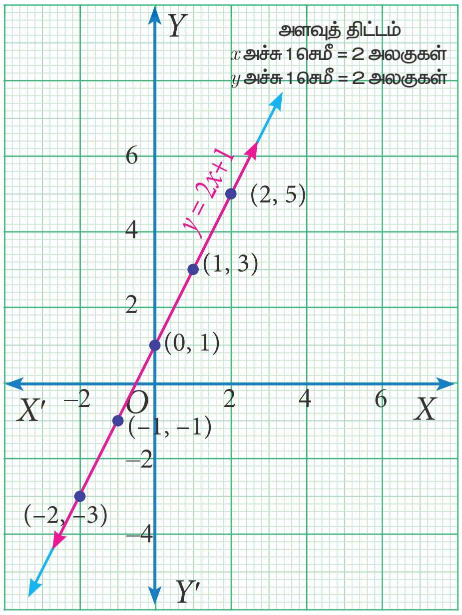
குறிக்கவேண்டிய புள்ளிகள் :

$(-2, -3),\ (-1, -1),\ (0, 1),\ (1, 3),\ (2, 5)$

3 Algebra_TM_T1.indd 131 26-12-2019 12:16:21

இங்கு, இரு சமன்பாடுகளும் ஒன்றே; ஆனால் இரண்டும் வெவ்வேறு வடிவில் அமைந்துள்ளன. சமன்பாடுகள் இரண்டும் ஒன்றே என்பதால் தீர்வுகளும் ஒரே மாதிரியானவை. இங்கு ஒரு கோட்டின் மீதமைந்த அனைத்துப் புள்ளிகளும் மற்றொரு கோட்டின் மீதே உள்ளன.

எனவே, இங்கு கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள அனைத்து வரிசைச் சோடிப் புள்ளிகளும் எண்ணற்ற தீர்வுகளாக அமைகின்றன.



படம் 3.23

எடுத்துக்காட்டு 3.47

ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு 36 மீட்டர் மற்றும் நீளமானது அகலத்தின் மூன்று மடங்கை விட 2 மீட்டர் அதிகமெனில், செவ்வகத்தின் பக்க அளவுகளை வரைபட முறையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுகளுக்கு நாம் சமன்பாடுகளை அமைப்போம்.

செவ்வகத்தின் நீளம் மற்றும் அகலத்தை முறையே l மற்றும் b என்க.

முதல் கூற்றுக்குச் சமன்பாடு அமைத்தல்

செவ்வகத்தின் சுற்றளவு = 36 மீ

$$2(l+b)=36$$

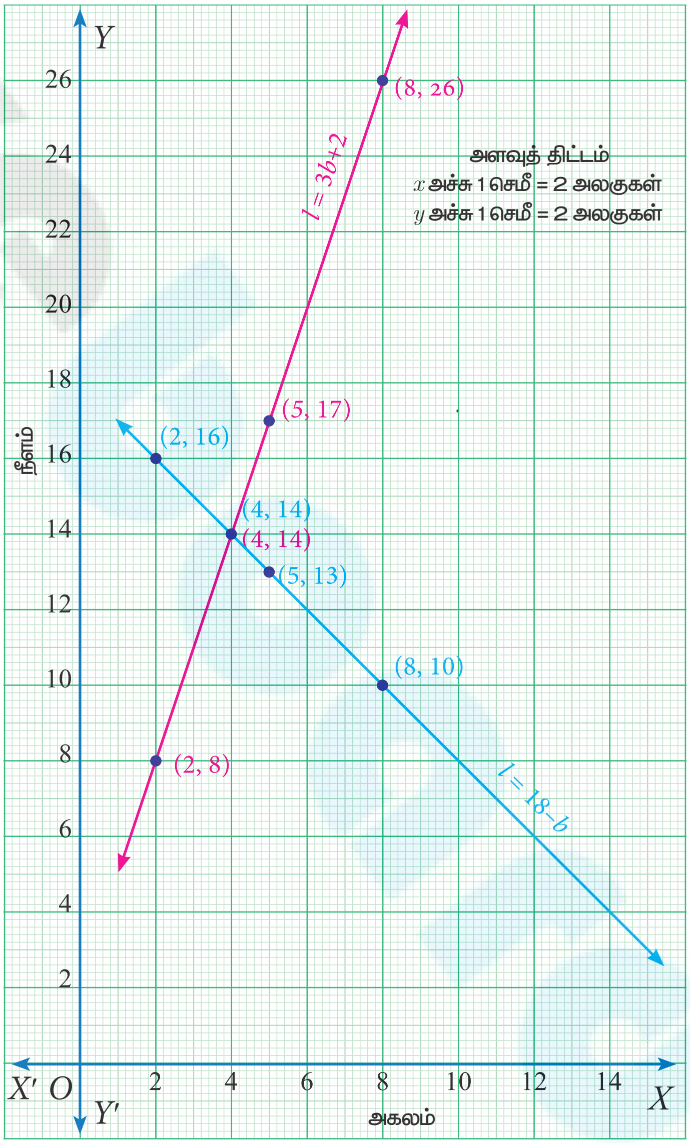
$$l+b=\frac{36}{2}$$

$$l=18-b \qquad \dots (1)$$

b	2	4	5	8
18	18	18	18	18
−b	−2	−4	−5	−8
l = 18−b	16	14	13	10

புள்ளிகள்: (2,16), (4,14), (5,13), (8,10)

இரண்டாவது கூற்றுக்குச் சமன்பாடு அமைத்தல் :



படம் 3.24

3 Algebra_TM_T1.indd 132 26-12-2019 12:16:23

இரண்டாவது கூற்றின்படி, நீளமானது அகலத்தின் மூன்று மடங்கை விட 2 மீ அதிகம் எனவே $l = 3b + 2$ ... (2)

சமன்பாடு (2) இக்கு அட்டவணை அமைப்போம்

b	2	4	5	8
$3b$	6	12	15	24
2	2	2	2	2
$l = 3b + 2$	8	14	17	26

புள்ளிகள் : (2,8), (4,14), (5,17), (8,26)

இரண்டு கோடுகளுக்கும் பொதுவான ஒரு புள்ளியே தீர்வாக அமையும். இங்கு (4,14) என்பதே தீர்வாக இருப்பதைக் காணலாம். எனவே தீர்வானது $b = 4$, $l = 14$.

சரிபார்த்தல் :

$2(l+b) = 36$ ...(1)	$l = 3b + 2$ ...(2)
$2(14+4) = 36$	$14 = 3(4) + 2$
$2 \times 18 = 36$	$14 = 12 + 2$
$36 = 36$ மெய்	$14 = 14$ மெய்

பயிற்சி 3.10

1. கீழ்க்காண்பவற்றிற்கு வரைபடம் வரைக

   (i) $y = 2x$ (ii) $y = 4x - 1$ (iii) $y = \left(\frac{3}{2}\right)x + 3$ (iv) $3x + 2y = 14$

2. வரைபட முறையில் தீர்க்க

   (i) $x + y = 7;\ x - y = 3$ (ii) $3x + 2y = 4;\ 9x + 6y - 12 = 0$

   (iii) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1;\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2$ (iv) $x - y = 0;\ y + 3 = 0$

   (v) $y = 2x + 1;\ y + 3x - 6 = 0$ (vi) $x = -3;\ y = 3$

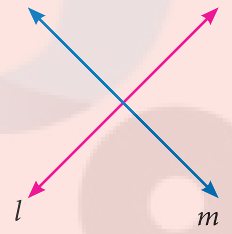
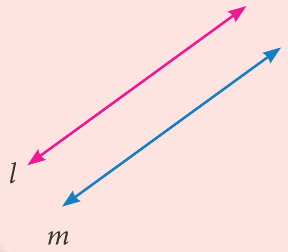
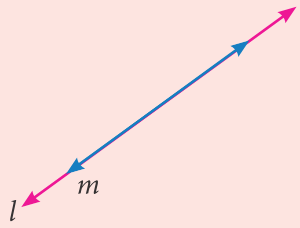
3. இரண்டு மகிழுந்துகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 100 மைல்கள். இரண்டும் ஒன்றையொன்று நோக்கிப் பயணித்தால் ஒரு மணி நேரத்தில் சந்தித்துக்கொள்ளும். இரண்டும் ஒரே திசையில் செல்லும்போது 2 மணி நேரத்தில் ஓரிடத்தில் சந்தித்து ஒன்றாகப் பயணிக்குமெனில், இரண்டு மகிழுந்துகளின் வேகங்களைக் (வரைபட முறையில்) கணக்கிடுக.

3 Algebra_TM_T1.indd 133 26-12-2019 12:16:28

3 Algebra_TM_T1.indd 134 26-12-2019 12:16:28

சில சிறப்புப் பண்புகள் (Some special terminology)

வரைபடங்களின் மூலம் ஒருங்கமைந்தச் சமன்பாடுகளுக்கு எத்தனை தீர்வுகள் இருக்கும் என்பதைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள படங்களின் மூலம் நாம் காணலாம்.

வெட்டும் கோடுகள்	இணைகோடுகள்	ஒன்றிய கோடுகள் (ஒன்றின் மீது ஒன்று)
		
ஒரே ஒரு தீர்வு	தீர்வு இல்லை	எண்ணற்ற தீர்வுகள்

- நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு, ஒரே ஒரு தீர்வினைப் பெற்றிருக்கும்போது (வரைபடத்தில் கோடுகள் ஒரேயொரு இடத்தில் வெட்டிக்கொள்ளும்), அந்தத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுத் (consistent) தொகுப்பு எனப்படுகிறது.
- நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வு இல்லை எனில் (வரைபடத்தில் கோடுகள் எந்த இடத்திலும் வெட்டிக்கொள்ளாது) அந்தத் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவற்ற (inconsistent) தொகுப்பு எனப்படுகிறது.
- நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்போது அவை இரண்டும் ஒரே கோடுகள் ஆகும். (வரைபடத்தில் கோடுகள், அனைத்துப் புள்ளிகளிலும் ஒன்றின் மீது ஒன்றாகப் பொருந்தும்) அந்தத் தொகுப்பும் ஒருங்கமைவுடையது (consistent) ஆகும்.

பிரதியிடல் முறையில் தீர்வு காணுதல் (Solving by Substitution Method)

இந்த முறையில், ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியில் பிரதியிட்டு, இரு மாறிகள் கொண்ட சமன்பாட்டை ஒரு மாறி கொண்ட சமன்பாடாக மாற்றித் தீர்வு (ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்குப் பதிலாக) காண்கிறோம். ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியில் பிரதியிடுவதால் இதை நாம் பிரதியிடல் முறை என்று அழைக்கிறோம்.

இதற்கான வழிமுறைகள் பின்வருமாறு:

படி 1: கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றிலிருந்து, ஒரு மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் கொண்டு காணவும்.

படி 2: படி 1 இல் பெறப்பட்ட மாறியின் மதிப்பை மற்றொரு சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டுத் தீர்க்க ஒரு மாறியின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

படி 3: படி 2 இல் பெறப்பட்ட மாறியின் மதிப்பைப் படி 1 இல் பிரதியிட மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைப் பெறலாம்..

எடுத்துக்காட்டு 3.48 ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகளைப் பிரதியிடல் முறையில் தீர்க்க: $x+3y=16$ மற்றும் $2x-y=4$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை $x+3y=16$ ... (1)

$2x-y=4$ ... (2)

படி 1	படி 2	படி 3	தீர்வு
சமன்பாடு (2) இலிருந்து $2x-y=4$ $-y=4-2x$ $y=2x-4$ ...(3)	(3) ஐ (1) இல் பிரதியிட $x+3y=16$ $x+3(2x-4)=16$ $x+6x-12=16$ $7x=28$ $x=4$	$x=4$ என (3) இல் பிரதியிட $y=2x-4$ $y=2(4)-4$ $y=4$	$x=4$ மற்றும் $y=4$

எடுத்துக்காட்டு 3.49 ஓர் ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதல் 5. அதன் இலக்கங்கள் இடமாற்றப்பட்டால் கிடைக்கும் புதிய எண்ணானது கொடுக்கப்பட்ட எண்ணை விட 27 குறைவு எனில் அந்த எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு

x என்பது பத்தாம் இலக்க எண் என்றும் y என்பது ஒன்றாம் இலக்க எண் என்றும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்டவை $x+y=5$ ... (1)

	பத்தாம் இலக்கம்	ஒன்றாம் இலக்கம்	மதிப்பு
கொடுக்கப்பட்ட எண்	x	y	$10x+y$
புதிய எண் (இலக்கங்களை இடமாற்றிய பின்பு)	y	x	$10y+x$

கொடுக்கப்பட்ட எண் – இடமாற்றபட்ட எண் $=27$

$$(10x+y)-(10y+x)=27$$

$$10x-x+y-10y=27$$

$$9x-9y=27$$

$\Rightarrow$ $x-y=3$ ... (2)

$x+y=5$ ... (1) இலிருந்து, $y=5-x$ ... (3)

(3) ஐ (2) இல் பிரதியிட $x-(5-x)=3$

$$x-5+x=3$$

3 Algebra_TM_T1.indd 135 26-12-2019 12:16:34

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$x = 4$ என (3) இல் பிரதியிட $y = 5 - x \;\; = 5 - 4$

$$y = 1$$

ஆகவே, $10x + y = 10 \times 4 + 1 = 40 + 1 \; = 41.$

ஆகையால் கொடுக்கப்பட்ட ஈரிலக்க எண் = 41 ஆகும்.

> **சரிபார்த்தல் :**
>
> இலக்கங்களின் கூடுதல் = 5
>
> $x + y \; = 5$
>
> $4 + 1 \; = 5$
>
> $5 \; = 5$ மெய்
>
> கொடுக்கப்பட்ட எண் –
> இடமாற்றப்பட்ட எண் $= 27$
>
> $41 - 14 \; = 27$
>
> $27 \; = 27$ மெய்

பயிற்சி 3.11

1. பிரதியிடல் முறையில் தீர்க்க.

   (i) $2x - 3y = 7;\; 5x + y = 9$ (ii) $1.5x + 0.1y = 6.2;\; 3x - 0.4y = 11.2$

   (iii) x-இன் 10% + y-இன் 20%; $3x - y = 20$ (iv) $\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y = 1;\; \sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

2. இராமனின் வயது அவருடைய இரு மகன்களுடைய வயதுகளின் கூடுதலைப் போல் மூன்று மடங்காகும். ஐந்தாண்டுகள் கழித்து அவரின் வயது தனது மகன்களுடைய வயதுகளின் கூடுதலைப் போல் இரு மடங்காகும் எனில், இராமனின் தற்போதைய வயதைக் காண்க.

3. 100 மற்றும் 1000 இக்கு இடையே அமையும் ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணின் நடு இலக்கம் பூச்சியமாகவும் மற்ற இரு இலக்கங்களின் கூடுதல் 13 ஆகவும் இருக்கின்றன. இலக்கங்களை இடம் மாற்றி அமைக்கும்போது கிடைக்கும் எண்ணானது, அந்த எண்ணை விட 495 அதிகம் எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

நீக்கல் முறையில் தீர்வு காணுதல் (Solving by Elimination Method)

இம்முறையானது ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் மற்றோர் இயற்கணித முறையாகும். இந்த முறையானது பிரதியிடல் முறையை விடச் சிறந்த முறையாகும். இங்கு கொடுக்கப்பட்ட ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளிலுள்ள இரண்டு மாறிகளில் ஏதேனும் ஒன்றை நீக்கக் கிடைக்கும் ஒரு மாறியில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணும் முறையாகும்.

இதன் பல்வேறு படிநிலைகள் பின்வருமாறு:

படி 1: இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மாறியின் கெழுக்கள் சமமாக அமையுமாறு ஒரு குறிப்பிட்ட மாறிலியால் (மாறிலிகளால்) ஒரு சமன்பாட்டினையோ அல்லது இரண்டையுமே பெருக்க வேண்டும்.

படி 2: படி 1 இல் கிடைத்த சமன்பாடுகளைக் கூட்டியோ அல்லது கழித்தோ சமமான கெழுக்களைக் கொண்ட மாறியை நீக்க வேண்டும்.

படி 3: படி 2 இன் மூலம் கிடைத்த ஒரு மாறியில் அமைந்த சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதன் வாயிலாகத் தெரியாத மாறியின் மதிப்பைக் காண வேண்டும்.

படி 4: படி 3 இல் கிடைத்த ஒரு மாறியின் மதிப்பைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்றில் பிரதியிட்டுத் தெரியாத மற்றொரு மாறியின் மதிப்பைக் காணலாம்.

3 Algebra_TM_T1.indd 136 26-12-2019 12:16:37

எடுத்துக்காட்டு 3.50 நீக்கல் முறையில் தீர்வு காண்க: $4a+3b=65$ மற்றும் $a+2b=35$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டவை, $4a+3b=65$ .....(1)

$a+2b=35$ .....(2)

(2) ஐ 4 ஆல் பெருக்க $4a + 8b = 140$

(1) இலிருந்து $4a + 3b = 65$

$(-) \quad (-) \quad (-)$

$5b = 75$ இதிலிருந்து $b = 15$

$b = 15$ என (2) இல் பிரதியிட,

$a + 2(15) = 35$ இதிலிருந்து $a = 5$

ஆகவே, தீர்வு $a = 5, b = 15$.

சரிபார்த்தல் :

$4a+3b = 65$ ...(1)

$4(5)+3(15) = 65$

$20 + 45 = 65$

$65 = 65$ மெய்

$a + 2b = 35$ ...(2)

$5 + 2(15) = 35$

$5+30 = 35$

$35 = 35$ மெய்

எடுத்துக்காட்டு 3.51 நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்க: $8x-3y=5xy$ மற்றும் $6x-5y=-2xy$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள் $8x-3y=5xy$ ...(1)

$6x-5y=-2xy$ ...(2)

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பில் xy என்ற உறுப்பு உள்ளதால் இது ஒரு நேரிய சமன்பாட்டில் அமைந்த தொகுப்பு அல்ல. மேலும், $x = 0$ எனில், $y = 0$ இதே போல் $y = 0$ எனில், $x = 0$ என்பதையும் கவனிக்க. ஆகவே, $(0,0)$ என்பது தொகுப்பின் ஒரு தீர்வாகும். மேலும் $x \neq 0$ மற்றும் $y \neq 0$ என்றவாறு வேறொரு தீர்வும் இருக்க இயலும்.

$x \neq 0, y \neq 0$ என்பனவற்றைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

ஒவ்வொரு சமன்பாட்டின் இரண்டு பக்கங்களையும் xy ஆல் வகுக்க,

(1) இலிருந்து $\frac{8x}{xy}-\frac{3y}{xy}=\frac{5xy}{xy}$ நாம் பெறுவது, $\frac{8}{y}-\frac{3}{x}=5$ ...(3)

(2) இலிருந்து $\frac{6x}{xy}-\frac{5y}{xy}=\frac{-2xy}{xy}$ நாம் பெறுவது, $\frac{6}{y}-\frac{5}{x}=-2$ ...(4)

$a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}$ என்க.

(3) மற்றும் (4) ஆனது, $8b-3a=5$ ...(5)

$6b-5a=-2$ ...(6) என ஆகும்.

இவை a மற்றும் b ஆல் அமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் ஆகும்.

a ஐ நீக்குவதற்காக, $(5)\times 5 \Rightarrow \quad 40b-15a=25$ .....(7)

$(6)\times 3 \Rightarrow \quad 18b-15a=-6$ .....(8)

3 Algebra_TM_T1.indd 137 26-12-2019 12:16:44

கடந்த எடுத்துக்காட்டுகளைப் போலவே இதைத் தொடர $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ என்ற தீர்வைப் பெறலாம்.

ஆகவே, இந்தத் தொகுப்பானது $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ மற்றும் $(0,0)$ ஆகிய இரு தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

பயிற்சி 3.12

1. நீக்கல் முறையில் தீர்வு காண்க

   (i) $2x-y = 3; \quad 3x + y = 7$ (ii) $x-y = 5; \quad 3x + 2y = 25$

   (iii) $\frac{x}{10}+\frac{y}{5} = 14; \quad \frac{x}{8}+\frac{y}{6} = 15$ (iv) $3(2x+y) = 7xy; \quad 3(x+3y) = 11xy$

   (v) $\frac{4}{x}+5y = 7; \quad \frac{3}{x}+4y = 5$ (vi) $13x+11y = 70; \quad 11x+13y = 74$

2. A மற்றும் B ஆகியோரது மாத வருமானங்களின் விகிதம் $3:4$ ஆகவும் அவர்களுடைய செலவுகளின் விகிதம் $5:7$ ஆகவும் இருக்கின்றன. ஒவ்வொருவரும் மாதம் ₹5,000 சேமிக்கிறார்கள் எனில், அவர்களுடைய மாத வருமானத்தைக் காண்க.

3. 5 வருடங்களுக்கு முன்பு, ஒருவருடைய வயதானது அவருடைய மகனின் வயதைப் போல் 7 மடங்காகும். 5 வருடங்கள் கழித்து அவருடைய வயதானது மகனின் வயதைப் போல் 4 மடங்காக இருக்கும் எனில், அவர்களுடைய தற்போதைய வயது என்ன?

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் தீர்வு காணுதல் (Solving by Cross Multiplication Method)

பிரதியிடல் மற்றும் நீக்கல் முறைகளானது பல்வேறு கணிதச் செயல்களை உள்ளடக்கியது. ஆனால் குறுக்குப் பெருக்கல் முறையானது கெழுக்களைச் சீரிய முறையில் பயன்படுத்தி வழிமுறையை எளிமையாக்கித் தீர்வினைப் பெற வழி செய்கிறது. இந்த முறையில் எண்களுக்கு இடையில் குறுக்குக் கோடுகள் அமைத்துப் பெருக்குவதால் இது குறுக்குப் பெருக்கல் முறை என்று அழைக்கப்படுகிறது. இந்த முறையைப் பின்வருமாறு விவாதிப்போம்.

நமக்கு $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ என்றவாறு அமைந்த ஒரு சோடி நேரிய ஒருங்கமைவுச் சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad ...(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad ...(2)$$

நாம் அவற்றைப் பின்வருமாறு தீர்க்கலாம் :

$(1)\times b_2 - (2)\times b_1$ என்பதிலிருந்து $b_2(a_1x+b_1y+c_1)-b_1(a_2x+b_2y+c_2)=0$

$$\Rightarrow \quad x(a_1b_2-a_2b_1)=(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{(b_1c_2-b_2c_1)}{(a_1b_2-a_2b_1)}$$

$(1)\times a_2 - (2)\times a_1$ என்பதிலிருந்து

3 Algebra_TM_T1.indd 138 26-12-2019 12:16:50

$$y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$ எனப் பெறலாம்.

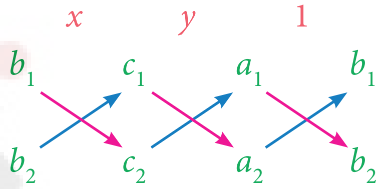
ஆகவே தொகுப்பின் தீர்வானது

$$x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}, \quad y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)}{(a_1b_2 - a_2b_1)}$$

இதைப் பின்வருமாறும் எழுதலாம்

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

இதனைப் பின்வருமாறு நினைவில் கொள்ளலாம்

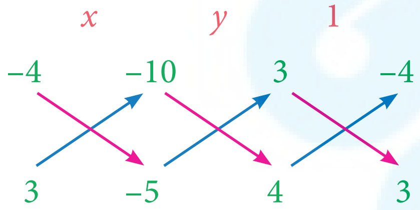


எடுத்துக்காட்டு 3.52 குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்வு காண்க:
$3x - 4y = 10$ மற்றும் $4x + 3y = 5$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு

$$3x - 4y = 10 \quad \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0 \quad .....(1)$$
$$4x + 3y = 5 \quad \Rightarrow 4x + 3y - 5 = 0 \quad .....(2)$$

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்துவதற்காகக் கெழுக்களை நாம் பின்வருமாறு எழுதலாம்.



$$\frac{x}{(-4)(-5) - (3)(-10)} = \frac{y}{(-10)(4) - (-5)(3)} = \frac{1}{(3)(3) - (4)(-4)}$$
$$\frac{x}{(20) - (-30)} = \frac{y}{(-40) - (-15)} = \frac{1}{(9) - (-16)}$$
$$\frac{x}{20 + 30} = \frac{y}{-40 + 15} = \frac{1}{9 + 16}$$
$$\frac{x}{50} = \frac{y}{-25} = \frac{1}{25}$$

ஆகவே நாம் பெறுவது $x = \frac{50}{25}; \quad y = \frac{-25}{25}$

$x = 2; \quad y = -1$

எனவே தீர்வானது $x = 2, y = -1$ ஆகும்.

சரிபார்த்தல் :

$3x-4y = 10 \quad ...(1)$
$3(2)-4(-1) = 10$
$6 + 4 = 10$
$10 = 10$ மெய்

$4x + 3y = 5 \quad ...(2)$
$4(2) + 3(-1) = 5$
$8-3 = 5$
$5 = 5$ மெய்

3 Algebra_TM_T1.indd 139 26-12-2019 12:16:56

எடுத்துக்காட்டு 3.53

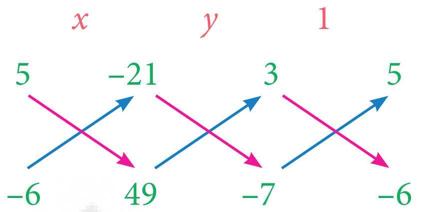
குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க :

$3x+5y=21$ மற்றும் $-7x-6y=-49$

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு $3x+5y-21=0;\quad -7x-6y+49=0$

கெழுக்களைக் குறுக்குப் பெருக்கல் முறைக்காக எழுத நாம் பெறுவது,



$$\Rightarrow \frac{x}{(5)(49)-(-6)(-21)}=\frac{y}{(-21)(-7)-(49)(3)}=\frac{1}{(3)(-6)-(-7)(5)}$$

$$\frac{x}{119}=\frac{y}{0}=\frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{119}=\frac{1}{17}\ ,\quad \frac{y}{0}=\frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow x=\frac{119}{17}\ ,\quad y=\frac{0}{17}$$

$$\Rightarrow x=7\ ,\quad y=0$$

சரிபார்த்தல் :

$3x+5y$	=	21	...(1)
$3(7)+5(0)$	=	21	
$21+0$	=	21	
21	=	21	மெய்
$-7x-6y$	=	-49	...(2)
$-7(7)-6(0)$	=	-49	
$-49+0$	=	-49	
-49	=	-49	மெய்

குறிப்பு

இங்கே $\frac{y}{0}=\frac{1}{17}$ என்பது $y=\frac{0}{17}$ ஆகும். ஆகவே இங்கு $\frac{y}{0}$ என்பது ஒரு குறியீடே அன்றி, அதனை 0 ஆல் வகுத்தல் எனப் பொருள் கொள்ளக்கூடாது. பூச்சியத்தால் ஓர் எண்ணை வகுத்தல் என்பது வரையறுக்கப்படவில்லை என்ற கூற்று எப்பொழுதும் மெய்யாகும்.

பயிற்சி 3.13

1. குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க

   (i) $8x-3y=12\,;\ 5x=2y+7$ (ii) $6x+7y-11=0\,;\ 5x+2y=13$

   (iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=5\,;\frac{3}{x}-\frac{1}{y}+9=0$

2. அட்சயா தனது பணப்பையில் (purse) இரண்டு ரூபாய் நாணயங்களையும், ஐந்து ரூபாய் நாணயங்களையும் வைத்திருந்தாள். அவள் மொத்தமாக ₹ 220 மதிப்புடைய 80 நாணயங்களை வைத்திருந்தாள் எனில், ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை நாணயங்கள் வைத்திருந்தாள்.

3 Algebra_TM_T1.indd 140 26-12-2019 12:17:01

3. இரு வெவ்வேறு அளவு விட்டமுடைய குழாய்கள் மூலம் ஒரு நீச்சல் குளத்தில் முழுமையாக நீர் நிரப்ப 24 மணி நேரம் ஆகும். அதிக விட்டமுடைய குழாயை 8 மணி நேரமும் குறைந்த விட்டமுடைய குழாயை 18 மணி நேரமும் பயன்படுத்தி நீர் நிரப்பினால் நீச்சல் குளத்தில் பாதி அளவு நீர் நிரம்பும் எனில், தனித்தனியாக அந்தக் குழாய்களைக் கொண்டு நீச்சல் குளம் முழுவதிலும் நீர் நிரப்ப ஆகும் கால அளவுகளைக் காண்க.

3.8.3 இரு மாறிகளாலான நேரியச் சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமைவு மற்றும் ஒருங்கமைவற்ற தன்மை (Consistency and Inconsistency of Linear Equations in Two Variables)

கீழ்க்காணும் இரு மாறிகளாலான ஒரு சோடி நேரிய சமன்பாடுகளைக் கருதுக.

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad ...(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad ...(2)$$

இங்கு $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ஆகியன மெய்யெண்கள் ஆகும்.

சமன்பாடுகள் கீழ்க்காணுமாறு தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும். :

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ எனில் ஒரேயொரு தீர்வு மட்டும் பெற்றிருக்கும் (ஒருங்கமைவுடையது).

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ எனில் எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும் (ஒருங்கமைவுடையது)

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ எனில் தீர்வு இல்லை. (ஒருங்கமைவற்றது).

எடுத்துக்காட்டு 3.54 கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுடையதா அல்லது ஒருங்கமைவற்றதா என்பதைச் சோதிக்கவும். அவை ஒருங்கமைவுடையது எனில் எத்தனை தீர்வுகள் இருக்கும்?

(i) $2x-4y=7$, $x-3y=-2$ (ii) $4x+y=3$, $8x+2y=6$ (iii) $4x+7=2y$, $2x+9=y$

தீர்வு

வ. எண்	சோடிக் கோடுகள்	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	விகிதங்களை ஒப்பிடுதல்	வரைபடக் குறியீடு	இயற்கணித விளக்கம்
(i)	$2x-4y=7$ $x-3y=-2$	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$	$\frac{7}{-2}=\frac{-7}{2}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	வெட்டும் கோடுகள்	ஒரேயொரு தீர்வு

3 Algebra_TM_T1.indd 141 26-12-2019 12:17:06

(ii)	$4x + y = 3$ $8x + 2y = 6$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ஒன்றிணைந்த கோடுகள்	எண்ணற்ற தீர்வுகள்
(iii)	$4x + 7 = 2y$ $2x + 9 = y$	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{7}{9}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	இணை கோடுகள்	தீர்வு இல்லை

எடுத்துக்காட்டு 3.55 $kx + 2y = 3;\ 2x - 3y = 1$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு மட்டும் உண்டெனில் k இன் மதிப்பை ஆராய்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகள்

$$\begin{matrix} kx + 2y = 3 \ .....(1) \\ 2x - 3y = 1 \ .....(2) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $a_1 = k,\ b_1 = 2,\ a_2 = 2,\ b_2 = -3$;

ஒரேயொரு தீர்வு உண்டெனில் $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ எனக் கருதுவோம். எனவே $\frac{k}{2} \neq \frac{2}{-3}$; ஆகவே $k \neq \frac{4}{-3}$

எடுத்துக்காட்டு 3.56 $2x - 3y = 7;\ \ (k+2)x - (2k+1)y = 3(2k-1)$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டெனில் k இன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட இரு நேரிய சமன்பாடுகள்

$$\begin{matrix} 2x - 3y = 7 \\ (k+2)x - (2k+1)y = 3(2k-1) \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{bmatrix}$$

இங்கு $a_1 = 2,\ b_1 = -3,\ a_2 = (k+2),\ b_2 = -(2k+1),\ c_1 = 7,\ c_2 = 3(2k-1)$

எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டெனில், $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ எனக் கருதுவோம்.

$$\frac{2}{k+2} = \frac{-3}{-(2k+1)} = \frac{7}{3(2k-1)}$$

$$\frac{2}{k+2} = \frac{-3}{-(2k+1)}$$

$$2(2k+1) = 3(k+2)$$

$$4k + 2 = 3k + 6$$

$$k = 4$$

$$\frac{-3}{-(2k+1)} = \frac{7}{3(2k-1)}$$

$$9(2k-1) = 7(2k+1)$$

$$18k - 9 = 14k + 7$$

$$4k = 16$$

$$k = 4$$

3 Algebra_TM_T1.indd 142 26-12-2019 12:17:14

எடுத்துக்காட்டு 3.57

$8x+5y=9;\ kx+10y=15$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வுகள் இல்லையெனில் k இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட இரு நேரிய சமன்பாடுகள்

$$\begin{aligned} 8x+5y&=9 \\ kx+10y&=15 \end{aligned} \quad \left[\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1&=0 \\ a_2x+b_2y+c_2&=0 \end{aligned}\right]$$

இங்கு $a_1=8,\ b_1=5,\ c_1=9,\ a_2=k, b_2=10, c_2=15$

தீர்வுகள் இல்லையெனில் $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ ஆகவே, $\dfrac{8}{k}=\dfrac{5}{10}\neq\dfrac{9}{15}$

$$80=5k$$

$$k=16$$

செயல்பாடு - 3

1. கொடுக்கப்பட்ட நேரிய ஒருங்கமைவுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் பின்வருமாறு இருந்தால் k இன் மதிப்பைக் காண்க:
   (i) $2x+ky=1;\ 3x-5y=7$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு ஒரேயொரு தீர்வு உண்டு.
   (ii) $kx+3y=3;\ 12x+ky=6$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு இல்லை.
   (iii) $(k-3)x+3y=k;\ kx+ky=12$ ஆகிய சமன்பாடுகளுக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.
2. கொடுக்கப்பட்ட $3x-(a+1)y=2b-1,\quad 5x+(1-2a)y=3b$ நேரிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டெனில் a மற்றும் b இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

செயல்பாடு - 4

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில், கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாட்டிற்குப் பொருத்தமான மற்றொரு நேரிய சமன்பாட்டினைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட நேரிய சமன்பாடு	மற்றொரு நேரிய சமன்பாடு		
	ஒரேயொரு தீர்வு	எண்ணற்ற தீர்வுகள்	தீர்வு இல்லை
$2x+3y=7$	$3x+4y=8$	$4x+6y=14$	$6x+9y=15$
$3x-4y=5$			
$y-4x=2$			
$5y-2x=8$			

பயிற்சி 3.14

ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க

1. ஓர் ஈரிலக்க எண்ணையும் அதன் இலக்கங்களை மாற்றுவதால் கிடைக்கும் எண்ணையும்

3 Algebra_TM_T1.indd 143 26-12-2019 12:17:20

கூட்டினால் 110 கிடைக்கும். கொடுக்கப்பட்ட அந்த ஈரிலக்க எண்ணிலிருந்து 10 ஐக் கழித்தால் அது கொடுக்கப்பட்ட ஈரிலக்க எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதலின் 5 மடங்கை விட 4 அதிகம் எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

2. ஒரு பின்னத்தின் பகுதி மற்றும் தொகுதியின் கூடுதல் 12. அப்பின்னத்தின் பகுதியுடன் 3 ஐக் கூட்டினால் அதன் மதிப்பு $\frac{1}{2}$ ஆகும் எனில், அப்பின்னத்தைக் காண்க.

3. ABCD என்ற வட்ட நாற்கரத்தில் $\angle A = (4y + 20)^\circ$, $\angle B = (3y - 5)^\circ$, $\angle C = (4x)^\circ$ மற்றும் $\angle D = (7x + 5)^\circ$ எனில், நான்கு கோணங்களையும் காண்க.

4. ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை 5% இலாபத்திற்கும், ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டியை 10% இலாபத்திற்கும் விற்பதால் கடைக்காரருக்கு நிகர இலாபம் ₹2,000 கிடைக்கிறது. ஆனால் அவர் ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டியை 10% இலாபத்திற்கும், ஒரு குளிர்சாதனப் பெட்டியை 5% நட்டத்திற்கும் விற்பதால் அவரின் நிகர இலாபம் ₹1,500 கிடைக்கிறது எனில், தொலைக்காட்சிப் பெட்டி மற்றும் குளிர்சாதனப் பெட்டியின் சரியான விலைகளைக் காண்க.

5. இரு எண்கள் 5 : 6 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அவை ஒவ்வொன்றிலிருந்தும் முறையே 8 ஐக் கழித்தால் அவற்றின் விகிதம் 4 : 5 என மாறும் எனில், அந்த எண்களைக் காண்க.

6. 4 இந்தியர்கள் மற்றும் 4 சீனர்கள் சேர்ந்து 3 நாள்களில் ஒரு வேலையை முடிக்கிறார்கள். 2 இந்தியர்கள் மற்றும் 5 சீனர்கள் சேர்ந்து அதே வேலையை 4 நாள்களில் முடிக்கிறார்கள் எனில், இப்பணியைத் தனியாக ஒரு இந்தியர் எத்தனை நாள்களில் செய்வார்? ஒரு சீனர் தனியாக எத்தனை நாள்களில் செய்வார்?

F6AUUN

பயிற்சி 3.15

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $x^3 + 6x^2 + kx + 6$ என்பது $(x + 2)$ ஆல் மீதியின்றி வகுபடும் எனில், k இன் மதிப்பு என்ன?
   (1) -6 (2) -7 (3) -8 (4) 11

2. $2x + 3 = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் மூலம்
   (1) $\frac{1}{3}$ (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $-\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{2}{3}$

3. $4-3x^3$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் வகை
   (1) மாறிலி பல்லுறுப்புக் கோவை (2) ஒருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை
   (3) இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை (4) முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை.

4. $x^{51} + 51$ என்பது $x + 1$, ஆல் வகுக்கப்பட்டால் கிடைக்கும் மீதி
   (1) 0 (2) 1 (3) 49 (4) 50

5. $2x+5$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியம்
   (1) $\frac{5}{2}$ (2) $-\frac{5}{2}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $-\frac{2}{5}$

3 Algebra_TM_T1.indd 144 26-12-2019 12:17:21

6. $p(x) = x^3 - x^2 - 2$, $q(x) = x^2 - 3x + 1$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கூடுதல்

(1) $x^3 - 3x - 1$ (2) $x^3 + 2x^2 - 1$ (3) $x^3 - 2x^2 - 3x$ (4) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

7. $(y^3 - 2)(y^3 + 1)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி

(1) 9 (2) 2 (3) 3 (4) 6

8. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் படிகளின் ஏறு வரிசை

(A) $-13q^5 + 4q^2 + 12q$ (B) $(x^2 + 4)(x^2 + 9)$

(C) $4q^8 - q^6 + q^2$ (D) $-\frac{5}{7}y^{12} + y^3 + y^5$

(1) A,B,D,C (2) A,B,C,D (3) B,C,D,A (4) B,A,C,D

9. $p(a) = 0$ எனில், $(x - a)$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு ____________

(1) வகுத்தி (2) ஈவு (3) மீதி (4) காரணி

10. $(2 - 3x)$இன் பூச்சியம் ____________

(1) 3 (2) 2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

11. $x - 1$ என்பது ____________ இன் ஒரு காரணி.

(1) $2x - 1$ (2) $3x - 3$ (3) $4x - 3$ (4) $3x - 4$

12. $x - 3$ என்பது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி எனில், மீதி ______

(1) 3 (2) -3 (3) $p(3)$ (4) $p(-3)$

13. $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ = ______

(1) $(x + y)^3$ (2) $(x - y)^3$ (3) $x^3 + y^3$ (4) $x^3 - y^3$

14. $(a + b - c)^2$ = ____________

(1) $(a - b + c)^2$ (2) $(-a - b + c)^2$ (3) $(a + b + c)^2$ (4) $(a - b - c)^2$

15. $ax^2 + bx + c$ என்ற ஈருறுப்புக் கோவையின் காரணிகள் $(x + 5)$ மற்றும் $(x - 3)$ எனில், a, b மற்றும் c இன் மதிப்புகள் _________

(1) 1,2,3 (2) 1,2,15 (3) 1,2, −15 (4) 1, −2,15

16. முப்படிப் பல்லுறுப்புக் கோவைக்கு அதிகபட்சம் ______ நேரிய காரணிகள் இருக்கலாம்.

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

17. மாறிலிக் கோவையின் படி

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

19. $2x + 3y = m$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $x = 2$, $y = -2$ என்பது ஒரு தீர்வு எனில், mஇன் மதிப்பு...

(1) 2 (2) −2 (3) 10 (4) 0

3 Algebra_TM_T1.indd 145 26-12-2019 12:17:25

20. கீழ்க்காண்பவற்றுள் எது நேரிய சமன்பாடு

(1) $x+\frac{1}{x}=2$ (2) $x(x-1)=2$ (3) $3x+5=\frac{2}{3}$ (4) $x^3-x=5$

21. கீழ்க்காண்பனவற்றில் $2x-y=6$ இன் தீர்வு எது?

(1) (2,4) (2) (4,2) (3) (3, −1) (4) (0,6)

22. $2x+3y=k$ என்பதன் தீர்வு (2,3) எனில், k இன் மதிப்பைக் காண்க.

(1) 12 (2) 6 (3) 0 (4) 13

23. $ax+by+c=0$ என்ற சமன்பாட்டினை எந்த நிபந்தனை நிறைவு செய்யாது?

(1) $a\neq 0$, $b=0$ (2) $a=0$, $b\neq 0$ (3) $a=0$, $b=0$, $c\neq 0$ (4) $a\neq 0$, $b\neq 0$

24. கீழ்க்காண்பனவற்றில் எது நேரிய சமன்பாடு அல்ல

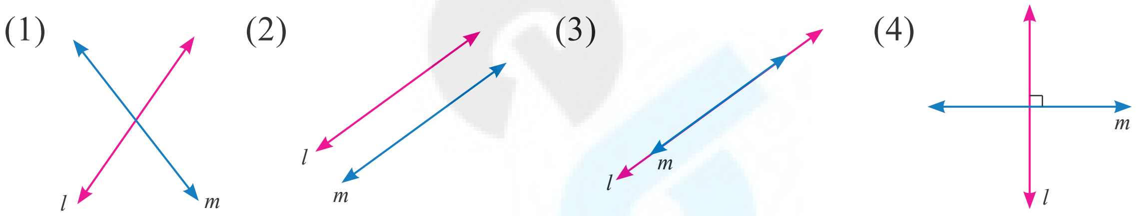
(1) $ax+by+c=0$ (2) $0x+0y+c=0$

(3) $0x+by+c=0$ (4) $ax+0y+c=0$

25. $4x+6y-1=0$ மற்றும் $2x+ky-7=0$ ஆகியவை இணை கோடுகளாக அமையும் எனில், k இன் மதிப்பு காண்க

(1) $k=3$ (2) $k=2$ (3) $k=4$ (4) $k=-3$

26. கீழ்க்காணும் நேரிய சமன்பாடுகளுக்கான வரைபடங்களில் எதற்குத் தீர்வு இல்லை?



27. $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ எனில், இங்கு $a_1x+b_1y+c_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$ ஆகிய நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு __________

(1) தீர்வு இல்லை (2) இரண்டு தீர்வுகள் (3) ஒரு தீர்வு (4) எண்ணற்ற தீர்வுகள்

28. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ எனில், $a_1x+b_1y+c_1=0$ மற்றும் $a_2x+b_2y+c_2=0$ ஆகிய நேரிய சமன்பாடுகளுக்கு __________

(1) தீர்வு இல்லை (2) இரண்டு தீர்வுகள் (3) ஒரு தீர்வு (4) எண்ணற்ற தீர்வுகள்

29. இரண்டு பகா எண்களின் மீ.பொ. வ

(1) −1 (2) 0 (3) 1 (4) 2

30. x^4-y^4 மற்றும் x^2-y^2 இன் மீ.பொ.வ

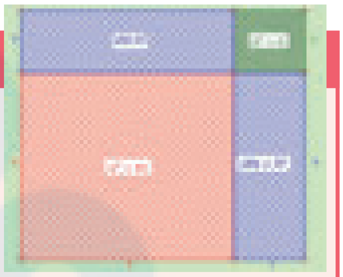
(1) x^4-y^4 (2) x^2-y^2 (3) $(x+y)^2$ (4) $(x+y)^4$

3 Algebra_TM_T1.indd 146 26-12-2019 12:17:33

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ என்ற இயற்கணிதக் கோவை x மாறியில் அமைந்த படி n கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இங்கு $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ என்பன மாறிலிகள் $(a_n \neq 0)$ மற்றும் n ஒரு முழு எண்.
- பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$ என்க. $p(a) = 0$ எனில் 'a' என்பது $p(x)$ இன் ஒரு பூச்சியம் ஆகும்.
- $p(x) = 0$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது எனில், $x = a$ ஆனது பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாடு $p(x) = 0$ இன் ஒரு மூலமாகும்.
- மீதித்தேற்றம்: பல்லுறுப்புக் கோவை $p(x)$இன் படி ஒன்றோ அல்லது அதற்கு மேலாகவோ இருக்கும். மேலும் $p(x)$ ஆனது நேரிய கோவை $(x–a)$ ஆல் வகுபடும் எனில் அதன் மீதி $p(a)$ ஆகும். இங்கு a ஒரு மெய்யெண்.
- காரணித் தேற்றம்: $p(x)$ஐ $(x - a)$ ஆல் வகுத்துக் கிடைக்கும் மீதி $p(a) = 0$ எனில், $(x - a)$ என்பது $p(x)$இன் ஒரு காரணியாகும்.
- ஒரு சமன்பாட்டின் மாறிகளுக்குக் கொடுக்கப்படும் அனைத்து மதிப்புகளும் அந்தச் சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்தால் அம்மதிப்புகள் அச்சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் ஆகும்.
- ஒரு படியில் அமைந்த இரண்டு மாறிகளைக் கொண்டதும் இரண்டு மாறிகளின் பெருக்குதல் இல்லாமலும் அமையும் சமன்பாடானது இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாடாகும் $(ax+by+c = 0,\ a\neq 0$ மற்றும் $b\neq 0)$.
- இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒரு நேரிய சமன்பாட்டிற்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உண்டு.
- இரு மாறிகளில் அமைந்த நேரிய வரைபடம் என்பது ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும்.
- ஒருங்கமைந்த நேரிய சமன்பாடுகள் ஒரே மாதிரியான மாறிகளைக் கொண்ட இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நேரிய சமன்பாடுகளைக் கொண்ட அமைப்பாகும்.

இணையச் செயல்பாடு – 1



செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது

படி – 1: கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra வின் "Algebraic Identities" என்னும் பணித்தாளின் பக்கத்திற்குச் செல்க. இப்பணித்தாளில் இயற்கணிதம் சார்ந்த பல செயல்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். முதல் செயல்பாட்டில் $(a+b)^2$ இன் வரைபட அணுகுமுறை அளிக்கப்பட்டிருக்கும். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் a மற்றும் b நழுவல்களை நகர்த்தி, பரப்பினை முற்றொருமைகளுடன் ஒப்பிடுக.

படி - 2: அதேபோன்று a மற்றும் b நழுவல்களை நகர்த்திப் பரப்பினையும் மீதமுள்ள முற்றொருமைகளையும் ஒப்பிடுக.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

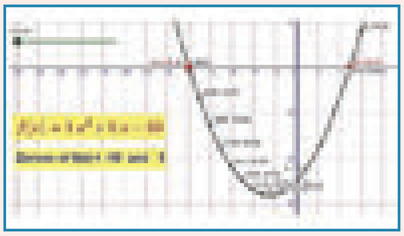
Algebraic Identities: https://ggbm.at/PyUj657Y or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

3 Algebra_TM_T1.indd 147 26-12-2019 12:17:35

இணையச் செயல்பாடு–2

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி – 1

கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தேடுபொறியில் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரிதத் துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

படி – 2

"Polynomials and Quadratic Equations" என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும். இப்பக்கத்தில் பல பணித்தாள்கள் காணப்படும். அவற்றில் "Zeros: Quadratic Polynomial" என்பதைத் தெரிவு செய்யவும்.

படி – 3

இருபடிச் சமன்பாட்டின் கெழுக்களை மாற்றி அமைக்க திரையில் தெரியும் a, b மற்றும் c எனும் நழுவல்களை இழுக்கவும். A மற்றும் B புள்ளிகள் x-axis. அச்சில் வெட்டிக்கொள்ளும். இப்புள்ளிகளே பல்லுருப்புக்கோவைகளின் பூச்சியமாகும்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் பூச்சியங்கள்: https://ggbm.at/tgu3PpWm

B563_9_MAT_TM_T3

இணையச் செயல்பாடு–3

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது

படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, GeoGebra வின் "Algebra" பக்கத்திற்குச் செல்க. Solving by rule of cross multiplication, Graphical method மற்றும் Chick–Goat puzzle ஆகிய மூன்று தலைப்புகளில் பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி - 2

நழுவல்களை நகர்த்தி அல்லது உரிய மதிப்புகளை உள்ளீடு செய்து சமன்பாடுகளை மாற்றி, தீர்வுகளைக் கண்டறியவும். மூன்றாம் தலைப்பில் உள்ள "new problem" என்பதைச் சொடுக்கிக் கணக்குகளைச் செய்யவும். நழுவல்களை நகர்த்திப் படிநிலைகளைப் பார்க்கவும்.

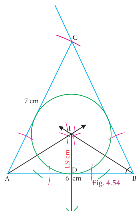
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

இயற்கணிதம் : https://ggbm.at/qampr4ta or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

3 Algebra_TM_T1.indd 148 26-12-2019 12:17:35

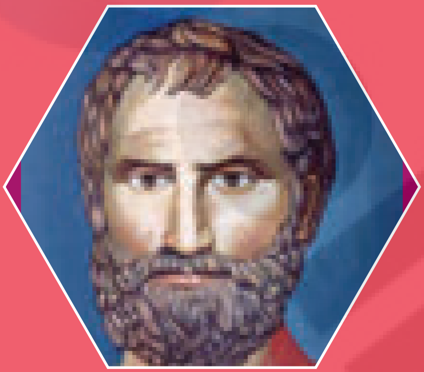
4



வடிவியல்

"கவிதையைப் போலவே, வடிவியலிலும் அகத்தூண்டல் அவசியமாகிறது"

– அலெக்ஸாண்டர் புஸ்கின்



தேல்ஸ்

(கி.மு(பொ.ஆ.மு) 624 – 546)

தேல்ஸ் (Thales) கிரேக்க நகரமாகிய மிலிடஸில் பிறந்தார். அவர் வடிவியலில் குறிப்பாக முக்கோணங்களின் அறிமுறை மற்றும் செய்முறை புரிதலுக்காக (Theoretical and practical understanding) நன்கு அறியப்பட்டவர் இவர் பிரமிடுகளின் உயரத்தைக் காணவும், கடற்கரைக்கும் கப்பலுக்கும் இடைப்பட்ட தூரத்தைக் கணக்கிடவும் வடிவியலைப் பயன்படுத்தினார். கிரேக்க நாட்டின் ஏழு ஞானிகள் அல்லது ஏழு துறவிகளில் ஒருவராக விளங்கினார். மேற்கத்திய பண்பாட்டின் முதல் தத்துவ மேதையாக மற்றவர்களால் அவர் மதிக்கப்பட்டார்

CSEIHZ

கற்றல் விளைவுகள்

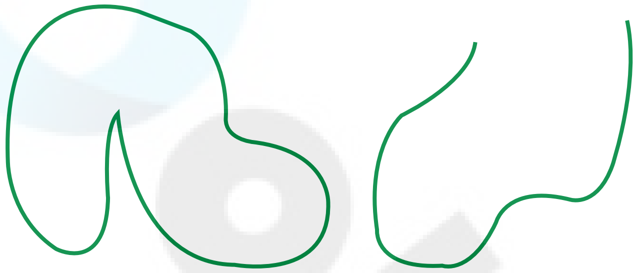
- நேரிய கோணச் சோடிகள் மற்றும் குத்தெதிர்க் கோணங்களின் மீதான தேற்றங்களைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- முக்கோணங்களின் கோணங்களின் கூடுதல் பண்பைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- நாற்கரத்தின் பண்புகளைப் புரிந்துகொண்டு கணக்குகளைத் தீர்க்க அவற்றைப் பயன்படுத்துதல்.
- வட்டத்தின் நாண்கள் மற்றும் வட்ட விற்கள் தாங்கும் கோணங்கள் மீதான தேற்றங்களைப் புரிந்துகொள்ளுதல், விளக்குதல் மற்றும் பயன்படுத்துதல்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் மீதான தேற்றங்களைப் புரிந்துகொள்ளுதல், விளக்குதல் மற்றும் பயன்படுத்துதல்.
- முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள், செங்கோடுகள், சுற்றுவட்டம் மற்றும் உள்வட்டம் வரைந்து அவற்றின் மையங்களைக் குறித்தல்.

4-Geometry_TM.indd 149 26-12-2019 12:36:53

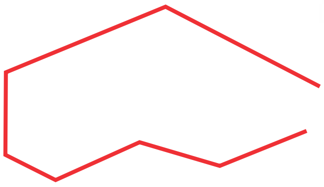
4.1 அறிமுகம்

வடிவியலில் நாம் வடிவங்களைப்பற்றி படிக்கின்றோம் ஆனால் அவற்றில் படிக்க என்ன இருக்கிறது என நீங்கள் கேட்கலாம். நாம் வடிவங்களை வரைகின்றோம், ஒப்பிடுகின்றோம் மேலும் அளக்கின்றோம். வடிவங்களில் நாம் அளப்பது எதை?

கீழ்க்காணும் வேறுபட்ட சில வடிவங்களை எடுத்துக்கொள்ளுங்கள்.

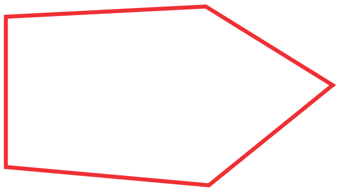

படம். 4.1

இரண்டு வளைவரைகள் வடிவத்தை உருவாக்குகின்றது. ஒன்று ஒரு பகுதியைச் சூழ்ந்து அடைபட்ட வளைவரை, மற்றொன்று திறந்த வளைவரை. நாம் ஒரு கயிற்றைக் (அல்லது கம்பியைக்) கொண்டு திறந்த வளைவரையின் நீளத்தை அளக்கலாம். வளைவரையில் அடைபட்ட பகுதியின் எல்லையினை அளக்கலாம். இவற்றை விட நேர்க்கோடுகளை அளவுகோலினால் அளப்பது மிகவும் எளிதல்லவா? கீழ்க்காணும் இரண்டு வடிவங்களைக் கவனிக்க.


படம். 4.2

நாம் இப்பொழுது நேர்க்கோடுகளைக் கொண்டு உருவாக்கப்பட்ட அடைபட்ட வடிவங்களை மட்டும் கவனத்தில் கொள்வோம். இவற்றில் இருந்து பல சுவையான கருத்துகளைப் பெறப்போகிறோம். படம் 4.2 திறந்த வளைவான வடிவத்தைக் குறிக்கிறது.

நாம் இங்கு வடிவங்களை வரைதல், ஒப்பீடு செய்தல் மற்றும் அளத்தல் என்பனவற்றுடன், மேலும் பல கருத்துக்களை அறியப் போகிறோம். அதற்காக நாம் அவற்றை விளக்கவேண்டும். நாம் இந்த வடிவங்களை எவ்வாறு விளக்குவது? (படம் 4.3ஐப் பார்க்க.)

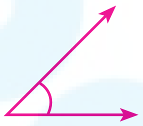

படம். 4.3

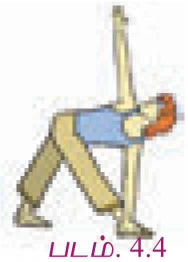
அவை நேர்க்கோடுகளால் உருவாக்கப்பட்ட மூடிய வடிவம்.

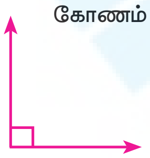
4.2 கோணங்களின் வகைகள் (Types of Angles)

மீள்பார்வை

நாம் அன்றாட வாழ்வில் கோணங்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். குழாய் செப்பனிடுபவர் குழாய்களைச் சீராகப் பொருத்துவதற்குக் கோணத்தைப் பயன்படுத்துகிறார். மரவேலை செய்பவர்கள் தங்கள் கருவிகளைத் தேவைக்கேற்றவாறு அமைத்து மரங்களைச் சரியான கோணத்தில் அறுக்கிறார்கள். வான்வழிப் போக்குவரத்துக் கட்டுப்பாட்டு அலுவலர்களும் (ATC- Air Traffic Controllers) விமானங்களை இயக்கக் கோணங்களைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். சுண்டாட்ட (carrom) விளையாட்டு வீரர்கள் கோணங்களை நன்கு அறிந்திருந்தால் தங்கள் இலக்கைத் திட்டமிட முடியும். கோணமானது ஒரே கோட்டிலமையாத பொதுவான தொடக்கப் புள்ளியைக் கொண்ட இரு கதிர்களால் உருவாகின்றது.


குறுங்கோணம்
90° ஐ விடவும் குறைவான கோணம்

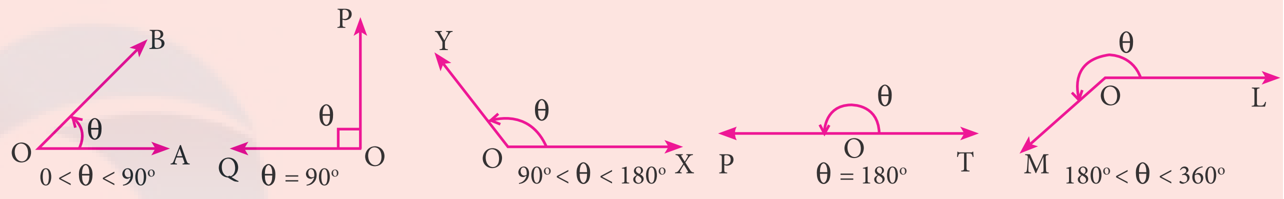

படம். 4.4


செங்கோணம்
சரியாக 90° அளவுள்ள கோணம்

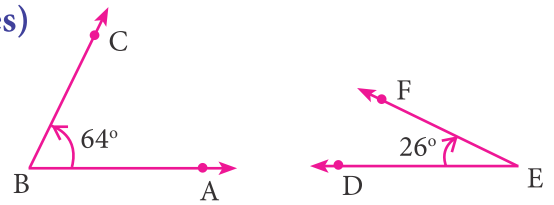
படம். 4.5

4-Geometry_TM.indd 150 26-12-2019 12:36:53

குறுங்கோணம்	செங்கோணம்	விரிகோணம்	நேர்க்கோணம்	பின்வளைக்கோணம்



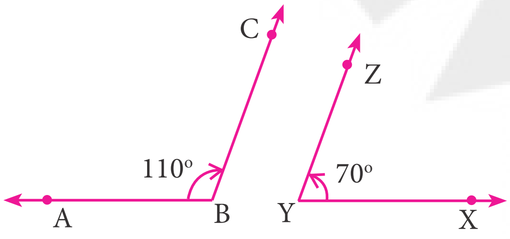
நிரப்புக் கோணங்கள் (Complementary Angles)



படம். 4.6

இரு கோண அளவுகளின் கூடுதல் 90° எனில், அக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும். . எடுத்துக்காட்டாக, $\angle ABC=64°$ மற்றும் $\angle DEF=26°$ எனில், கோணங்கள் $\angle ABC$ மற்றும் $\angle DEF$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்களாகும். ஏனென்றால் $\angle ABC + \angle DEF = 90°$

மிகை நிரப்புக் கோணங்கள் (Supplementary Angles)



படம். 4.7

இரு கோணங்களின் கூடுதல் 180° எனில் அக்கோணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று மிகை நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\angle ABC=110°$ மற்றும் $\angle XYZ=70°$ எனில், இங்கு, $\angle ABC + \angle XYZ = 180°$.

ஆகவே $\angle ABC$ மற்றும் $\angle XYZ$ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று மிகை நிரப்புக் கோணங்களாகும்.

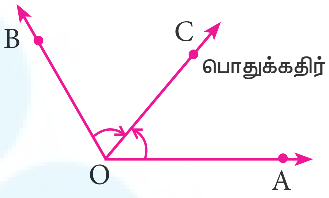
அடுத்துள்ள கோணங்கள் (Adjacent Angles)

இரு கோணங்கள்

i) பொதுவான முனைப் புள்ளியைப் பெற்றும்

ii) பொதுவான கதிர் ஒன்றினைப் பெற்றும்

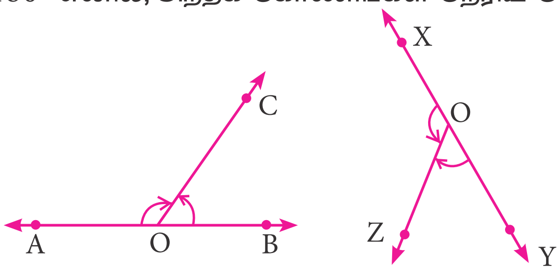
iii) அப்பொதுவான கதிரானது இரு பொதுவற்ற கதிர்களுக்கு இடையிலும் அமையுமாயின் அவை அடுத்துள்ள கோணங்களாகும்.



படம். 4.8

நேரிய கோணச் சோடிகள் (Linear Pair of Angles)

ஒரு கதிர் கோட்டின் மீது நிற்கும்போது உண்டாகும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180° எனில், அந்தக் கோணங்கள் நேரிய கோணங்கள் எனப்படும்.



படம். 4.9

$\angle AOC + \angle BOC=180°$

$\therefore \angle AOC$ மற்றும் $\angle BOC$ நேரிய கோணங்கள்

$\angle XOZ + \angle YOZ = 180°$

$\angle XOZ$ மற்றும் $\angle YOZ$ நேரிய கோணங்கள்

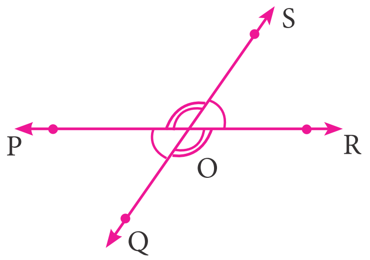
4-Geometry_TM.indd 151 26-12-2019 12:36:54

குத்தெதிர்க் கோணங்கள் (Vertically Opposite Angles)

இரு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொண்டால் உண்டாகும் குத்தெதிர்க் கோணங்கள் சமம்.

படத்தில், $\angle POQ = \angle SOR$

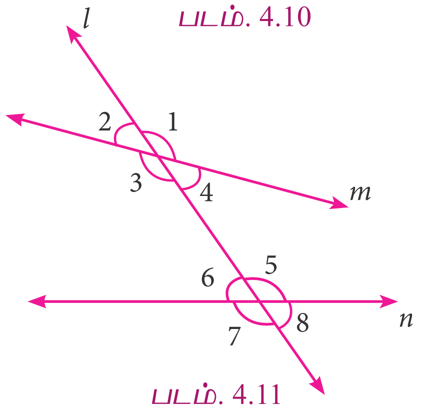
$\angle POS = \angle QOR$



படம். 4.10

4.2.1 குறுக்குவெட்டி (Transversal)

ஒரு கோடு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கோடுகளை வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுமேயானால் அது அக்கோடுகளின் குறுக்குவெட்டி எனப்படும்.



படம். 4.11

வகை (i) ஒரு குறுக்குவெட்டி இரு கோடுகளை வெட்டுவதால் எட்டுக் கோணங்கள் கிடைக்கின்றன. படத்தில் m மற்றும் n என்ற கோடுகளை l என்ற குறுக்குவெட்டி வெட்டுவதால்,

(i) ஒத்த கோணங்கள் : $\angle 1$ மற்றும் $\angle 5$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 6$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 7$, $\angle 4$ மற்றும் $\angle 8$

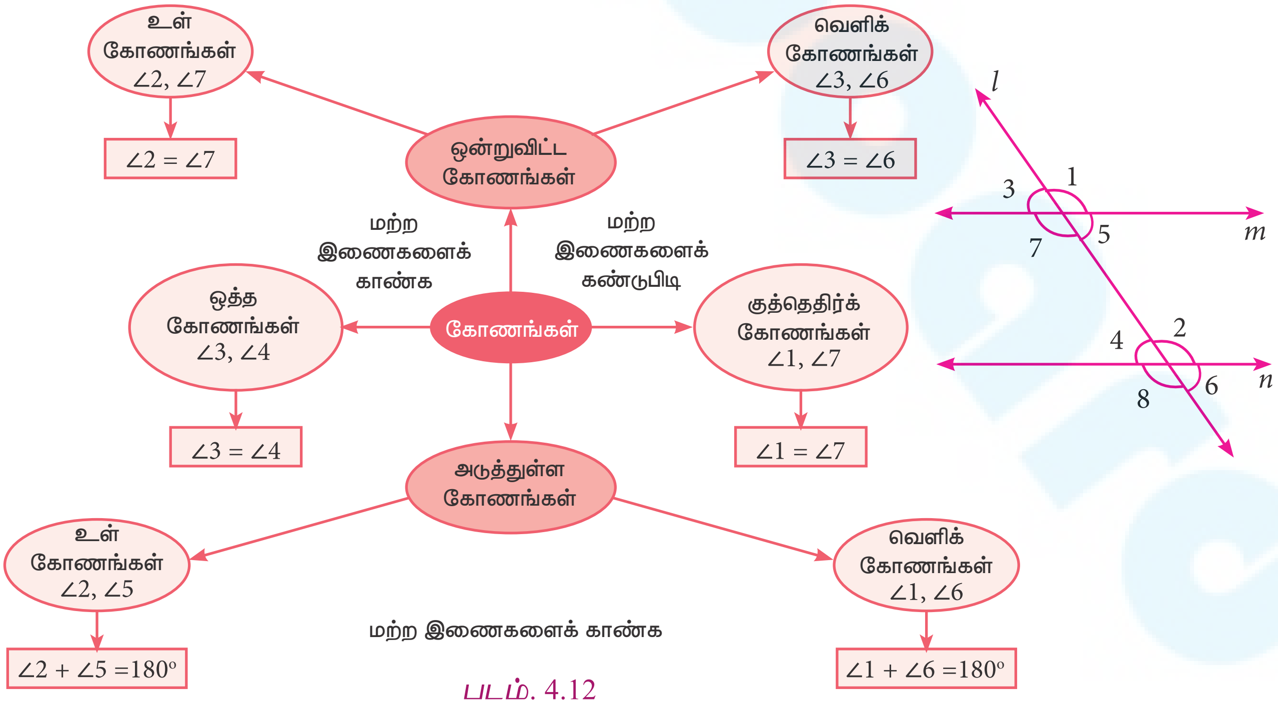
(ii) ஒன்றுவிட்ட உள் கோணங்கள்: $\angle 4$ மற்றும் $\angle 6$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 5$

(iii) ஒன்றுவிட்ட வெளிக் கோணங்கள் : $\angle 1$ மற்றும் $\angle 7$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 8$

(iv) $\angle 4$ மற்றும் $\angle 5$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 6$ என்பன குறுக்குவெட்டியின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்த உள் கோணங்கள்.

(v) $\angle 1$ மற்றும் $\angle 8$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 7$ என்பன குறுக்கு வெட்டியின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்த வெளிக் கோணங்கள்.

வகை (ii) ஒரு குறுக்குவெட்டியானது இரு இணைக் கோடுகளை வெட்டுவதால் வெவ்வேறு விதமான கோணச் சோடிகளைக் குறுக்குவெட்டி ஏற்படுத்துகிறது.



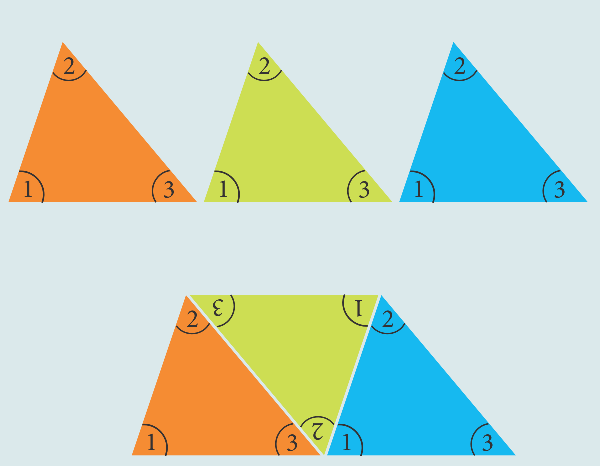
படம். 4.12

4-Geometry_TM.indd 152 26-12-2019 12:36:54

4.2.2 முக்கோணங்கள் (Triangles)

செயல்பாடு 1

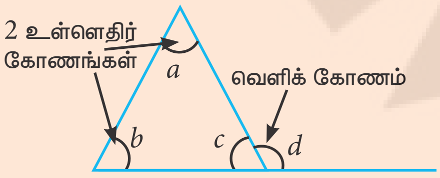
மூன்று வெவ்வேறு வண்ணக் காகிதங்களை எடுத்து அவற்றை ஒன்றின் மீது ஒன்றாக வைக்கவும். மேல் காகிதத்தில் ஒரு முக்கோணம் வரைந்து, ஒரே அளவுள்ள வெவ்வேறு வண்ணங்கள் கொண்ட மூன்று முக்கோணங்கள் கிடைக்குமாறு வெட்டி எடுக்கவும். கொடுக்கப் பட்டுள்ளவாறு முனைகளையும், கோணங் களையும் குறிக்கவும். உள்கோணங்கள் $\angle 1, \angle 2$ மற்றும் $\angle 3$ ஐ ஒரே நேர்க்கோட்டில் அடுத்தடுத்து வருமாறு முக்கோணங்களை இடைவெளி இல்லாமல் வைக்கவும் மூன்று கோணங்கள் $\angle 1$, $\angle 2$ மற்றும் $\angle 3$ இன் மொத்த அளவைப் பற்றி என்ன கூறுவாய்?



படம். 4.13

இதே படத்தைப் பயன்படுத்தி **முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணப்** பண்பை விளக்க இயலுமா?

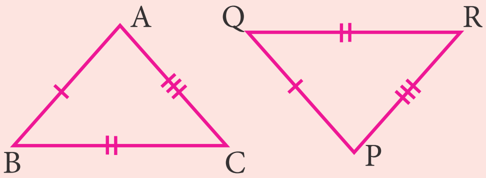
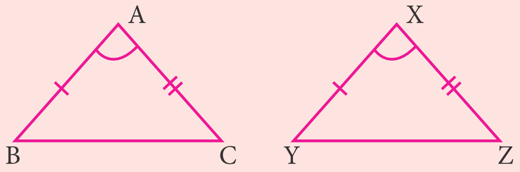
முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் நீட்டப்பட்டால் உண்டாகும் வெளிக்கோணமானது இரண்டு உள்ளெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம். அதாவது $d=a+b$ (படம். 4.14 ஐப் பார்க்க)



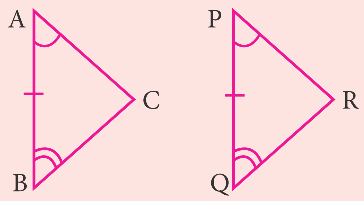
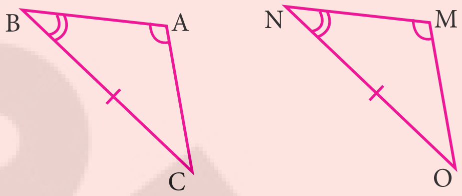
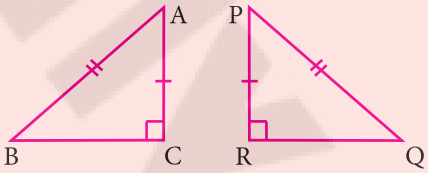
படம். 4.14

4.2.3 சர்வசம முக்கோணங்கள் (Congruent Triangles)

ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களும், கோணங்களும் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒத்த பக்கங்களுக்கும், ஒத்த கோணங்களுக்கும் சமமானால் அவ்விரு முக்கோணங்கள் சர்வசம முக்கோணங்கள் எனப்படும்.

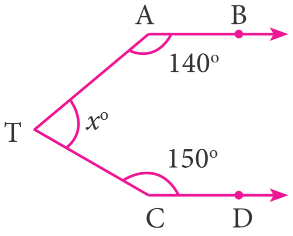
விதி	படங்கள்	காரணம்
ப–ப–ப		$AB = PQ$ $BC = QR$ $AC = PR$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
ப–கோ–ப		$AB = XY$ $\angle BAC = \angle YXZ$ $AC = XZ$ $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

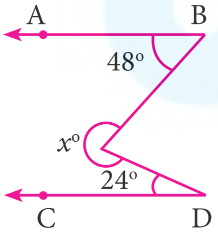
4-Geometry_TM.indd 153 26-12-2019 12:36:54

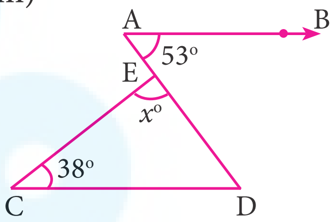
கோ–ப–கோ		$\angle A = \angle P$ $AB = PQ$ $\angle B = \angle Q$ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$
கோ–கோ–ப		$\angle A = \angle M$ $\angle B = \angle N$ $BC = NO$ $\Delta ABC \cong \Delta MNO$
செ–க–ப		$\angle ACB = \angle PRQ = 90°$ (செ) AB = PQ கர்ணம் (க) $AC = PR$ (ப) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

பயிற்சி 4.1

1. படத்தில், AB ஆனது CD –க்கு இணை எனில், x இன் மதிப்பு காண்க.

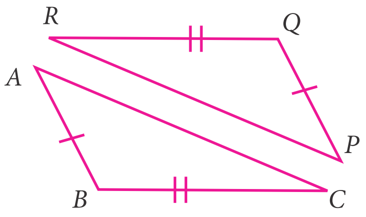
(i) 

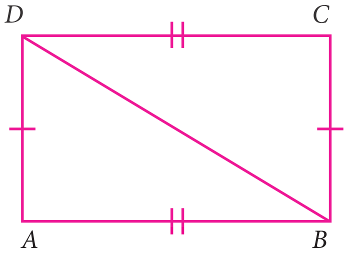
(ii) 

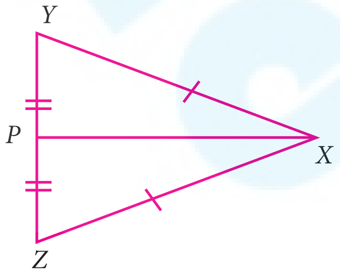
(iii) 

2. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் விகிதம் $1 : 2 : 3$ எனில் முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோண அளவையும் காண்க.

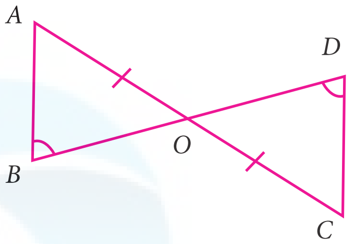
3. கொடுக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணச் சோடிகளைக் கருத்தில் கொள்க. மேலும் அவற்றில் ஒவ்வொரு சோடியும் சர்வசம முக்கோணங்களா எனக் காண்க. அவை சர்வசம முக்கோணங்கள் எனில் எப்படி? இல்லையெனில் அவை சர்வசமமாக என்ன செய்ய வேண்டும்?

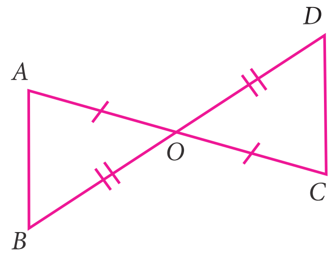
(i) 

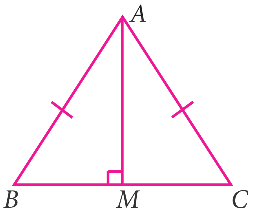
(ii) 

(iii) 

4-Geometry_TM.indd 154 26-12-2019 12:36:55

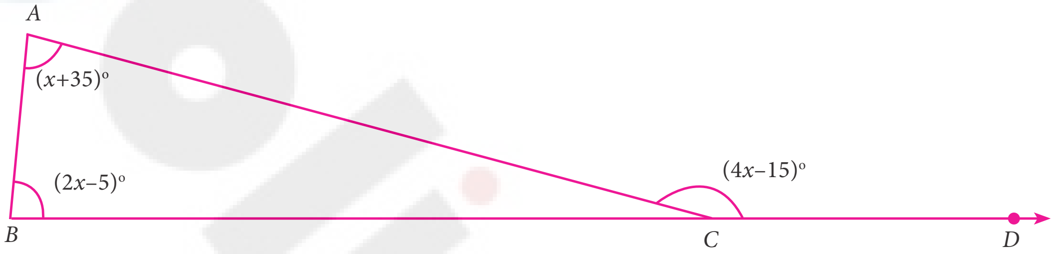
(iv)


(v)


(vi)


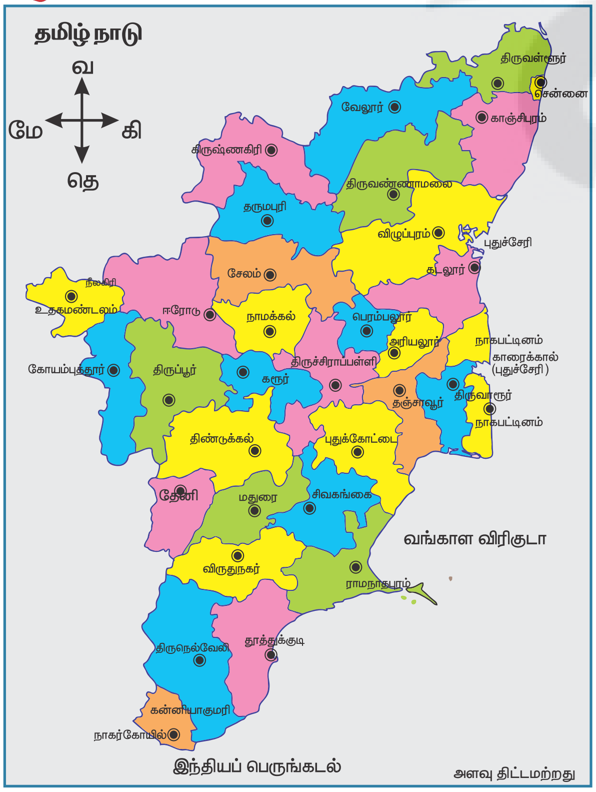
4. ΔABC மற்றும் ΔDEF இல் $AB=DF$ மற்றும் $\angle ACB=70°$, $\angle ABC=60°$, $\angle DEF=70°$ மற்றும் $\angle EDF=60°$ எனில், முக்கோணங்கள் சர்வசமம் என நிறுவுக.

5. கொடுக்கப்பட்ட ΔABC இல் அனைத்துக் கோண அளவுகளையும் காண்க.



4.3 நாற்கரங்கள் (Quadrilaterals)

செயல்பாடு 2



படம். 4.15

தமிழ்நாடு போக்குவரத்துக் கழகப் பேருந்துகள் கீழ்க்காணும் நான்கு வழித்தடங்களை எடுத்துக்கொள்கின்றன. முதலாவது ஒருவழிப் பயணமாகும். மற்றவை சுற்றுப் பாதைப் பயணமாகும். வரைபடத்தில் இடங்களைக் கண்டறிந்து அவற்றைப் புள்ளிகளால் குறித்து, கோடுகளால் இணைத்து, வழித்தடத்தை வரைக. நான்கு வெவ்வேறு வழித்தடத்திலும் இணைக்கப் பட்டுள்ள இடங்கள் பின்வருமாறு:

(i) நாகர்கோவில், திருநெல்வேலி, விருதுநகர், மதுரை.

(ii) சிவகங்கை, புதுக்கோட்டை, தஞ்சாவூர், திண்டுக்கல், சிவகங்கை.

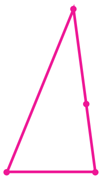
(iii) ஈரோடு, கோயம்புத்தூர், தருமபுரி, கரூர், ஈரோடு.

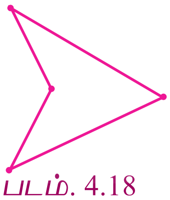
(iv) சென்னை, கடலூர், கிருஷ்ணகிரி, வேலூர், சென்னை.

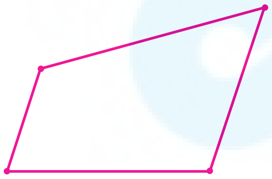
இந்த இடங்களை இணைத்தால், நாம் கீழ்க்கண்ட வடிவங்களைப் பெறுகின்றோம்.

(i)

படம். 4.16

(ii)

படம். 4.17

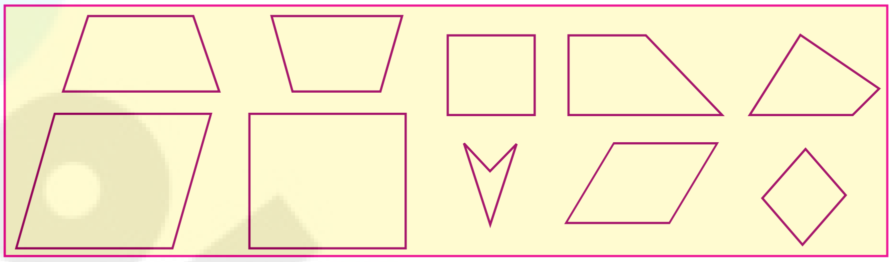
(iii)

படம். 4.18

(iv)

படம். 4.19

4-Geometry_TM.indd 155 26-12-2019 12:36:55

நகரங்களின் பெயர்களைப் புள்ளிகளில் குறித்து வரைபடத்தில் உள்ளவாறே எவ்விதச் சுழற்சியும் இன்றி வடிவங்களை வரைக.

நாம் உற்றுநோக்கினால், முதலாவது படத்தில் (4.16) நான்கு புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன என்பது புலப்படும். மற்ற மூன்றும் நாம் முன்பே கண்டுள்ளவாறு நேர்க்கோடுகளால் அடைபட்ட மூடிய வடிவங்கள் ஆகும். இந்த மூடிய வடிவங்களை அழைக்கச் சில பெயர்கள் நமக்குத் தேவைப்படுகின்றன. அவற்றை நாம் பலகோணம் என அழைப்போம்.



படம். 4.20

குறிப்பு

குழிவுப் பலகோணம் (*Concave Polygon*): பலகோணத்தின் ஏதேனும் ஒரு கோணத்தின் அளவு 180° யை விட அதிகமாக இருந்தால் அது குழிவுப் பலகோணமாகும்

குவிவுப் பலகோணம் (*Convex Polygon*): பலகோணத்தின் அனைத்து உட்கோணங்களும் 180° யை விடக் குறைவாக இருக்கும் (மூலை விட்டங்கள் பலகோணத்திற்கு உள்ளேயே அமையும்).

பலகோணம் எவ்வாறு தோற்றமளிக்கும்? அவற்றின் பக்கங்களின் இரு முனைகளிலும் புள்ளிகள் இருக்கும். நாம் இந்தப் புள்ளிகளைப் பலகோணத்தின் முனைகள் என அழைப்போம். இந்த முனைகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டுகளே பக்கங்கள். *Poly* என்றால் பல என்பதைக் குறிக்கும். *Polygon* என்பது பல பக்கங்களைக் கொண்ட வடிவம் என்று பொருள்படும்.

ஒரு பலகோணத்திற்கு எத்தனை பக்கங்கள் இருக்கும்? ஒன்றா? ஆனால் இது ஒரு சாதாரணக் கோட்டுத்துண்டு. இரண்டா? ஆனால் இரண்டு பக்கங்களைக் கொண்டு மூடிய வடிவத்தை எவ்வாறு பெற இயலும்? மூன்றா? ஆம். இதை முன்பே அறிந்துள்ளோம். அதுதான் முக்கோணம். இப்பொழுது நான்கு பக்கங்கள்? சதுரம் மற்றும் செவ்வகம் நான்கு பக்கங்களைக் கொண்ட பலகோணத்தின் எடுத்துக்காட்டுகள். ஆனால் அவை மட்டுமன்று, இங்கு (படம் 4.20) உள்ளவை நான்கு பக்கங்கள் கொண்ட பலகோணங்களுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும். இவற்றை நாம் நாற்கரங்கள் என அழைப்போம்.

4.3.1 சில சிறப்பு நாற்கரங்களின் பெயர்கள் (Special Names for Some Quadrilaterals)

1. ஓர் இணைகரம் என்பது எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையாக மற்றும் சமமாக உள்ள நாற்கரமாகும்.
2. ஒரு சாய்சதுரம் என்பது எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையாகவும் மற்றும் எல்லாப் பக்கங்களும் சமமாகவும் உள்ள நாற்கரமாகும்.
3. ஒரு சரிவகம் என்பது ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் இணையாக உள்ள நாற்கரமாகும்.

ஒரு சில இணைகரங்கள், சாய்சதுரங்கள் மற்றும் சரிவகங்களை வரைக.

4-Geometry_TM.indd 156 26-12-2019 12:36:55

படம். 4.21

நாற்கரங்களின் பண்புகளை அறிந்துகொள்வதின் பெரிய பயன் என்னவென்றால் நாம் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள உறவுகளை உடனடியாகத் தெரிந்துகொள்ளலாம்.

- ஒவ்வோர் இணைகரமும் சரிவகமாகும். ஆனால் ஒவ்வொரு சரிவகமும் இணைகரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
- ஒவ்வொரு சாய்சதுரமும் இணைகரமாகும். ஆனால் ஒவ்வோர் இணைகரமும் சாய்சதுரமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
- ஒவ்வொரு செவ்வகமும் இணைகரமாகும். ஆனால் ஒவ்வோர் இணைகரமும் செவ்வகமாக இருக்க வேண்டியதில்லை.
- ஒவ்வொரு சதுரமும் சாய்சதுரமாகும். மேலும், ஒவ்வொரு சதுரத்தையும் இணைகரம் என நிறுவலாம்.

மாற்று வழியில் அமையாது என்பதால் கணிதவியலாளர்கள் மறுதலை உண்மையல்ல எனப் பொதுவாகக் கூறுவர். இப்பொழுது மாற்றுவழியில் அமைவது எப்போது? என்ற அழகிய வினா உடனடியாக எழுகின்றது. அதாவது இணைகரமானது எப்பொழுது செவ்வகமாகும்? எந்தவொரு இணைகரத்திலும் எல்லாக் கோணங்களும் சமமாகும்போது, அது ஒரு செவ்வகமாகும். (நாம் ஏன் இதைக் காணவேண்டும்?) இப்பொழுது நாம் மேலும் பல சுவாரசியமான பண்புகளை உணர்ந்திருப்போம். அதாவது, சாய்சதுரம் என்பது எல்லாப் பக்கங்களும் சமமாக உள்ள இணைகரமே என்பதை நாம் கண்டோம்.

குறிப்பு

உங்களுக்கு *bi-cycles* (இரு சக்கர வாகனம்) மற்றும் *tri-cycles* (முச்சக்கர வாகனம்) தெரியுமா? எந்தவொரு சொல்லின் முன்பும் நாம் *bi* அல்லது *tri* இணைக்கும் பொழுது அது 2 (*bi*) அல்லது 3 (*tri*)ஐக் குறிக்கும். இதேபோல் *quadri* என்பது நான்கையும், *quadri cycles* நான்கு சக்கர மிதிவண்டிகளையும் குறிக்கும். மேலும் (*Lateral*) 'கரம்' என்பது பக்கங்களைக் குறிக்கும். எனவே, நாற்கரம் (*quadrilateral*) என்பது 4– பக்கங்களைக் கொண்ட வடிவம். உங்களுக்கு முக்கரங்கள் தெரியுமல்லவா? அவை முக்கோணங்கள்தானே! நான்கிற்குப் பிறகு? நமக்கு 5 – *Penta*, 6 – *hexa*, 7– *hepta*, 8 – *octa*, 9 – *nano*, 10 – *deca* என ஒரு மரபு காணப்படுகிறது. *Trigons* என்பது முக்கோணங்கள் என அழைக்கப்படும். *quadrigons* என்பது நாற்கரங்கள் என அழைக்கப்படும். ஆனால் இதன் தொடர்சியாக நாம் ஐங்கோணம், அறுங்கோணம், எழுங்கோணம், எண்கோணம், நவகோணம், தசகோணம் என்பனவற்றைப் பெற்றுள்ளோம். இதற்கும் மேலாக 11– கோணம், 12– கோணம் முதலியனவும் உள்ளன. ஒருவேளை உங்களால் 23 – கோணம் கூட வரைய இயலும்.

4-Geometry_TM.indd 157 26-12-2019 12:36:55

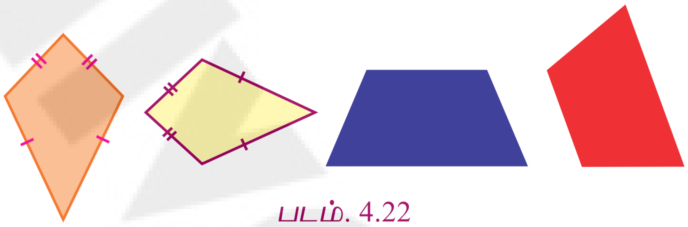
4.3.2 மேலும் சிறப்புப் பெயர்கள் (More Special Names)

நாற்கரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களும் சமமாகும்பொழுது, நாம் அதைச் சமபக்கம் என அழைப்போம். நாற்கரத்தின் எல்லாக் கோணங்களும் சமமாகும்பொழுது, நாம் அதைச் சமகோணம் என அழைப்போம். முக்கோணங்களில் அனைத்துப் பக்கங்களும் சமமெனில், நாம் சமபக்க முக்கோணங்கள் எனக் கண்டுள்ளோம். இப்பொழுது நாம் அவற்றைச் சமகோணமுள்ள முக்கோணங்கள் எனவும் அழைக்கலாமே!

இவ்வாறாக,

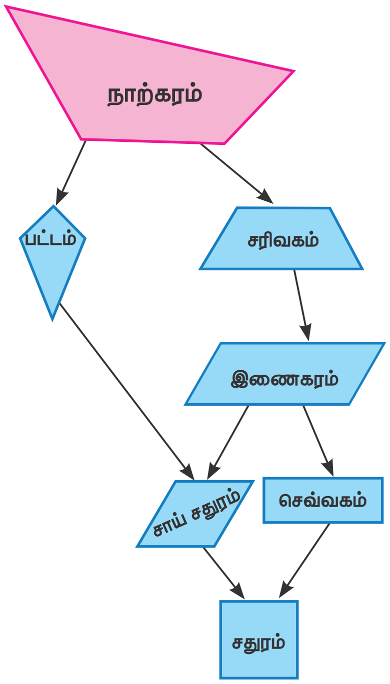
- ஒரு சாய்சதுரம் என்பது சமபக்க இணைகரமாகும்.
- ஒரு செவ்வகம் என்பது சமகோண இணைகரமாகும்.
- ஒரு சதுரம் என்பது சமபக்க மற்றும் சமகோண இணைகரமாகும்.

மேலும், இங்கு பட்டம் மற்றும் இருசமபக்கச் சரிவகம் ஆகியவற்றை இரு சிறப்பு நாற்கரங்கள் என அழைப்போம்.



படம். 4.22

4.3.3 நாற்கரத்தின் வகைகள் (Types of Quadrilaterals)



படம். 4.23

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்.

(i) சாய் சதுரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமமா?

(ii) ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாகவும், இணையாகவும் உள்ள நாற்கரம் ________________

(iii) பட்டத்தில் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமா?

(iv) சம கோணங்களையும் சமமற்ற பக்கங்களையும் கொண்ட இணைகரம் எது?

(v) சம பக்கங்களையும், சமமற்ற கோணங்களையும் கொண்ட இணைகரம் எது?

(vi) சம பக்கங்களையும் சம கோணங்களைகயும் கொண்ட இணைகரம் எது?

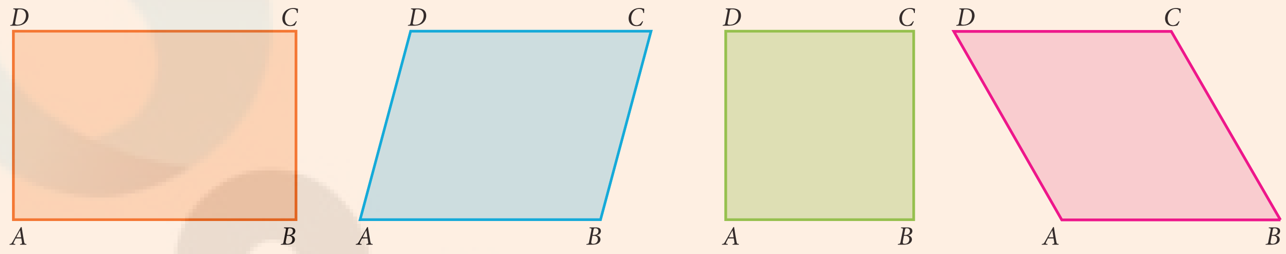
(vii) ___________ என்பது ஒரு செவ்வகம், ஒரு சாய்சதுரம் மற்றும் ஓர் இணைகரம் ஆகும்.

4-Geometry_TM.indd 158 26-12-2019 12:36:55

செயல்பாடு 3

படி – 1

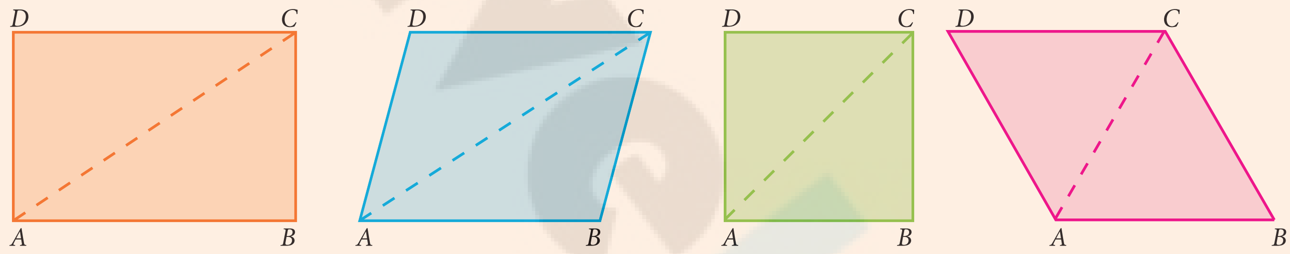
வண்ணக் காகிதத் தாளில் நான்கு வேறுபட்ட நாற்கரங்களை வெட்டி எடுக்கவும்.



படம். 4.24

படி – 2

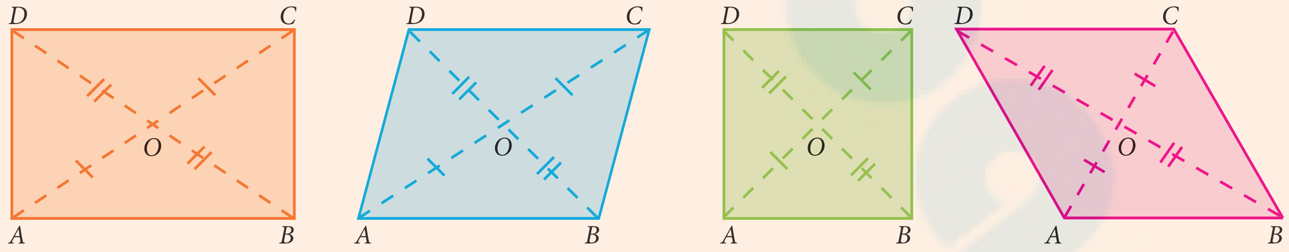
நாற்கரங்களை மூலைவிட்டங்களைப் பொறுத்து மடிக்கவும். மடிப்புகளை நன்றாக அழுத்திக் கோடுகளை உருவாக்கவும். இங்கு புள்ளிக் கோடுகள் மடிப்புகளைக் குறிக்கின்றன.



படம். 4.25

படி – 3

நாற்கரங்களின் இரண்டு மூலைவிட்டங்களையும் மடித்து நன்றாக அழுத்தி மடிப்புகளை உருவாக்குக



படம். 4.26

இவற்றில் இரண்டு எதிரெதிர் முக்கோணங்கள் சர்வசமமாக இருப்பதை அறியலாம். மூலைவிட்டப் பகுதிகளின் நீளங்கள் மற்றும் அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணங்களை அளந்து எழுதுக.

இதேபோல் சரிவகம் , இருசமபக்க சரிவகம் மற்றும் பட்டத்திற்கும் செய்க.

4-Geometry_TM.indd 159 26-12-2019 12:36:55

முன்புசெய்த செயல்பாட்டிலிருந்து, மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களையும், இடைப்பட்ட கோணங்களையும் அளந்து அட்டவணைப்படுத்துக.

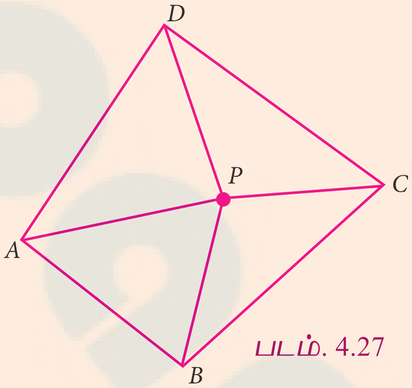
வ. எண்	நாற்கரத்தின் பெயர்கள்	மூலைவிட்டத்தின் நீளங்கள்						கோணங்களின் அளவுகள்			
		AC	BD	OA	OB	OC	OD	$\angle AOB$	$\angle BOC$	$\angle COD$	$\angle DOA$
1	சரிவகம்										
2	இருசமபக்கச் சரிவகம்										
3	இணைகரம்										
4	செவ்வகம்										
5	சாய்சதுரம்										
6	சதுரம்										
7	பட்டம்										

செயல்பாடு 4

பலகோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல்

ஏதேனும் ஒரு நாற்கரம் $ABCD$ ஐ வரைக.

அதன் உள்ளே P என்ற புள்ளியை உருவாக்குக. துண்டுகள் PA, PB, PC மற்றும் PD ஐ இணைக்க. நமக்கு இப்பொழுது நான்கு முக்கோணங்கள் கிடைத்துள்ளன.



படம். 4.27

நான்கு முக்கோணங்களின் அனைத்துக் கோணங்களின் கூடுதல் எவ்வளவு? முனை P இல் கோணங்களின் கூடுதல் எவ்வளவு? உன்னால் இப்பொழுது நாற்கரம் $ABCD$ இன் கோணங்களின் கூடுதல் காண இயலுமா?

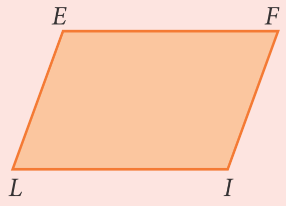
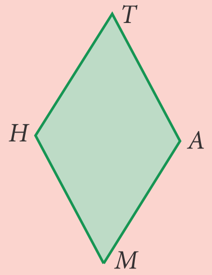
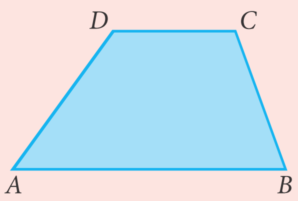
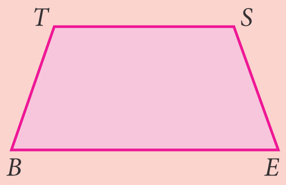
இதே முறையை அனைத்துப் பலகோணங்களுக்கும் விரிவுபடுத்த இயலுமா?

4-Geometry_TM.indd 160 26-12-2019 12:36:56

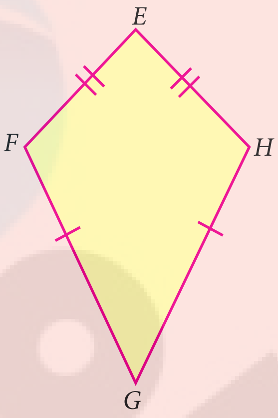
சிந்தனைக் களம்

1. பலகோணத்தின் பக்கம் $(n \geq 3)$, எனில் அதன் உள் கோணங்களின் கூடுதல் $(n-2) \times 180^\circ$.
2. ஒழுங்கு பல கோணத்திற்கு (பலகோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களும் சமம் எனில் அது ஒழுங்கு பலகோணமாகும்)
   - ஒவ்வொரு உள் கோணத்தின் மதிப்பு $\dfrac{(n-2)}{n} \times 180^\circ$.
   - ஒவ்வொரு வெளிக் கோண மதிப்பு $\dfrac{360^\circ}{n}$.
   - குவிவு பலகோணத்தின் (*Convex polygon*) பக்கங்களை நீட்டுவதால் உண்டாகும் வெளிக் கோணங்களின் கூடுதல் 360° .
   - பலகோணத்தின் பக்கங்கள் n எனில், அதன் மூலை விட்டங்களின் எண்ணிக்கை $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

4.3.4 நாற்கரங்களின் பண்புகள் (Properties of Quadrilaterals)

பெயர்	வரைபடம்	பக்கங்கள்	கோணங்கள்	மூலை விட்டங்கள்
இணைகரம்		எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை மற்றும் சமம்.	எதிர்க் கோணங்கள் சமம் மற்றும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180°.	மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிடும்.
சாய்சதுரம்		அனைத்துப் பக்கங்களும் சமம் மற்றும் எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை.	எதிர்க் கோணங்கள் சமம் மற்றும் அடுத்துள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 180°.	மூலை விட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இரு சமக் கூறிடும்.
சரிவகம்		ஒரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை.	இணையில்லாப் பக்கங்களின் முனைகளில் உள்ள கோணங்கள் மிகை நிரப்பு.	மூலை விட்டங்கள் சமமாக இருக்க வேண்டிய தேவை இல்லை.
இருசமபக்கச் சரிவகம்		ஒரு சோடி எதிர்ப் பக்கங்கள் இணை, இணையில்லாப் பக்கங்களின் அளவுகள் சமம்.	இணைப் பக்கங்களின் முனைகளில் உள்ள கோணங்கள் சமம்.	மூலை விட்டங்கள் சமம்.

4-Geometry_TM.indd 161 26-12-2019 12:36:56

பட்டம்	 	இரு சோடி அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமம்.	ஒரு சோடி எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.	1. மூலை விட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டிக் கொள்ளும். 2. சிறிய மூலை விட்டத்தைப் பெரிய மூலை விட்டம் இரு சமக் கூறிடும். 3. பெரிய மூலை விட்டமானது, பட்டத்தை இரண்டு சர்வசம முக்கோணங் களாகப் பிரிக்கும்.

குறிப்பு

- ஒரு செவ்வகம் சமகோணமுள்ள இணைகரமாகும்.
- ஒரு சாய்சதுரம் சமபக்கம் உள்ள இணைகரமாகும்.
- ஒரு சதுரம் என்பது சமபக்கம் மற்றும் சம கோணமுள்ள இணைகரமாகும்.
- சதுரம் ஒரு செவ்வகம், ஒரு சாய்சதுரம் மற்றும் இணைகரமாகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. பின்வருவனவற்றிற்குக் காரணம் கூறுக.

   (i) ஒரு சதுரம் என்பது ஒரு சிறப்புச் செவ்வகம் ஆகும்.

   (ii) ஒரு சாய்சதுரம் என்பது ஒரு சிறப்பு இணைகரம் ஆகும்.

   (iii) சாய்சதுரம் மற்றும் பட்டம் ஒரு பொதுவான பண்பைப் பெற்றுள்ளன.

   (iv) சதுரம் மற்றும் சாய்சதுரம் ஒரு பொதுவான பண்பைப் பெற்றுள்ளன.

2. பின்வரும் முக்கோணங்கள் சர்வசம முக்கோணச் சோடியாக இணைக்கப்பட்டால் உண்டாகும் நாற்கரத்தின் வகை என்ன?

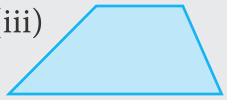
   (i) சமபக்க முக்கோணம்

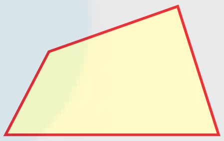
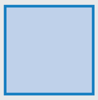
   (ii) செங்கோண முக்கோணம்

   (iii) இருசமபக்க முக்கோணம்

4-Geometry_TM.indd 162 26-12-2019 12:36:56

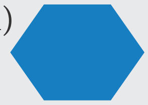
3. கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றில் எவை இணைகரம் அல்லது இணைகரம் அல்ல என்பதைக் காண்க.

(i) (ii) (iii) 

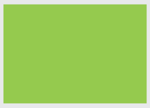
(iv)  (v) (vi) 

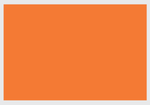
4. எவை நாற்கரம் அல்ல?

(i) (ii) (iii) (iv)

(v) (vi) (vii) (viii) 

5. கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றில் எவை சரிவகம் அல்லது சரிவகம் அல்ல என்பதைக் காண்க.

(i) (ii) (iii) 

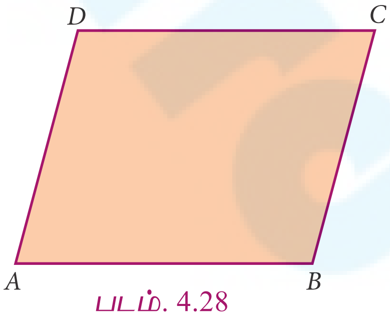
(iv)  (v) (vi)

4.3.5 இணைகரத்தின் பண்புகள் (Properties of Parallelogram)

நாம் இப்போது ஒரு பயணத்தை மேற்கொள்ளலாம். பல்வகை நாற்கரங்களுக்கிடையே பயணிக்கும்பொழுது எதிர்கொள்ளும் பண்புகளைக் குறித்துக்கொள்வோம். எத்தகு பண்புகளை நாம் எதிர்நோக்கலாம்? அவற்றின் உண்மைத் தன்மையை எவ்வாறு அறிய இயலும்?

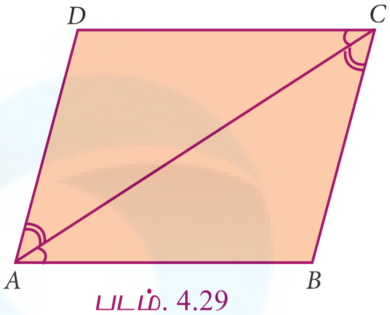
எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் இணை எனினும் அவை சமமா? பலமுறை இணைகரங்களை வரைந்து மெய்யா எனச் சோதித்து அறிய முடியும். உண்மையில் அவையனைத்திலும் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாகத்தான் இருக்கும். எனவே அனைத்து இணைகரங்களிலும் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாகத்தான் இருக்கும் என்கிற முடிவுக்கு வர இயலுமா? இயலாது. ஒருவேளை பின்னர் நாம் சற்றும் எண்ணிப்பார்க்காத, எதிர்ப்பக்கங்கள் சமமாக இல்லாத ஓர் இணைகரத்தைக் காண்பதற்கு வாய்ப்புள்ளது. எனவே, நமக்கு ஓர் அடிப்படை நிரூபணம் தேவை.

கீழ்க்காணும் படத்திலுள்ள (படம் 4.28) $ABCD$ இணைகரத்தைக் கவனிப்போம். இதில் $AB = CD$ மற்றும் $AD = BC$, என்றாலும் அவற்றை உறுதியாகக் கூற இயலுமா? முக்கோணங்களையும் அதன் பண்புகளையும் நாம் அறிவோம். எனவே, அவற்றின் வாயிலாக முயலலாம் என்றாலும் $ABCD$ இணைகரத்தில் முக்கோணங்கள் ஏதும் இல்லை.



படம். 4.28

4-Geometry_TM.indd 163 26-12-2019 12:36:56



படம். 4.29

எனினும் AC ஐ இணைப்பதால் முக்கோணங்களை மிக எளிதாக உருவாக்க இயலும். (இவ்வாறு BD ஐயும் இணைக்கலாம் என்றாலும் இதைப்பற்றி பின்னர் காணலாம்). இப்போது நமக்கு AC ஐப் பொதுப் பக்கமாகக் கொண்ட முக்கோணங்கள் ADC மற்றும் ABC கிடைக்கின்றன. ஏதோ ஒரு வகையில் இவ்விரு முக்கோணங்களும் சர்வசமமானவை என நிரூபித்தால், $AB = CD$ மற்றும் $AD=BC$ என்பது உறுதியாகும்.

ΔADC மற்றும் ΔABC முக்கோணங்கள் சர்வசமமானவை என்பதை எவ்வாறு மெய்ப்பிக்க இயலும்? சர்வசமத் தன்மையை நிலைநாட்டப் பல விதிகள் இருப்பதால் அவற்றில் எது இங்கு பொருத்தமானது என்பது ஆராயத்தக்கது.

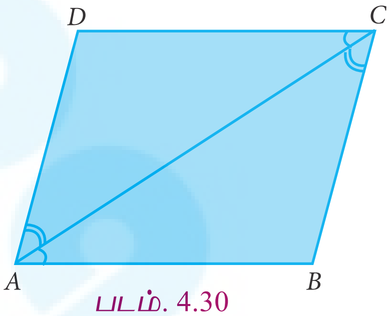
இதுவரை $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம் எனும் உண்மையை நாம் பயன்படுத்தவே இல்லை. எனவே, $AB \| DC$ மற்றும் $AD \| BC$ எனும் கருத்துகளைப் பயன்படுத்தி ΔADC மற்றும் ΔABC ஆகியவை சர்வசமமானவை என்று காட்டலாம். பக்கங்கள் இணையானவை என்பதால் சில கோணங்கள் சமமாகத்தான் இருக்க வேண்டும். அத்தகைய பண்புகளை நாம் அறிவோமா? ஆம். நம்மால் இயலும். குறுக்குவெட்டிகள் பற்றியதுதானே!

இப்போது நமக்குத் தெளிவாகிறது. $AD \| BC$ மற்றும் AC ஒரு குறுக்குவெட்டி என்பதால் $\angle DAC = \angle BCA$. இதேபோன்று, $AB \| DC$, மற்றும் AC ஒரு குறுக்குவெட்டி என்பதால் $\angle BAC = \angle DCA$. பொதுவான பக்கம் AC என்பதனால் கோ–ப–கோ விதிப்படி, ΔADC மற்றும் ΔABC சர்வசமமானவை எனத் தேவையான முடிவுக்கு நம்மால் வர இயலும். இதன் மூலம் $AB = CD$ மற்றும் $AD = BC$ என்பது உறுதியாகிறது.

எனவே, ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் எப்போதும் சமமாகத்தான் இருக்கும். இதுவரை கண்டறிந்த கருத்துகளை முறையான மெய்மைகளாகத் தொகுத்து எழுதலாம்.

தேற்றம் 1

ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம்



படம். 4.30

தரவு : $ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம்.

நிரூபிக்க : $AB=CD$ மற்றும் $DA=BC$

அமைப்பு : AC ஐ இணைக்கவும்.

நிரூபணம் :

$ABCD$ என்பது ஓர் இணைகரம்

$AD \| BC$ மற்றும் AC ஆனது குறுக்குவெட்டி

$\angle DAC = \angle BCA$ →(1) (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்)

$AB \| DC$ மற்றும் AC ஆனது குறுக்குவெட்டி

$\angle BAC = \angle DCA$ →(2) (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்)

ΔADC மற்றும் ΔCBA இல்

$\angle DAC = \angle BCA$ (1) இலிருந்து

4-Geometry_TM.indd 164 26-12-2019 12:36:57

AC ஆனது பொதுப் பக்கம்

$$\angle DCA = \angle BAC \quad \text{(2) இலிருந்து}$$
$$\Delta ADC \cong \Delta CBA \quad \text{(கோ–ப–கோ)}$$

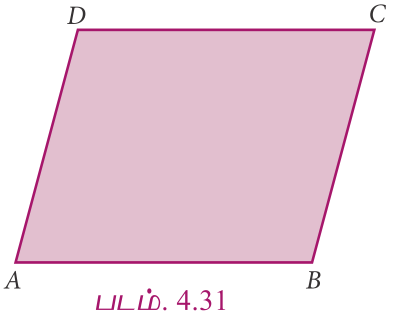
ஆகவே $AD = CB$ மற்றும் $DC = BA$ (ஒத்த பக்கங்கள் சமம்)

மேற்கண்ட நிரூபணத்தின் வழியிலேயே, தேற்றத்திற்குத் தகுந்த ஒரு பண்பினையும் நிரூபித்தோம்.

தேற்றம் 2

இணைகரத்தின் ஒரு மூலைவிட்டம் அதனை இரு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கின்றது.

$\angle DAC = \angle BCA$ மற்றும் $\angle BAC = \angle DCA$ என்பதிலிருந்து மேற்கண்ட நிரூபணம் கிடைத்தது என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.



படம். 4.31

எனவே, படம் 4.30 இன் படி,

$$\angle BCA + \angle BAC = \angle DCA + \angle DAC$$

ஆனால், நாம் அறிந்த வரை:

$$\angle B + \angle BCA + \angle BAC = 180^{\circ}$$

மற்றும் $\angle D + \angle DCA + \angle DAC = 180^{\circ}$

ஆகையால் $\angle B = \angle D$ என்றுதான் இருக்க முடியும்.

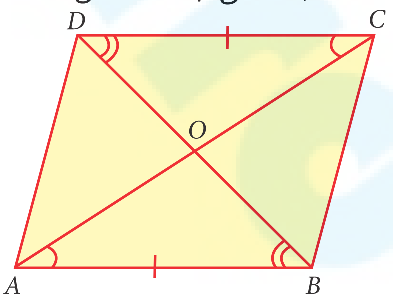
இவ்வாறே தொடர்ந்து சற்று விடா முயற்சியோடு முயன்றால், $\angle A = \angle C$ எனவும் காண்பிக்க இயலும். எனவே இவ்வாறு கீழ்க்காணும் தேற்றத்தையும் நம்மால் நிரூபிக்க முடியும்.

தேற்றம் 3

ஓர் இணைகரத்தில் எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.

இப்போது முக்கோணங்களின் சர்வசமத் தன்மை வழியே மேலும் சில முக்கோணங்களை அணுகலாம். படம் 4.32 இல் உள்ள இரு மூலைவிட்டங்களான AC மற்றும் DB யைக் கவனிப்போம். ΔADC மற்றும் ΔCBA ஆகியவை சர்வசமம் என்பதை நாம் முன்னரே அறிந்துள்ளோம். இதேபோன்று காரணகாரிய விளக்கத்தோடு ΔDAB மற்றும் ΔBCD ஆகியவற்றை சர்வசமமானவை என்பதை நம்மால் எடுத்துக்காட்ட இயலும். மேலும் சில சர்வசம முக்கோணங்களை இப்படத்தில் கண்டறிய முடியுமா?

ஆம். இரு மூலை விட்டங்களும் O என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இப்போது நம்மால் ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD மற்றும் ΔDOA என 4 முக்கோணங்களைக் காண இயலும். இவற்றுள் சர்வசமச் சோடிகளை உங்களால் காண முடிகிறதா?



படம். 4.32

AB மற்றும் CD இணை மற்றும் சமம் என்பதனால், ΔAOB மற்றும் ΔCOD ஆகியவை சர்வசமம் என எளிதாக ஊகிக்க முடியும். மீண்டும் கோ–ப–கோ விதியினைப் பயன்படுத்தி, இச்சமயத்தில் $\angle OAB = \angle OCD$ மற்றும் $\angle ABO = \angle CDO$ என்றிருக்க முயற்சிக்கலாம். ஆனால், இதில் முதலாவது பின்வரும் கூற்றான $\angle CAB = \angle ACD$

4-Geometry_TM.indd 165 26-12-2019 12:36:57

(முன்பே நாம் நிறுவியுள்ளோம்) என்பதன் மூலம் அமைகிறது. மேலும், $\angle CAB$ மற்றும் $\angle OAB$ ஆகியவை ஒரே கோணங்கள்தாம் என்பதையும் உற்றுநோக்கலாம். (இதேபோல் $\angle OCD$ மற்றும் $\angle ACD$ சமம்). இப்போது BD என்பது ஒரு குறுக்குவெட்டி எனும் காரணத்தைப் பயன்படுத்துவதால், $\angle ABD = \angle CDB$ என்பது கிடைக்கும். ஆனால், $\angle ABD$ என்பதும் $\angle ABO$ என்பதும் ஒன்றே, $\angle CDB$ என்பதும் $\angle CDO$ என்பதும் ஒன்றேதான் என்கிற முடிவை அடையலாம்.

மீண்டும் இதனை முறைப்படி நிரூபிப்பதன் மூலம், மற்றுமொரு தேற்றம் கிடைக்கிறது.

தேற்றம் 4

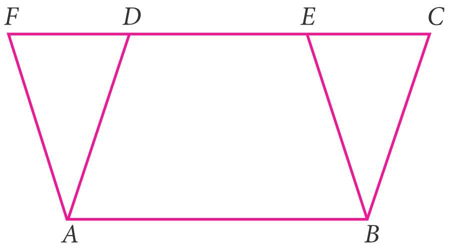
இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிடும்.

இணைகரத்தின் கோட்பாடுகளை இப்போது வலுப்படுத்தலாம். அடுத்துள்ள பெட்டிச் செய்தியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூற்றுகளை ஒவ்வொன்றாகக் கருதுவோம். ஒவ்வொரு கூற்றையும் நிறைவு செய்யும் இணைகரம் எவ்வகை இணைகரம் என்பதைக் கண்டறிந்து தகுந்த காரணம் தருக.

- எதிரெதிர்ப் பக்கங்கள் இணை.
- எதிரெதிர்ப் பக்கங்கள் சமம்.
- அனைத்துக் கோணங்களும் செங்கோணங்கள்.
- மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்.
- மூலைவிட்டங்கள் சமம்.
- மூலைவிட்டங்கள் செங்குத்து மற்றும் சமம்.
- மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருசமக் கூறிடும்.
- ஒவ்வோர் அடுத்தடுத்த சோடிக் கோணங்கள் மிகைநிரப்பிகள்.

இப்போது இணைகரங்கள் பற்றிய மேலும் சில அறிவார்ந்த பண்புகளைக் காணப் போகிறோம். இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இணைகரங்களின் ஏதாவது ஒரு பண்பினை நம்மால் முயன்று நிரூபிக்க இயலுமா? கீழ்க்காணும் படத்தில் (படம் 4.33) உள்ளது போன்று ஒரே அடித்தளத்தைப் பகிர்ந்துகொள்ளும் இரு இணைகரங்களின் பண்பினைப் பற்றி ஆராயலாம்.

$ABCD$ மற்றும் $ABEF$ ஆகிய இரு இணைகரங்களின் பொதுவான அடித்தளம் AB ஆகும். ΔADF மற்றும் ΔBCE என்ற ஒரு சோடி முக்கோணங்கள் சர்வசமமாக உள்ளன என்பதை நம்மால் எளிதில் பார்க்க முடிகிறது. முன்பே, $AD = BC$ மற்றும் $AF = BE$ என உள்ளன. ஆனால், $AD \parallel BC$ மற்றும் $AF \parallel BE$ என்பதனால், AD மற்றும் AF ஆல் அமைகின்ற கோணமும், BC மற்றும் BE ஆல் அமைகின்ற கோணமும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.



படம். 4.33

எனவே, $\angle DAF = \angle CBE$. ஆகையால் ΔADF மற்றும் ΔBCE முக்கோணங்கள் சர்வசமமானவை.

இத்தகைய உற்றுநோக்கல் மேலும் பல கருத்துகளுக்கு அடித்தளம் அமைக்கிறது. சர்வசம முக்கோணங்கள் ஒரே பரப்பளவு கொண்டவை. இதனால் $ABCD$ மற்றும் $ABEF$ இணைகரங்களின் பரப்பளவுகளைப் பற்றிய எண்ணம் நமக்கு எழுகிறது.

இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவு $=$ $ABED$ நாற்கரத்தின் பரப்பளவு $+$ ΔBCE இன் பரப்பளவு

$=$ $ABED$ நாற்கரத்தின் பரப்பளவு $+$ ΔADF இன் பரப்பளவு

$=$ $ABEF$ இன் பரப்பளவு

இவ்வாறு மற்றுமொரு தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம் 5

ஒரே அடித்தளத்தையும் ஒரு சோடி இணைக் கோடுகளுக்கிடையேயும் அமையும் இணைகரங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.

இந்த வழிமுறைகள் மேலும் பல கருத்துகளை நிரூபிக்கின்றன. கிளைத்தேற்றம் என்று அழைக்கப்படும் அவற்றைத் தனித்தனியாக விளக்கமாக நிரூபிக்கத் தேவையில்லை.

கிளைத்தேற்றம் 1: ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் ஒரு சோடி இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் சமம்.

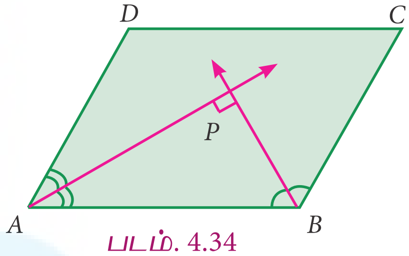
கிளைத்தேற்றம் 2: ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் ஒரு சோடி இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் ஒரு செவ்வகம் மற்றும் ஓர் இணைகரத்தின் பரப்பளவுகள் சமம்.

இணைகரங்கள் பெரியதாகவோ சிறியதாகவோ இருந்தாலும், அவற்றின் முனைகளிலுள்ள கோணங்கள், பக்கங்களின் நீளம் போன்றவை வெவ்வேறாக அமைந்திருந்தாலும், தேற்றங்கள் மற்றும் கிளைத்தேற்றங்கள் என்று அழைக்கப்படும் இத்தகைய கூற்றுகள் அனைத்து இணைகரங்களுக்கும் பொருந்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.1

இணைகரம் $ABCD$ இல் அடுத்தடுத்த கோணங்கள் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் இருசமவெட்டிகள் P இல் சந்திக்கின்றன எனில், $\angle APB = 90^\circ$ என நிறுவுக.

தீர்வு



படம். 4.34

இணைகரம் $ABCD$ இல், AP மற்றும் BP ஆனது அடுத்தடுத்த கோணங்கள் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் இருசமவெட்டிகள்.

இணைகரத்தில் அடுத்தடுத்த கோணங்களின் கூடுதல் மிகை நிரப்பிகள். எனவே,

$$\angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \frac{180^\circ}{2}$$

$$\angle PAB + \angle PBA = 90^\circ$$

ΔAPB இல்,

$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 180^\circ$ (முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல்)

$\angle APB = 180^\circ - [\angle PAB + \angle PBA]$

$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\angle APB = 90^\circ$ நிறுவப்பட்டது.

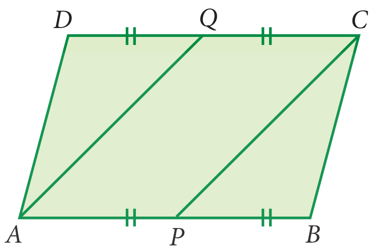
எடுத்துக்காட்டு 4.2

படம் 4.35 இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இணைகரம், $ABCD$ இன் பக்கங்கள் AB மற்றும் DC இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q எனில் $APCQ$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

4-Geometry_TM.indd 167 26-12-2019 12:36:57

தீர்வு

AB மற்றும் DC இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q என்க.



படம். 4.35

ஆகவே, $AP = \frac{1}{2} AB$ மற்றும்

$QC = \frac{1}{2} DC$ (1)

ஆனால், $AB = DC$ (இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம்)

$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DC$

$AP = QC$ (2)

மேலும், $AB \parallel DC$

$AP \parallel QC$ (3) [$\because$ $ABCD$ ஓர் இணைகரமாகும்]

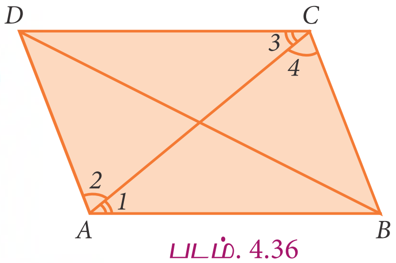
எனவே, நாற்கரம் $APCQ$ இல் $AP \parallel QC$ மற்றும் $AP = QC$ [(2) மற்றும் (3) இல் இருந்து)]

$\therefore$ நாற்கரம் $APCQ$ ஓர் இணைகரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.3

இணைகரம் $ABCD$ இல் (படம் 4.36) $\angle BAD = 120°$ மற்றும் AC ஆனது $\angle BAD$ இன் கோண இருசமவெட்டி எனில், $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக.

தீர்வு



படம். 4.36

கொடுக்கப்பட்டவை $\angle BAD = 120°$ மற்றும்

AC ஆனது $\angle BAD$ இன் இரு சம வெட்டி

$\angle BAC = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$

$\angle 1 = \angle 2 = 60°$

இங்கு $AD \parallel BC$ மற்றும் AC ஆனது குறுக்குவெட்டி

$\angle 2 = \angle 4 = 60°$

ΔABC ஆனது இரு சமபக்க முக்கோணம் [$\because \angle 1 = \angle 4 = 60°$]

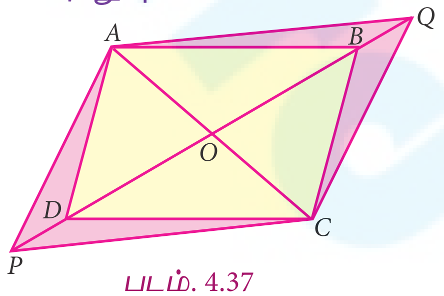
$AB = BC$

இணைகரம் $ABCD$ ஒரு சாய்சதுரமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.4

இணைகரம் $ABCD$ இல், $PD = BQ$ என்றுள்ளவாறு கோடு DB இன் மேலுள்ள புள்ளிகள் P மற்றும் Q எனில், $APCQ$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக

தீர்வு



படம். 4.37

$ABCD$ ஓர் இணைகரம்.

$OA = OC$

மற்றும் $OB = OD$ ($\because$ மூலை விட்டங்கள் இரு சமக் கூறிடும்)

4-Geometry_TM.indd 168 26-12-2019 12:36:58

இப்போது $OB + BQ = OD + DP$

$OQ = OP$ மற்றும் $OA = OC$

$\therefore$ $APCQ$ ஓர் இணைகரமாகும்..

பயிற்சி 4.2

1. ஒரு நாற்கரத்தின் கோணங்களின் விகிதம் $2:4:5:7$ எனில், அனைத்துக் கோண அளவுகளையும் காண்க.

2. நாற்கரம் $ABCD$ இல் $\angle A = 72°$ மற்றும் $\angle C$ ஆனது $\angle A$ இன் மிகை நிரப்பி மற்ற இரு கோணங்கள் $(2x-10)°$ மற்றும் $(x + 4)°$ எனில் x இன் மதிப்பையும் அனைத்துக் கோண அளவுகளையும் காண்க.

3. செவ்வகம் $ABCD$ இல் மூலை விட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஆனது Oவில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. மேலும் $\angle OAB = 46°$ எனில் $\angle OBC$ காண்க.

4. சாய்சதுரத்தின் மூலை விட்டங்களின் நீளங்கள் 12 செ.மீ. மற்றும் 16 செ.மீ. எனில், சாய்சதுரத்தின் பக்க அளவு காண்க.

5. இணைகரத்தின் கோண இரு சம வெட்டிகள் செவ்வகத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக..

6. ஒரு பொதுவான அடிப்பக்கத்தையும் ஒரு சோடி இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமைந்துள்ள முக்கோணம் மற்றும் இணைகரத்தின் பரப்புகள் $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

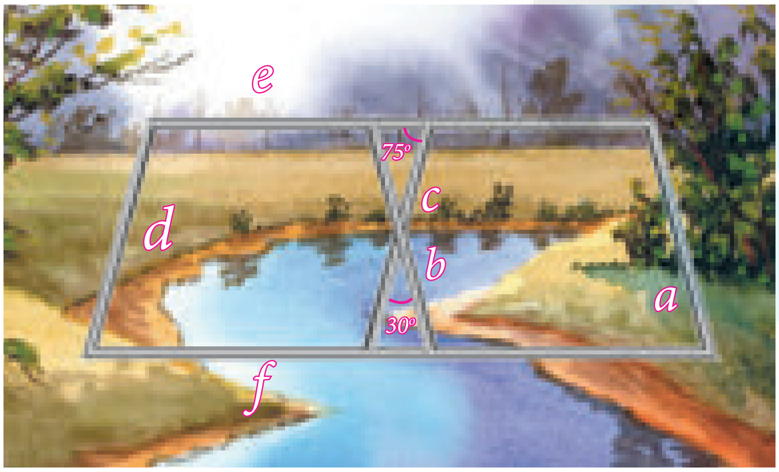
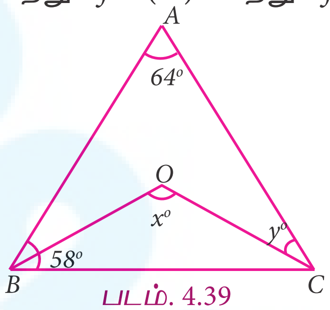


Fig. 4.38

7. இரும்புக் கம்பிகள் a, b, c, d, e, மற்றும் f ஆனது படத்தில் உள்ளவாறு ஒரு பாலத்தை அமைக்கின்றன, இதில் $a \parallel b$, $c \parallel d$, $e \parallel f$ எனில், குறிக்கப்பட்ட கோணங்களைக் காண்க.
(i) b மற்றும் c (ii) d மற்றும் e
(iii) d மற்றும் f (iv) c மற்றும் f

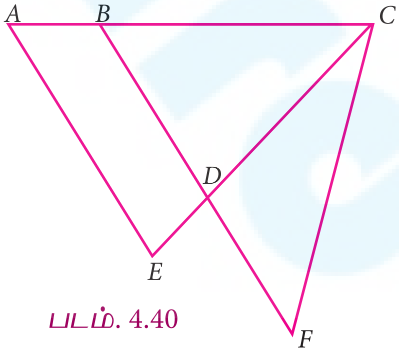


படம். 4.39

8. படம் 4.39 இல் $\angle A = 64°$, $\angle ABC = 58°$. BO மற்றும் CO ஆனது $\angle ABC$ மற்றும் $\angle ACB$ இன் இருசம வெட்டிகள் எனில், ΔABC இல் $x°$ மற்றும் $y°$ காண்க.

(iv)

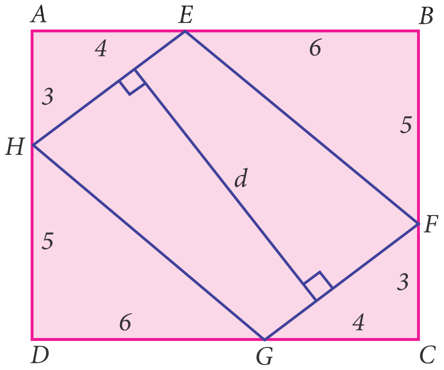
9. படம் 4.40 இல் $AB = 2$, $BC = 6$, $AE = 6$, $BF = 8$, $CE = 7$ மற்றும் $CF = 7$, எனில், நாற்கரம் $ABDE$ இன் பரப்பு மற்றும் ΔCDF இன் பரப்பிற்கும் உள்ள விகிதம் காண்க. (சர்வ சம முக்கோணத்தின் பண்பைப் பயன்படுத்துக)



படம். 4.40

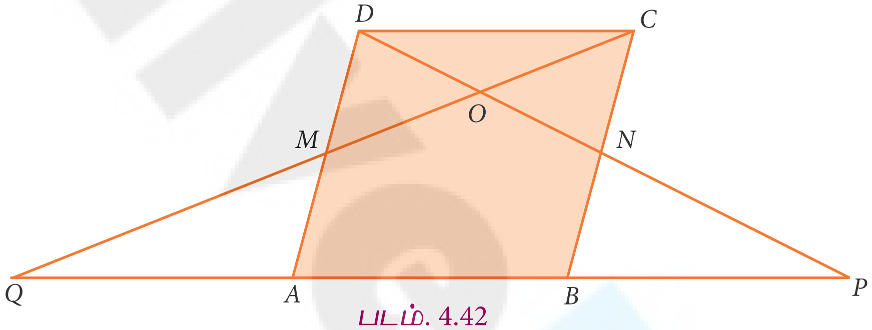
4-Geometry_TM.indd 169 26-12-2019 12:36:58

10. படம் 4.41 இல் செவ்வகம் $ABCD$ மற்றும் இணைகரம் $EFGH$ இல் d ஆனது $\overline{HE}$ மற்றும் $\overline{FG}$ –க்குச் செங்குத்து எனில், d இன் நீளம் காண்க.



படம். 4.41

11. படத்தில் இணைகரம் $ABCD$ இல் முனை D இலிருந்து வரையப்படும் கோடு DP ஆனது BC இன் நடுப்புள்ளியை N இலும், AB இன் நீட்சியை P இலும் சந்திக்கிறது. C இலிருந்து வரையப்படும் கோடு CQ ஆனது, AD இன் நடுப்புள்ளியை M இலும், AB இன் நீட்சியை Q விலும் சந்திக்கிறது. கோடுகள் DP மற்றும் CQ ஆனது O இல் சந்திக்கின்றன, எனில் ΔQPO இன் பரப்பளவானது, இணைகரம் $ABCD$ இன் பரப்பளவில் $\frac{9}{8}$ மடங்கு என நிறுவுக.



படம். 4.42

4.4 வட்டத்தின் பகுதிகள் (Parts of Circle)

வட்டங்கள் என்ற வடிவியல் உருவத்தை நம்மைச் சுற்றியுள்ள பொருள்களிலிருந்தே பார்க்க முடியும். வட்டத்தைப் பற்றிய கருத்துக்களை முழுவதுமாகப் புரிந்து கொண்டதன் விளைவாகச் சக்கரம் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இது மனித குல வரலாற்றில் மிகப்பெரிய மாற்றத்தை ஏற்படுத்திய கண்டுபிடிப்பாகும்.

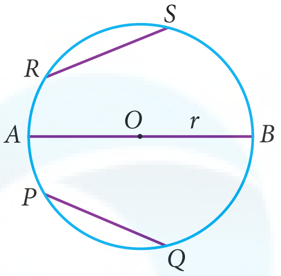
படம் 4.43

ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து மாறாத தொலைவில் உள்ள புள்ளிகளின் கணமே ஒரு **வட்டம்** என விளக்கலாம். நிலையான புள்ளியானது அந்த வட்டத்தின் **மையத்தையும்** மாறாத தொலைவானது அந்த வட்டத்தின் **ஆரத்தையும்** குறிக்கும்.

ஒரு கோடு வட்டத்தை இரு புள்ளிகளில் வெட்டுமானால் அது அந்த வட்டத்தின் **வெட்டும்கோடு** என அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு கோட்டுத்துண்டின் முனைப்புள்ளிகள் வட்டத்தின் மேல் அமையுமானால் அது அந்த வட்டத்தின் **நாண்** என அழைக்கப்படுகிறது.

4-Geometry_TM.indd 170 26-12-2019 12:36:59

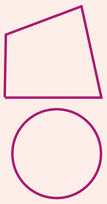


படம் 4.44

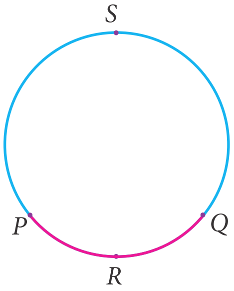
வட்ட மையத்தின் வழியே செல்லும் நாண் வட்டத்தின் **விட்டம்** என அழைக்கப்படுகிறது. வட்டத்தின் **பரிதி** என்பது அதன் எல்லையாகும். (பலகோணங்களில் இதற்கு நாம் சுற்றளவு என்ற சொல்லைப் பயன்படுத்துகிறோம்).

குறிப்பு

ஒரு வட்டமானது பலகோணத்திலிருந்து வேறுபடுகிறது. ஒரு பலகோணம் (எடுத்துக்காட்டாக நாற்கரம்) பக்கங்கள் மற்றும் முனைகளை உடையது. அதே நேரத்தில் வட்டமானது எளிய சீரான வளைவரையாகும்.



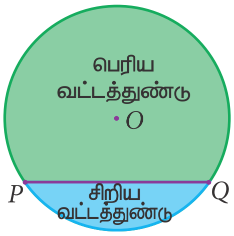
படம் 4.44 இல் வட்டத்தின் மேல் இரு புள்ளிகளை அந்தக் கோட்டுத்துண்டுகள் சந்திப்பதைக் காணலாம். இந்தக் கோட்டுத்துண்டுகளை வட்டத்தின் நாண்கள் என அழைக்கின்றோம். இதுபோல வட்டத்தின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு, அந்த வட்டத்தின் நாண் என அழைக்கப்படுகிறது. படத்தில் AB, PQ மற்றும் RS என்பன வட்டத்தின் நாண்கள் ஆகும்.



படம் 4.45

இப்பொழுது அதே வட்டத்தின் மேல் P, R, Q மற்றும் S (படம் 4.45) என்ற நான்கு புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இங்கு PRQ மற்றும் QSP என்பன வட்டத்தின் தொடர்ச்சியான பகுதிகள் ஆகும். இந்தப் பகுதிகளை $\overparen{PRQ}$ மற்றும் $\overparen{QSP}$ அல்லது சுருக்கமாக $\overparen{PQ}$ மற்றும் $\overparen{QP}$ எனக் குறிக்கலாம். வட்டத்தின் தொடர்ச்சியான இந்தப் பகுதியானது **வட்டவில்** என அழைக்கப்படுகிறது. பொதுவாக, விற்கள் கடிகார எதிர்த் திசையில் குறிக்கப்படுகிறது.

புள்ளிகள் P மற்றும் Q (படம் 4.45) ஆகியன முழு வட்டத்தை இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன. ஒன்று நீளம் அதிகமானது மற்றொன்று நீளம் குறைவானது. நீளம் அதிகமானது **பெரிய வில்** $\overparen{QP}$ மற்றும் நீளம் குறைவானது **சிறிய வில்** $\overparen{PQ}$ என அழைக்கப்படுகிறது.



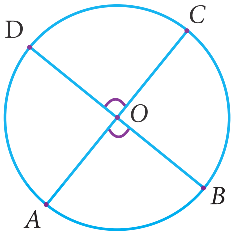
படம் 4.46

குறிப்பு

ஒரு வட்டத்தின் விட்டமானது,

- வட்டத்தை இருசமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் ஒரு கோட்டுத்துண்டு.
- வட்டத்தின் மிக நீளமான நாண்.
- வட்டத்தின் ஒரு சமச்சீர் கோடு.
- ஆரத்தைப் போல இருமடங்கு நீளமுடையது.

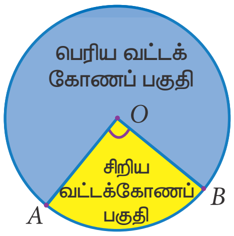
இப்பொழுது படம் 4.46 இல் நாண் PQ மற்றும் பெரிய வில் $\overparen{QP}$ ஆல் அடைபட்ட பகுதியைக் கருதினால், அது பெரிய வட்டத்துண்டு என அழைக்கப்படும். இதேபோல், அதே நாண் மற்றும் சிறிய வில்லால் அடைபட்ட பகுதி சிறிய வட்டத்துண்டு எனவும் அழைக்கப்படும்.



படம் 4.47

வட்டத்தின் இரண்டு வில்கள் $\overparen{AB}$ மற்றும் $\overparen{CD}$ (படம் 4.47) ஆனது வட்ட மையத்தில் சமகோணங்களைத் தாங்கும் எனில், அவை ஒருங்கிசைவு வில்கள் எனப்படும். மேலும் அவற்றை, $\overparen{AB} \equiv \overparen{CD}$ என எழுதலாம். இதிலிருந்து,

$m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$ ஆகும். அதனால், $\angle AOB = \angle COD$



படம் 4.48

இங்கு, படம் 4.48இல் இரண்டு ஆரங்கள் மற்றும் வில்லால் அடைபடும் பகுதியை வட்டக்கோணப் பகுதி எனலாம். வட்டத் துண்டைப் போலவே, சிறிய வில்லானது சிறிய வட்டக்கோணப் பகுதியையும், பெரிய வில்லானது பெரிய வட்டக்கோணப் பகுதியையும் குறிப்பதைக் காணலாம்.

பொது மைய வட்டங்கள் (Concentric Circles)

ஒரே மையத்தையும் வெவ்வேறு ஆரங்களையும் உடைய வட்டங்கள் பொது மைய வட்டங்கள் எனப்படும். அன்றாட வாழ்வில் நாம் காணும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

ஒரு வில்வித்தை இலக்கு

ஒரு சுண்டாட்ட வில்லை

நீர் அலைகள்

படம் 4.49

சர்வசம வட்டங்கள் (Congruent Circles)

இரண்டு வட்டங்கள் சர்வசமம் எனில், ஒன்று மற்றொன்றின் நகலாக இருக்கும் அல்லது ஒன்றுபோல் இருக்கும். அதாவது, அவை ஒரே அளவுடையவை. அன்றாட வாழ்வில் நாம் காணும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

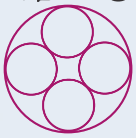
ஒரே மாட்டு வண்டியின் இரு சக்கரங்கள்

ஒலிம்பிக் வளையங்கள்

படம் 4.50

சிந்தனைக் களம்

படத்தில் உள்ளதுபோல், நான்கு சர்வசம வட்டங்கள் வரைக. நீங்கள் அறிவது என்ன?



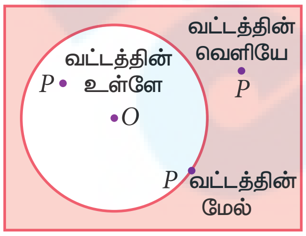
வட்டத்தைப் பொறுத்து ஒரு புள்ளி அமையும் நிலை (Position of a point with respect to a circle)

ஒரு தளத்தில் ஒரு வட்டத்தை எடுத்துக்கொண்டு (படம் 4.51) வட்டம் அமைந்துள்ள தளத்தில் புள்ளி P ஐக் கருதுக. வட்ட மையம் O விலிருந்து புள்ளி Pக்கு உள்ள தூரம் OP எனில், P இன் அமைவிடமானது,

(v) $OP =$ ஆரம் (புள்ளி P, வட்டத்தின் மேல் உள்ளது.)

(vi) $OP <$ ஆரம் (புள்ளிP, வட்டத்தின் உள்ளே உள்ளது.)

(vii) $OP >$ ஆரம் (புள்ளி P, வட்டத்தின் வெளியே உள்ளது.)



படம் 4.51

4-Geometry_TM.indd 172 26-12-2019 12:37:00

எனவே, ஒரு வட்டமானது அது அமைந்திருக்கும் தளத்தை மூன்று பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

சரியா? தவறா? எனக் கூறுக:

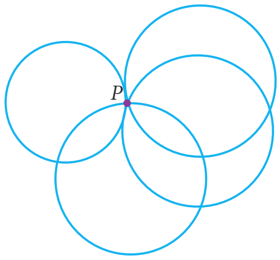
1. ஒவ்வொரு வட்ட நாணும் சரியாக வட்டத்தின் இரு புள்ளிகளைக் கொண்டிருக்கும்.
2. வட்டத்தின் அனைத்து ஆரங்களும் ஒரே நீளமுடையவை.
3. வட்டத்தின் ஒவ்வோர் ஆரமும் ஒரு நாணாகும்.
4. வட்டத்தின் ஒவ்வொரு நாணும் ஒரு விட்டமாகும்.
5. வட்டத்தின் ஒவ்வொரு விட்டமும் ஒரு நாணாகும்.
6. ஒரு வட்டத்திற்கு எத்தனை விட்டங்கள் வேண்டுமானாலும் இருக்க இயலும்.
7. இரு விட்டங்கள் ஒரே முனைப் புள்ளிகளைப் பெற்றிருக்க முடியாது.
8. ஒரு வட்டமானது தளத்தை மூன்று வெவ்வேறு பகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது.
9. ஒரு வட்டத்தை ஒரு பெரிய வட்ட வில், ஒரு சிறிய வட்ட வில் எனப் பிரிக்கலாம்.
10. வட்ட மையத்திலிருந்து பரிதிக்கு உள்ள தொலைவு விட்டம் ஆகும்.

சிந்தனைக் களம்

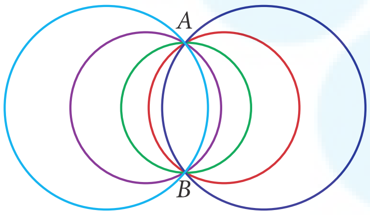
1. ஒரு வட்டத்திற்கு எத்தனை பக்கங்கள் உள்ளன?
2. வட்டம் ஒரு பலகோணமா?

4.4.1 மூன்று புள்ளிகள் வழியே செல்லும் வட்டம் (Circle Through Three Points)

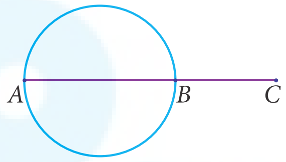
இரு புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு கோடுதான் வரைய முடியும் என்பதை நாம் முன்பே கற்றுள்ளோம். இதுபோன்று ஒரு புள்ளி மற்றும் இரண்டு புள்ளிகள் வழியே எத்தனை வட்டங்கள் வரைய இயலும் என்பதை நாம் கற்க இருக்கின்றோம். கொடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளி P வழியேயும் (படம் 4.52) இரண்டு புள்ளிகள் A, B வழியேயும் (படம் 4.53) எண்ணற்ற வட்டங்கள் வரைய இயலும் என்பதை நம்மால் பார்க்க முடிகிறது.



படம் 4.52



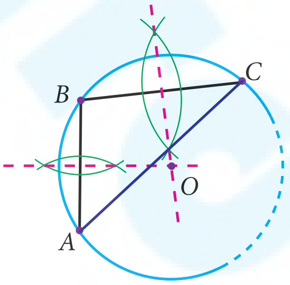
படம் 4.53



படம் 4.54

இப்பொழுது ஒரே கோட்டிலமையும் மூன்று புள்ளிகள் A, B மற்றும் C (படம் 4.54) ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இந்தப் புள்ளிகள் வழியே ஒரு வட்டம் வரைய நம்மால் இயலுமா? இதைச் சிந்திக்கும்பொழுது, புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன எனில் நம்மால் வட்டம் வரைய இயலாது !

மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டில் அமையாத புள்ளிகள் எனில், அவை ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்கும் (படம் 4.55). சுற்றுவட்டம் வரைதலை நினைவு கூர்ந்தால், பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது சுற்றுவட்ட மையம் எனவும் அந்த வட்டமானது



படம் 4.55

சுற்றுவட்டம் எனவும் அழைக்கப்படும்.

இதிலிருந்து A, B மற்றும் C வழியாக ஒரேயொரு வட்டம்தான் செல்கிறது என்பது தெளிவாகிறது. இந்தக் கூற்றானது பின்வரும் முடிவிற்கு அழைத்துச் செல்கிறது.

தேற்றம் 6 ஒரே கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு வட்டம்தான் வரைய இயலும்.

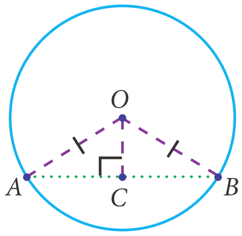
4.5 ஒரு வட்டத்தின் நாண்களின் பண்புகள் (Properties of Chords of a Circle)

கோடுகள், கோணங்கள், முக்கோணங்கள் மற்றும் நாற்கரங்களைப் பற்றி முன்பே அறிந்துள்ளோம். இவற்றுடன் வட்டம் என்ற புதிய கருத்தினை இணைத்துள்ளோம். இவற்றையெல்லாம் பயன்படுத்திச் சில நிரந்தர முடிவுகளை ஒன்றன் பின் ஒன்றாகப் பெற இருக்கின்றோம். இப்பொழுது நாம் வட்டத்தின் நாண்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு சில பண்புகளை அறிய இருக்கின்றோம்.

தொடக்கமாக, ஒரு நாண் மற்றும் மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் பண்பைக் காண இருக்கின்றோம்.

4.5.1 நாணிற்கு மையத்திலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து (Perpendicular from the Centre to a Chord)

O-வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் நாண் AB ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். $OC \perp AB$ வரைக மற்றும் OA, OBஐ இணைக்க. இங்கு முக்கோணங்கள் ΔAOC மற்றும் ΔBOC ஐ எளிதாகப் பெறுகின்றோம். (படம் 4.56).



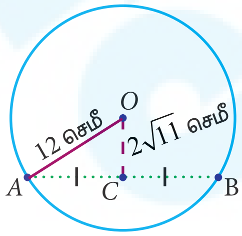
படம் 4.56

நம்மால் இந்த இரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமமானவை என மெய்ப்பிக்க இயலுமா? இப்பொழுது, முன்பே கற்றுள்ள சர்வ சம முக்கோணங்களுக்கான பண்புகளைப் பயன்படுத்தி இதனை நிறுவலாம். $\angle OCA = \angle OCB = 90^\circ (OC \perp AB)$ மற்றும் $OA = OB$ ஆனது வட்டத்தின் ஆரங்கள். பக்கம் OC பொதுவானது. செ–க–ப விதி நமக்குக் கூறுவது ΔAOC மற்றும் ΔBOC சர்வ சமமானவை. இதிலிருந்து நாம் அறிவது $AC = BC$. இந்த விவாதத்தின் மூலம் நாம் பின்வரும் முடிவைப் பெறுகிறோம்.

தேற்றம் 7 ஒரு வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து ஒரு நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து அந்த நாணை இருசமக் கூறிடும்.

தேற்றம் 7 இன் மறுதலை ஒரு வட்டத்தின் மையத்தையும் ஒரு நாணின் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு அந்த நாணிற்குச் செங்குத்தாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.5 ஆரம் 12 செமீ உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து $2\sqrt{11}$ செமீ தொலைவில் உள்ள நாணின் நீளம் காண்க.



படம் 4.57

தீர்வு நாண் AB மற்றும் AB இன் நடுப்புள்ளி C என்க.

ஆகையால், $OC \perp AB$,

OA மற்றும் OCயை இணைக்க. ஆரம் OA.

$OC = 2\sqrt{11}$ செமீ மற்றும் $OA = 12$செமீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

4-Geometry_TM.indd 174 26-12-2019 12:37:02

செங்கோண ΔOAC இல் பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

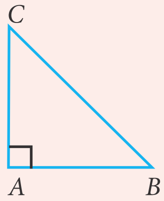
$$AC^2 = OA^2 - OC^2$$
$$= 12^2 - (2\sqrt{11})^2$$
$$= 144 - 44$$
$$= 100\text{செமீ}$$
$$AC^2 = 100\text{செமீ}$$
$$AC = 10\text{செமீ}$$

ஆகவே, நாண் AB இன் நீளம் $= 2AC$

$$= 2 \times 10\text{செமீ}$$
$$= 20\text{செமீ}$$

குறிப்பு

பிதாகரஸ் தேற்றம் : வடிவியலில் பிதாகரஸ் தேற்றம் மிக முக்கியமான மற்றும் நன்கு அறிந்த தேற்றங்களில் ஒன்றாகும். "ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணத்தின் வர்க்கமானது மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்." செங்கோண ΔABC இல் $BC^2 = AB^2 + AC^2$. இத்தேற்றத்தின் பயன்பாடு இந்த அலகில் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும்



எடுத்துக்காட்டு 4.6

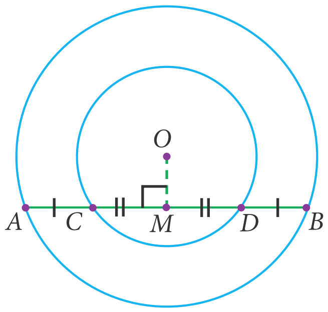
பொது மைய வட்டங்களில், வெளி வட்டத்தின் நாண் AB ஆனது உள் வட்டத்தைப் படத்தில் உள்ளவாறு C மற்றும் D இல் சந்திக்கின்றது எனில், $AB - CD = 2AC$ என நிறுவுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை : வெளி வட்டத்தின் நாண் AB ஆனது உள் வட்டத்தை C மற்றும் Dஇல் சந்திக்கின்றது.

நிறுவ வேண்டியது : $AB - CD = 2AC$

அமைப்பு : $OM \perp AB$ வரைக

மெய்ப்பித்தல் : இங்கு, $OM \perp AB$



படம் 4.58

மேலும், $OM \perp CD$

ஆகவே, $AM = MB$ ... (1)

(ஏனெனில், மையத்திலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்து நாணை இருசமக் கூறிடும்)

$CM = MD$ ... (2)

இப்பொழுது, $AB - CD = 2AM - 2CM$

$= 2(AM - CM)$ (1) மற்றும் (2) இலிருந்து

$AB - CD = 2AC$

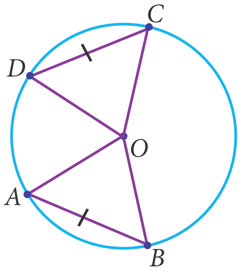
முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. வட்டத்தின் ஆரம் 25செமீ மற்றும் ஒரு நாணின் நீளம் 40 செமீ எனில் வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரம் காண்க.
2. PQ=4 செமீ உள்ளவாறு புள்ளிகள் P மற்றும் Q இன் வழியே மூன்று வட்டங்கள் வரைக.

4-Geometry_TM.indd 175 26-12-2019 12:37:02

4.5.2 நாண் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் (Angle Subtended by Chord at the Centre)

ஒரு நாணிற்குப் பதிலாக நாம் இரு சமமான நாண்களை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது நாம் மற்றொரு பண்பை விவாதிக்க இருக்கின்றோம்.



படம் 4.59

Oவை மையமாக உடைய வட்டத்தில் இரண்டு சமமான நாண்களை எடுத்துக்கொள்வோம். நாணின் முனைகளை மையத்துடன் இணைத்து, நாம் முக்கோணங்கள் ΔAOB மற்றும் ΔOCD ஐ பெறுகின்றோம். இதில் நாண் AB = நாண் CD (ஏனெனில் கொடுக்கப்பட்ட நாண்கள் சமமானவை). மற்ற பக்கங்கள் ஆரங்கள், எனவே $OA=OC$ மற்றும் $OB=OD$. ப–ப–ப (SSS) விதிப்படி முக்கோணங்கள் சர்வசமமானவை. அதாவது $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$. இதிலிருந்து, $m\angle AOB = m\angle COD$. இது பின்வரும் முடிவிற்கு அழைத்துச் செல்கிறது.

AKUUK7

தேற்றம் 8 வட்டத்தின் சமநாண்கள் வட்ட மையத்தில் சமகோணங்களைத் தாங்கும்.

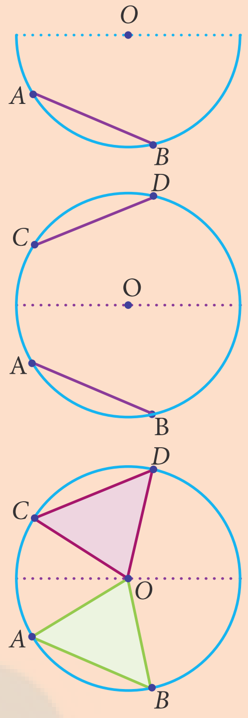
செயல்பாடு - 5

வழிமுறை

1. O ஐ மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஆரத்தில் ஒரு வட்டம் வரைந்து, அதை வெட்டி எடுக்கவும்.
2. அதை மடித்து அரை வட்டம் உருவாக்குக. அதன் மேல் புள்ளிகள் A, B ஐ குறிக்கவும்.
3. அரை வட்டத்தில் AB இன் வழியே மடித்து, பின்பு பிரிக்கவும்.
4. நாம் மற்றோர் அரை வட்டத்தில், மேலும் ஒரு மடிப்பு கோட்டுத்துண்டைப் பெறுகின்றோம். அதை CD எனப் பெயரிடுவோம் $(AB = CD)$.
5. ஆரங்களை இணைத்து ΔOAB மற்றும் ΔOCD ஐ பெறுக.
6. படியெடுக்கும் (Trace) தாளைப் பயன்படுத்தி, ΔOAB மற்றும் ΔOCD ஐப் படியெடுக்கவும்.
7. இந்த முக்கோணங்கள் ΔOAB மற்றும் ΔOCD ஐ ஒன்றின்மீது மற்றொன்றை வைக்கவும்.

உற்று நோக்குதல்

1. நீங்கள் அறிவது என்ன? $\Delta OAB \equiv \Delta OCD$ என்பது சரியா?
2. வட்ட மையம் O இலிருந்து நாண்கள் AB மற்றும் CD –க்குச் செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரத்தை அளக்க?

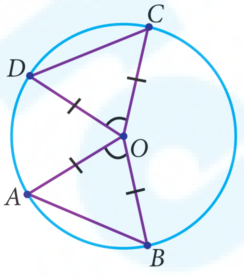


படம் 4.60

இப்பொழுது வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும் நாண்கள் AB மற்றும் CD இன் நீளங்களைக் காண்போம். அதாவது $\angle AOB = \angle COD$ மேலும் இக் கோணங்களை உள்ளடக்கிய ΔAOB மற்றும் ΔCOD இன் பக்கங்கள் ஆரங்களாகும்.

ப–கோ–ப (SAS) விதிப்படி, $\Delta AOB \equiv \Delta COD$.

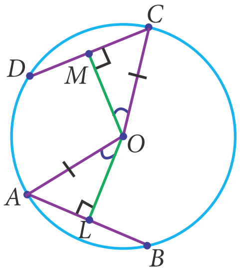
இதிலிருந்து நாண் AB = நாண் CD. இப்பொழுது நாம் மறுதலை முடிவைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்:



படம் 4.61

4-Geometry_TM.indd 176 26-12-2019 12:37:04

தேற்றம் 8 இன் மறுதலை வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும் இரு நாண்கள் எப்பொழுதும் சம நீளமுள்ளவை.



படம் 4.62

இதே வழியில் சம நாண்கள் கொடுக்கப்படும்பொழுது, மையத்திலிருந்து அவற்றின் தொலைவினை விவாதிக்க இருக்கின்றோம். $OL \perp AB$ மற்றும் $OM \perp CD$ வரைக. தேற்றம் (7)இலிருந்து, இந்தச் செங்குத்துக்கோடுகள் நாண்களைச் சமமாகப் பிரிக்கும். ஆகவே, $AL = CM$. ΔOAL மற்றும் ΔOCM ஐ ஒப்பிடும்பொழுது, கோணங்கள் $\angle OLA = \angle OMC = 90^\circ$ மற்றும் $OA = OC$ ஆரங்கள் ஆகும். செ–க–ப (RHS) விதிப்படி, $\Delta OAL \equiv \Delta OCM$. மையத்திலிருந்து உள்ள தொலைவு $OL = OM$ ஆகும். மேலும் முடிவைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

தேற்றம் 9 வட்டத்தின் சம நாண்கள் வட்ட மையத்தில் இருந்து சம தொலைவில் இருக்கும்.

தேற்றம் 9 இன் மறுதலையும் கணக்குகளைத் தீர்க்க மிகவும் பயனுள்ளதாக இருப்பதால் அதையும் அறிவோம்.

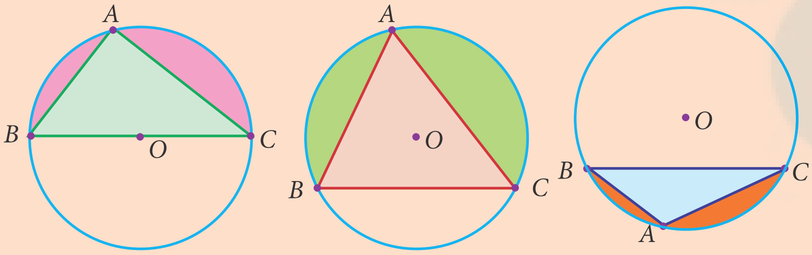
தேற்றம் 9 இன் மறுதலை வட்ட மையத்திலிருந்து சம தொலைவில் உள்ள நாண்கள் சம நீளமுள்ளவை.

4.5.3 ஒரு வட்டவில் தாங்கும் கோணம் (Angle Subtended by an Arc of a Circle)

செயல்பாடு - 6

வழிமுறை :

1. O ஐ மையமாகக் கொண்டு வெவ்வேறு ஆர அளவுகளுடைய மூன்று வட்டங்களை வரைபடத்தாளில் வரைக.
2. இந்த வட்டங்களில் இருந்து அரைவட்டம், ஒரு சிறிய வட்டத்துண்டு மற்றும் ஒரு பெரிய வட்டத்துண்டுகளை வெட்டி எடுக்க.
3. அவற்றின் மேல் மூன்று புள்ளிகளைக் குறித்து அவற்றிற்கு A, B மற்றும் C எனப் பெயரிடுக.



படம் 4.63

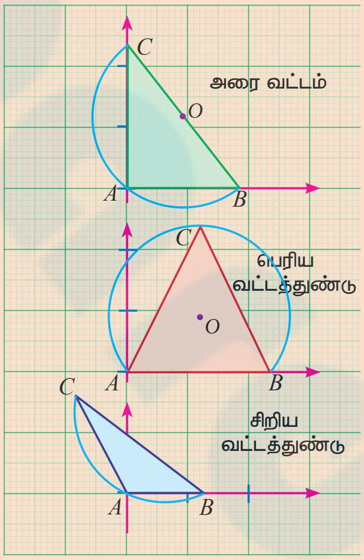
4. முக்கோணங்களை வெட்டி எடுத்துப் படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் புள்ளி A ஆனது ஆதிப்புள்ளியில் பொருந்துமாறு வரைபடத்தாளில் ஒட்டுக.

உற்றுநோக்குதல் :

(i) அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் ____________

(ii) பெரிய வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணம் _______

(iii) சிறிய வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணம் _________



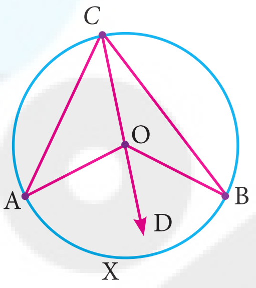
படம் 4.64

4-Geometry_TM.indd 177 26-12-2019 12:37:05

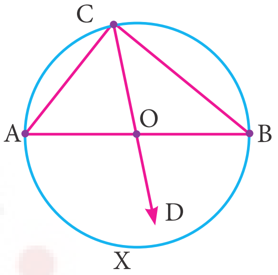
இப்பொழுது ஒரு வில்லானது வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணத்திற்கும், வட்டப் பரிதியில் தாங்கும் கோணத்திற்கும் இடையேயுள்ள உறவைக் காண இருக்கின்றோம்.

4.5.4 மையம் மற்றும் பரிதியில் அமையும் கோணங்கள் (Angle at the Centre and the Circumference)

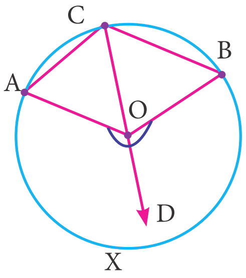
O வை மையமாகக் கொண்ட ஏதேனும் ஒரு வட்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது புள்ளிகள் A, B மற்றும் C ஐ வட்டப் பரிதியில் குறிக்க.



படம் 4.65



படம் 4.66



படம் 4.67

இங்கு வில் $\overset{\frown}{AB}$ ஆனது சிறிய வில் (படம் 4.65), அரைவட்டம் (படம் 4.66) மற்றும் பெரிய வில் (படம் 4.67) என அமையும். மேலும் புள்ளி C ஆனது வில்களைப் பொறுத்து (படம் 4.65 முதல் 4.67 வரை) வெவ்வேறு வகையான கோணங்களைப் பெறும். மேலேயுள்ள அனைத்து வட்டங்களிலும் வில் $\overset{\frown}{AXB}$ மையத்தில் தாங்கும் கோணம் $\angle AOB$ ஆகும். மேலும் $\angle ACB$ ஆனது பரிதியில் தாங்கும் கோணம் ஆகும்.

நாம் மெய்ப்பிக்க வேண்டியது $\angle AOB = 2\angle ACB$.

இதற்காக, COவை D இக்கு நீட்டுக. மேலும் CD ஐ இணைக்க.

$\angle OCA = \angle OAC$ ஏனெனில், ($OA = OC$ ஆரங்கள்)

வெளிக் கோணம் = உள்ளெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதல்.

$$\angle AOD = \angle OAC + \angle OCA$$
$$= 2\angle OCA \quad .... (1)$$

இதேபோல்,

$$\angle BOD = \angle OBC + \angle OCB$$
$$= 2\angle OCB \quad .... (2)$$

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து,

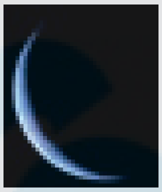
$$\angle AOD + \angle BOD = 2(\angle OCA + \angle OCB)$$

இறுதியாக நாம் அடையும் முடிவு $\angle AOB = 2\angle ACB$.

இதிலிருந்து பின்வரும் முடிவைப் பெறுகின்றோம்:

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. வேறுபட்ட அளவுள்ள வளையல்களின் எல்லைகளை வரைந்து அவை ஒவ்வொன்றின் மையத்தையும் மூலை மட்டங்களின் உதவியுடன் காண முயற்சி செய்க.
2. அளவுகோல் மற்றும் கவராயத்தைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட பிறை நிலவை நகலெடுத்து முழு நிலவாக மாற்றுக.


படம் 4.68

தேற்றம் 10

ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இருமடங்காகும்.

4-Geometry_TM.indd 178 26-12-2019 12:37:07

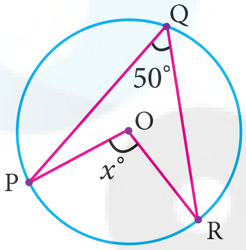
குறிப்பு

- அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் செங்கோணம்.
- வட்டத்தின் சம வில்கள் சமக் கோணங்களைத் தாங்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.7

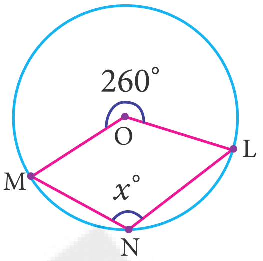
கீழ்க்காணும் படங்களில் x° இன் மதிப்பைக் காண்க.

(i)



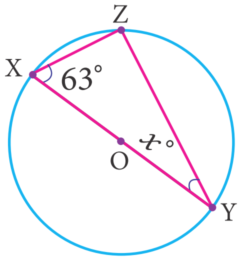
படம் 4.69

(ii)



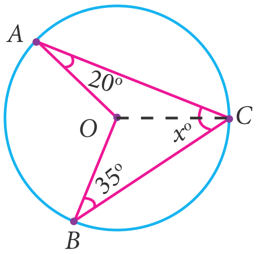
படம் 4.70

(iii)



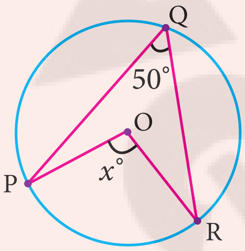
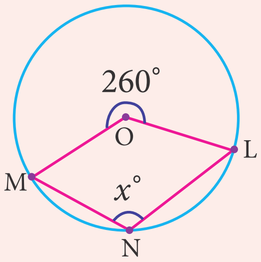
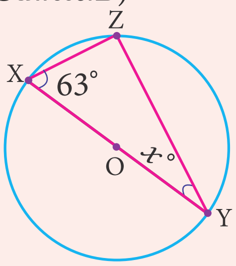
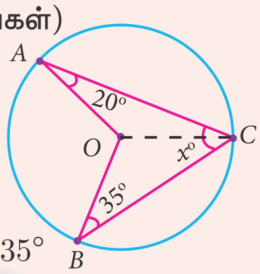
படம் 4.71

(iv)



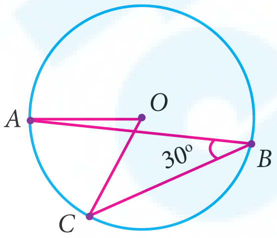
படம் 4.72

தீர்வு ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும் என்ற தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

(i) $\angle POR = 2\angle PQR$ $x^\circ = 2 \times 50^\circ$ $x^\circ = 100^\circ$ 	(ii) $\angle MNL = \frac{1}{2}$ பின்வளை $\angle MOL$ $= \frac{1}{2} \times 260^\circ$ $x^\circ = 130^\circ$ 
(iii) XY ஆனது வட்டத்தின் விட்டம். எனவே, $\angle XZY = 90^\circ$ (அரை வட்டத்தில் அமையும் கோணம்) ΔXYZ இல் $x^\circ + 63^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ $x^\circ = 27^\circ$ 	(iv) $OA = OB = OC$ (ஆரங்கள்) ΔOAC இல், $\angle OAC = \angle OCA = 20^\circ$ ΔOBC இல், $\angle OBC = \angle OCB = 35^\circ$ (சமமான பக்கங்களுக்கு எதிரேயுள்ள கோணங்கள் சமம்) $\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB$ $x^\circ = 20^\circ + 35^\circ$ $x^\circ = 55^\circ$ 

எடுத்துக்காட்டு 4.8

படத்தில் (படம் 4.73) வட்ட மையம் O மற்றும் $\angle ABC = 30^\circ$ எனில், $\angle AOC$ ஐக் காண்க.



படம் 4.73

தீர்வு

$\angle ABC = 30^\circ$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

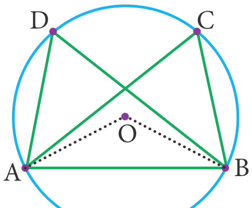
4-Geometry_TM.indd 179 26-12-2019 12:37:09

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2 \times 30° = 60°$$

(ஏனெனில், வட்டத்தின் ஒரு வில்லானது மையத்தில் தாங்கும் கோணம் மீதிப் பரிதியில் தாங்கும் கோணத்தின் இருமடங்காகும்)

இப்பொழுது, நாம் மற்றொரு சிறப்பான தேற்றத்தைப் பார்க்கலாம். சிறிய வில்லானது விரிகோணத்தையும், பெரிய வில்லானது குறுங்கோணத்தையும் மற்றும் அரை வட்டமானது செங்கோணத்தையும் பரிதியில் தாங்கும் என்பதைக் கற்றிருக்கிறோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள நாண் AB, மேலும் புள்ளிகள் C மற்றும் D ஆகியவை வட்டப் பரிதியின் வெவ்வேறு இடங்களில் உள்ள புள்ளிகள் என்போம். நாம், $\angle ACB$ மற்றும் $\angle ADB$ ஐக் காண்போம். இந்தக் கோண அளவுகளுக்கிடையே ஏதேனும் வேறுபாடு உள்ளதா?

4.5.5 ஒரே வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணங்கள் (Angles in the same Segment of a Circle)



படம் 4.74

O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் வட்டத்துண்டு AB ஐ எடுத்துக்கொள்க. புள்ளிகள் C மற்றும் D ஆனது வட்டப் பரிதியின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும். ஆரங்கள் OA மற்றும் OB ஐ இணைக்க.

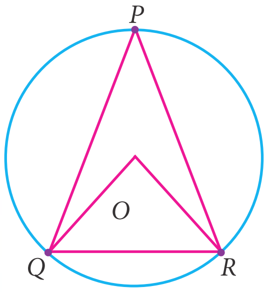
$$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB \quad \text{(தேற்றம் 10 இலிருந்து)}$$

மற்றும் $$\frac{1}{2}\angle AOB = \angle ADB \quad \text{(தேற்றம் 10 இலிருந்து,)}$$

$$\angle ACB = \angle ADB$$

இந்த முடிவானது புதிய தேற்றத்தைத் தருவிக்கின்றது.

தேற்றம் 11 ஒரே வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணங்கள் சமம்.



படம் 4.75

எடுத்துக்காட்டு 4.9 கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் O ஆனது வட்டமையம், $\angle OQR = 48°$ எனில், $\angle P$ இன் அளவு என்ன?

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டவை $\angle OQR = 48°$.

எனவே, $\angle ORQ$ இன் அளவும் $48°$ (ஏன்?____________)

$$\angle QOR = 180° - (2 \times 48°) = 84°.$$

நாண் QR ஆனது மையத்தில் உருவாக்கும் கோணம் மீதிப் பரிதியில் உருவாக்கும் கோணத்தைப் போல் இருமடங்காகும்.

எனவே, $\angle QPR = \frac{1}{2} \times 84° = 42°$.

பயிற்சி 4.3

1. வட்டத்தின் விட்டம் 52 செமீ மற்றும் ஒரு நாணின் நீளம் 20 செமீ எனில், மையத்திலிருந்து நாணிற்கு உள்ள தூரம் காண்க.
2. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 8 செமீ தொலைவில் 30 செமீ நீளமுள்ள நாண் வரையப்பட்டுள்ளது எனில், வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

4-Geometry_TM.indd 180 26-12-2019 12:37:11

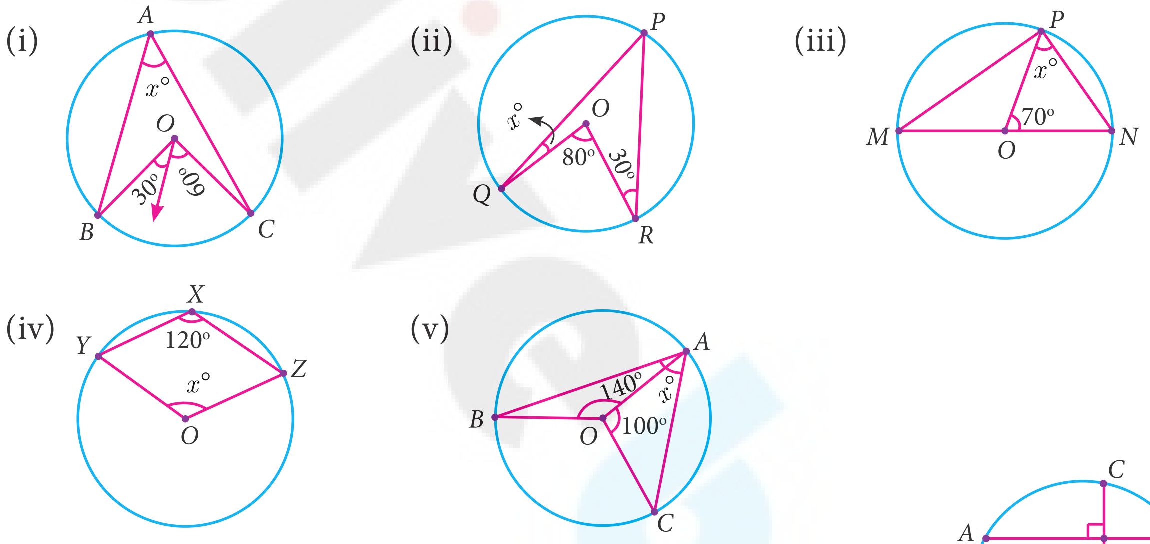
3. ஆரம் $4\sqrt{2}$ செமீ உள்ள வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்ற ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தான விட்டங்கள் வரையப்பட்டுள்ளன எனில், நாண் ACஇன் நீளம் காண்க. மேலும், $\angle OAC$ மற்றும் $\angle OCA$ காண்க.

4. ஆரம் 15 செமீ உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 12 செமீ தொலைவில் அமைந்துள்ள நாணின் நீளம் காண்க.

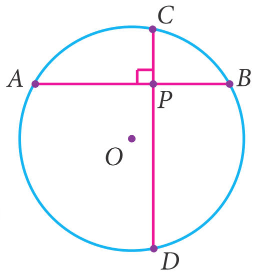
5. Oஐ மையமாக உடைய வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்பன இரு இணையான நாண்கள் ஆகும். மேலும் ஆரம் 10 செமீ, $AB = 16$ செமீ மற்றும் $CD = 12$ செமீ எனில், இரு நாண்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவைத் தீர்மானிக்க.

6. 5 செமீ மற்றும் 3 செமீ ஆரமுள்ள இரு வட்டங்கள், இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன. மேலும், அவற்றின் மையங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 4 செமீ எனில், பொது நாணின் நீளத்தைக் காண்க.

7. பின்வரும் படங்களில் x° இன் மதிப்பைக் காண்க.

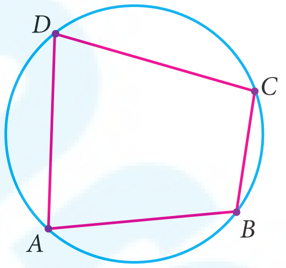


8. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில், $\angle CAB = 25^\circ$ எனில், $\angle BDC$, $\angle DBA$ மற்றும் $\angle COB$ காண்க.



4.6 வட்ட நாற்கரங்கள் (Cyclic Quadrilaterals)

இங்கு வட்ட நாற்கரம் என்ற சிறப்பு நாற்கரத்தையும் அதன் பண்புகளையும் பற்றி அறிந்துகொள்ளலாம். நாற்கரத்தின் நான்கு முனைகளும் வட்டத்தின் பரிதியைத் தொட்டுக் கொண்டு இருக்குமேயானால் அந்த நாற்கரம் வட்ட நாற்கரமாகும். இப்பொழுது வட்ட நாற்கரத்தின் சிறப்புப் பண்புகளைக் காணலாம்.



படம் 4.76

அனைத்து முனைகளும் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ளவாறு நாற்கரம் $ABCD$ஐ எடுத்துக்கொள்க. நாம் இப்பொழுது எதிரெதிர்க் கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் என மெய்ப்பிக்க வேண்டியுள்ளது. ஒவ்வொரு முனையையும் வட்டமையம் O உடன் இணைக்கவும். OA, OB, OC மற்றும் OD என்பன ஆரங்கள் ஆகும். இவற்றிலிருந்து நான்கு இருசமபக்க முக்கோணங்கள் OAB, OBC, OCD மற்றும் ODA ஆகியவற்றைக் காண்கிறோம். வட்டமையம் O வைச் சுற்றியுள்ள கோணங்களின் கூடுதல் 360°

4-Geometry_TM.indd 181 26-12-2019 12:37:12

. ஒவ்வோர் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் கோணங்களின் கூடுதல் $180°$.

படத்திலிருந்து (படம் 4.77) நாம் பெறுவது,

$2\times(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4)$ + மையம் O இல் அமையும் கோணம்

$= 4\times 180°$

$2\times(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4) + 360° = 720°$

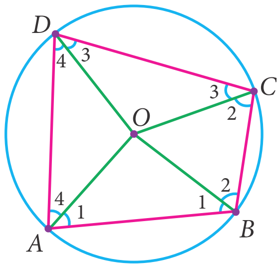
இதைச் சுருக்க, $(\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4) = 180°$.

இதிலிருந்து நாம் காண்பது,

(i) $(\angle 1+\angle 2) + (\angle 3+\angle 4) = 180°$ (எதிர்கோணங்கள் B மற்றும் D இன் கூடுதல்)

(ii) $(\angle 1+\angle 4) + (\angle 2+\angle 3) = 180°$ (எதிர்கோணங்கள் A மற்றும் C இன் கூடுதல்)

இப்பொழுது முடிவுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:



படம் 4.77

தேற்றம் 12 வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் ஆகும்.

தேற்றம் 12இன் மறுதலையும் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருப்பதால் அதையும் காண்போம்.

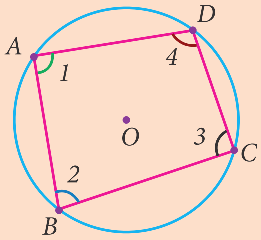
தேற்றம் 12 இன் மறுதலை ஒரு நாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்க்கோணங்கள் மிகைநிரப்புக் கோணங்கள் எனில் அந்த நாற்கரம் வட்ட நாற்கரமாகும்.

ALDLNH

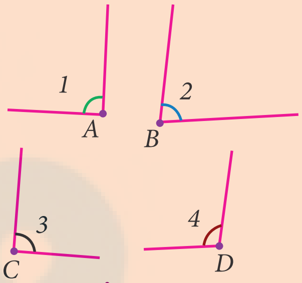
செயல்பாடு - 7

வழிமுறை

9. O வை மையமாகக் கொண்டு ஏதேனும் ஓர் ஆரத்தில் வட்டம் வரைக..
10. புள்ளிகள் A, B, C மற்றும் D ஐ அதன் எல்லைகளில் குறித்து வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ ஐ வரைக. அதன் கோணங்களுக்குப் படம் 4.78இல் உள்ளது போல் பெயரிடுக.
11. படி எடுக்கும் காகிதத்தைப் பயன்படுத்தி வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ ஐப் படியெடுக்க.
12. படம் 4.79 இல் காட்டியுள்ளவாறு கோணங்கள் A, B, C மற்றும் D ஐ வெட்டி எடுக்க
13. கோணங்கள் $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ மற்றும் $\angle 4$ ஐக் கோணங்கள் A, B, C மற்றும் D இன் அடுத்துள்ள கோணங்களாக அமையும்படி படம் 4.80 இல் காட்டியுள்ளவாறு ஒட்டுக.
14. கோணங்கள் $\angle 1+\angle 3$ மற்றும் $\angle 2+\angle 4$ ஆகியவற்றின் மதிப்பு காண்க.



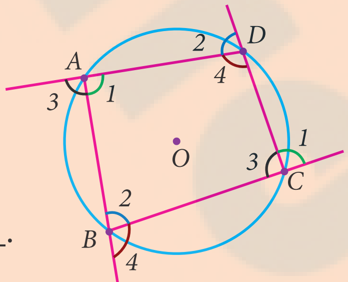
படம் 4.78



படம் 4.79

உற்றுநோக்கிக் கீழ்க்காண்பனவற்றை நிரப்புக:

1. (i) $\angle A+\angle C =$ _____ (ii) $\angle B+\angle D =$ _____
   (iii) $\angle C+\angle A =$ _____ (iv) $\angle D+\angle B =$ _____
2. வட்ட நாற்கரத்தின் எதிரெதிர்க் கோணங்களின் கூடுதல் ________.
3. ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் ________.



படம் 4.80

4-Geometry_TM.indd 182 26-12-2019 12:37:14

எடுத்துக்காட்டு 4.10 வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ இல் $\angle PSR = 70^\circ$ மற்றும் $\angle QPR = 40^\circ$ எனில், $\angle PRQ$ ஐக் காண்க (படம் 4.81 ஐப் பார்க்க).

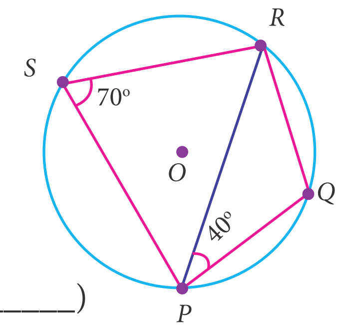
தீர்வு வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ இல் $\angle PSR = 70^\circ$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$\angle PSR + \angle PQR = 180^\circ$ (காரணம் கூறுக______)

$70^\circ + \angle PQR = 180^\circ$

$\angle PQR = 180^\circ - 70^\circ$

$\angle PQR = 110^\circ$



படம் 4.81

ΔPQR இல் நாம் பெறுவது,

$\angle PQR + \angle PRQ + \angle QPR = 180^\circ$ (காரணம் கூறுக__________)

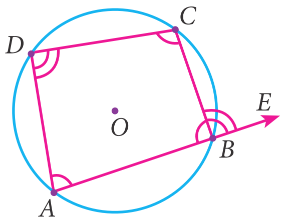
$110^\circ + \angle PRQ + 40^\circ = 180^\circ$

$\angle PRQ = 180^\circ - 150^\circ$

$\angle PRQ = 30^\circ$

ஒரு வட்ட நாற்கரத்தின் வெளிக்கோணம் (Exterior Angle of a Cyclic Quadrilateral)

ஒரு நாற்கரத்தின் வெளிக்கோணம் என்பது அதன் ஏதாவது ஒரு பக்கமும், அதனை அடுத்துள்ள பக்கத்தின் நீட்சியும் வெளியே உருவாக்கும் கோணம் ஆகும்.



படம் 4.82

வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் பக்கம் AB ஐ E வரை நீட்டுக. இங்கு, $\angle ABC$ மற்றும் $\angle CBE$ ஆகியன நேரிய கோணச் சோடிகள் ஆகும். இவற்றின் கூடுதல் 180° ஆகும். மேலும், $\angle ABC$ மற்றும் $\angle ADC$ ஆகியன வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள், இவற்றின் கூடுதலும் 180° ஆகும். இவற்றில் இருந்து நாம் பெறுவது, $\angle ABC + \angle CBE = \angle ABC + \angle ADC$ ஆகவே $\angle CBE = \angle ADC$. இதேபோல் மற்ற கோணங்களுக்கும் நிறுவலாம்.

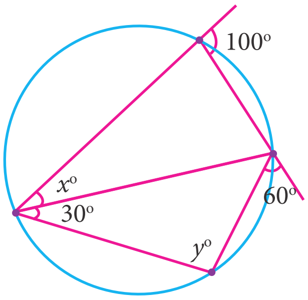
தேற்றம் 13 வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப்பதால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர்க் கோணத்திற்குச் சமம்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. ஒரு நாற்கரத்தின் ஒரு சோடி எதிர்க் கோணங்கள் மிகை நிரப்பிகள் எனில் அந்த நாற்கரம் _________ ஆகும்.
2. நாணின் நீளம் குறையும்பொழுது, மையத்திலிருந்து உள்ள தூரம் _________.
3. வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கம் நீட்டப்பட்டால் உண்டாகும் வெளிக் கோணமானது உள்ளெதிர் கோணத்திற்கு _________.
4. வட்ட நாற்கரத்தில் எதிர்க் கோணங்கள் _________.

4-Geometry_TM.indd 183 26-12-2019 12:37:16

எடுத்துக்காட்டு 4.11 கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் கோணங்கள் x° மற்றும் y° இன் மதிப்பைக் காண்க.



படம் 4.83

தீர்வு

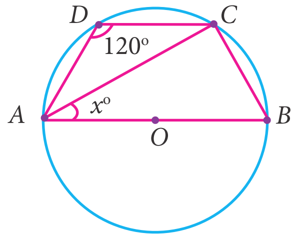
வட்ட நாற்கரத்தின் வெளிக் கோணங்களின் பண்பின்படி,

நாம் பெறுவது, $y^\circ = 100^\circ$ மேலும்,

$x^\circ + 30^\circ = 60^\circ$ ஆகையால், $x^\circ = 30^\circ$

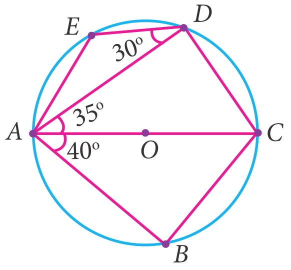
பயிற்சி 4.4

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் x° இன் மதிப்பு காண்க.

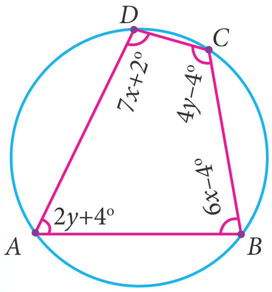


2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் விட்டம் AC. இங்கு, $\angle ADE = 30^\circ$; $\angle DAC = 35^\circ$ மற்றும் $\angle CAB = 40^\circ$ எனில்,

   (i) $\angle ACD$ (ii) $\angle ACB$ (iii) $\angle DAE$ காண்க.

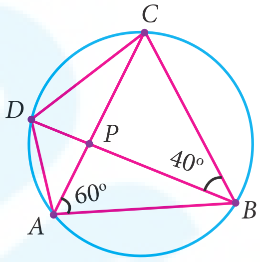


3. படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் அனைத்துக் கோணங்களையும் காண்க

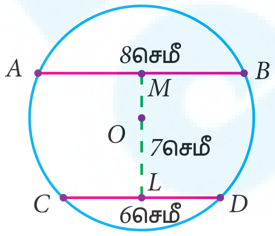


4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் விட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி P மேலும், $\angle DBC = 40^\circ$ மற்றும் $\angle BAC = 60^\circ$ எனில்,

   (i) $\angle CAD$ (ii) $\angle BCD$ காண்க.

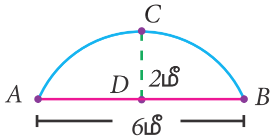


5. படத்தில் AB மற்றும் CD ஆனது O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் இரு இணையான நாண்கள். மேலும், $AB = 8$ செமீ, $CD = 6$ செமீ, $OM \perp AB$, $OL \perp CD$ இடைப்பட்ட தூரம் LM ஆனது 7 செமீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் காண்க?

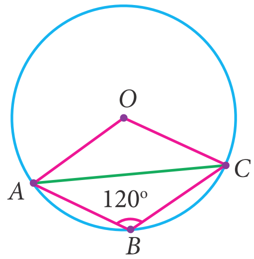


4-Geometry_TM.indd 184 26-12-2019 12:37:18

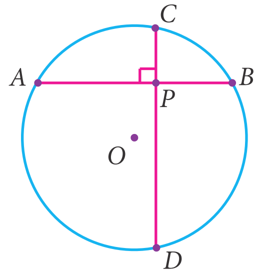
6. பாலத்தின் வளைவின் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு வளைவின் அகலம் 6 மீ மற்றும் வளைவின் அதிகளவு உயரம் 2 மீ எனில், வளைவை உள்ளடக்கிய வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?



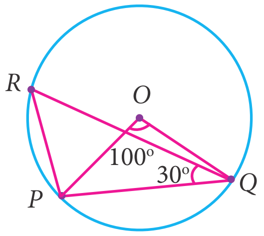
7. படத்தில் $\angle ABC = 120^0$, Oவை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் A, B மற்றும் C எனில் $\angle OAC$ காண்க.



8. ஒரு பள்ளியில் மரம் நடும் விழா நிகழ்ச்சி நடக்கிறது. இதற்காக ஆசிரியர் ஒன்பதாம் வகுப்பு மாணவர்கள் மரக்கன்று நடுவதற்காக 6 மீ ஆரமுள்ள மைதானத்தை ஒதுக்குகின்றார். நான்கு மாணவர்கள் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு A, B, C மற்றும் D என்ற புள்ளிகளில் மரக்கன்று நடுகின்றனர். இங்கு AB = 8 மீ, CD = 10 மீ $AB \perp CD$ மற்றொரு மாணவர் AB மற்றும் CD வெட்டும் புள்ளியான Pஇல் பூந்தொட்டியை வைக்கின்றார் எனில், மையத்திலிருந்து P இக்கு உள்ள தூரம் காண்க.



9. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில், $\angle POQ = 100^0$ மற்றும் $\angle PQR = 30^0$ எனில், $\angle RPO$ காண்க.



4.7 செய்முறை வடிவியல் (Practical Geometry)

செய்முறை வடிவியல் என்பது புள்ளிகள், நேர்க்கோடுகள், கோணங்கள் மற்றும் பிற உருவங்களின் பண்புகளைப் பற்றிய வடிவியல் விதிகளைப் பயன்படுத்தி வடிவியல் உருவங்களை வரையும் முறையாகும். வடிவியலில் வரைதல் (Construction) என்பது கோணங்கள், நேர்க்கோடுகள் மற்றும் உருவங்கள் ஆகியவற்றைத் துல்லியமாக வரைதலாகும். யுக்ளிட் என்பவர் தன் "கூறுகள்" ('Elements') என்ற நூலில் வடிவியலின் வரைபடங்களைப் பற்றித் தெளிவாகக் கூறியுள்ளார். எனவே, இவ்வரைபடங்கள் யுக்ளிடின் வரைபடங்கள் எனவும் அறியப்படுகின்றன. அளவுகோல் மற்றும் கவராயம் பயன்படுத்தி இவ்வரைபடங்கள் வரையப்படுகின்றன. கவராயம் சமதூரத்தையும், அளவுகோல் நேர்க்கோட்டில் புள்ளிகளை அமைக்கவும் உதவுகின்றன. அனைத்து வடிவியல் வரைதல்களும் இவ்விரு கருத்துகளின் அடிப்படையிலேயே அமைகின்றன.

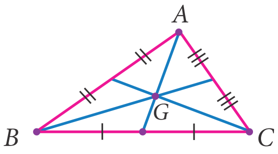
அளவுகோல் மற்றும் கவராயத்தைப் பயன்படுத்தி விகிதமுறு எண்கள் மற்றும் விகிதமுறா எண்களைக் குறிக்க இயலும் என்பதை நாம் மெய்யெண்கள் பகுதியில் கற்றோம். 1913இல் இந்தியக் கணிதமேதை இராமானுஜன் $355/113=\pi$ ஐக் குறிக்க ஒரு வடிவியல் முறையை அளித்தார். தற்போது துல்லியமான அளவுகளைக் கொண்டு வரையும் திறன்களைப் பயன்படுத்தி நேர்க்கோடுகளால் மலைக்குள்ளே செல்லும் சுரங்கப்பாதை அமைப்பை வரையமுடியும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. முந்தைய வகுப்புகளில் கோணங்கள் மற்றும் முக்கோணங்கள் வரைவது பற்றி நாம் கற்றுள்ளதை நினைவு கொள்வோம்.

இந்தப் பகுதியில் நாம் முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம், குத்துக்கோட்டு மையம், சுற்று வட்ட மையம் மற்றும் உள்வட்ட மையம் வரைதல் பற்றி ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடுகளைப் பயன்படுத்திக் கற்க இருக்கிறோம்.

4-Geometry_TM.indd 185 26-12-2019 12:37:19

4.7.5 முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் வரைதல்
(Construction of the Centroid of a Triangle)

நடுக்கோட்டு மையம் (Centroid)



படம் 4.84

முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி, அம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் எனப்படும். இது பொதுவாக G எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

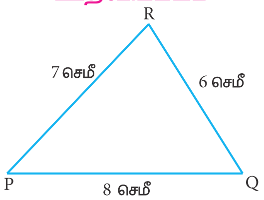
செயல்பாடு – 8

நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையப் புள்ளியைக் காணுதல்

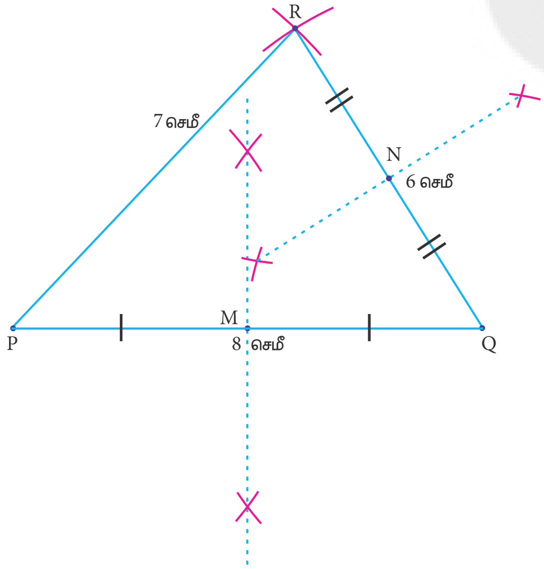
செய்முறை ஒரு காகிதத்தை மடித்து PQ என்ற கோட்டுத்துண்டை உருவாக்குவோம். P என்ற புள்ளி Q இன் மீது பொருந்துமாறு மீண்டும் காகிதத்தை மடிக்கும்போது இரண்டு கோட்டுத் துண்டுகளும் வெட்டும் புள்ளியை M எனக் குறிக்க. M என்பது PQ இன் மையப்புள்ளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.12 ΔPQR இன் நடுக்கோட்டு மையம் வரைக. அதன் பக்கங்கள் $PQ = 8$செமீ; $QR = 6$செமீ; $RP = 7$செமீ.

உதவிப்படம்

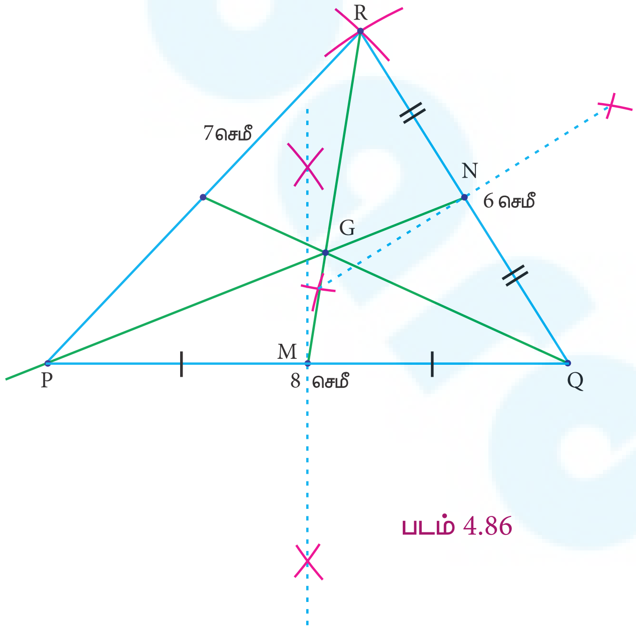


தீர்வு



படம் 4.85

படி 1 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகள் PQ=8செமீ, QR=6செமீ மற்றும் RP=7செமீ கொண்ட ΔPQR வரைக. ஏதேனும் இரு பக்கங்களுக்கு (PQ மற்றும் QR) மையக்குத்துக் கோடுகள் வரைந்து PQ இன் நடுப்புள்ளி M மற்றும் QR இன் நடுப்புள்ளி N ஐ குறிக்க.



படம் 4.86

படி 2 : நடுக்கோடுகள் PN மற்றும் RM வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளி G ஆகும். புள்ளி G ஆனது ΔPQR இன் நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

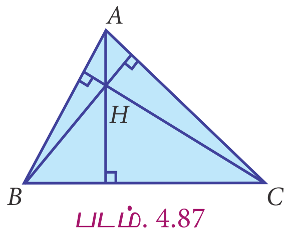
4-Geometry_TM.indd 186 26-12-2019 12:37:20

குறிப்பு

- ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று நடுக்கோடுகள் வரைய இயலும்.
- நடுக்கோட்டு மையமானது நடுக்கோடுகளை முனையிலிருந்து 2:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.
- அனைத்து வகை முக்கோணங்களுக்கும் நடுக்கோட்டு மையமானது முக்கோணத்தின் உள்ளேயே அமையும்.
- நடுக்கோட்டு மையமானது அந்த முக்கோணத்தின் புவிஈர்ப்பு மையம் (முக்கோணத்தை இந்தப் புள்ளியில் நிலையாகத் தாங்கி நிறுத்த முடியும்) அல்லது தாங்கு மையம் என அழைக்கப்படுகிறது.

4.7.6 முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டுமையம் வரைதல்

(Construction of the Orthocentre of a Triangle)



படம். 4.87

குத்துக்கோட்டுமையம் (Orthocentre)

ஒரு முக்கோணத்தின் **குத்துக்கோட்டுமையம்** என்பது அம்முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகளில் இருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியாகும். இது **செங்கோட்டுமையம்** எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. இதை H என்று குறிப்போம்.

செயல்பாடு 9

நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்திக் கோட்டுத்துண்டிற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து குத்துக் கோடு அமைத்தல்.

செய்முறை ஒரு தாளில் AB என்ற கோட்டுத்துண்டை வரைந்து அதற்கு மேல் பகுதியில் P என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். B என்ற புள்ளியை BA என்ற கோட்டுத்துண்டின் வழியே நகர்த்தி மடிப்பானது P என்ற புள்ளியைத் தொடும்போது தாளை மடிக்கக் கிடைக்கும் கோடு P என்ற புள்ளியிலிருந்து AB –க்குக் குத்துக்கோடு ஆகும்.

செயல்பாடு 10

நோக்கம் தாள் மடிப்பு முறையில் முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையத்தைக் கண்டறிதல்.

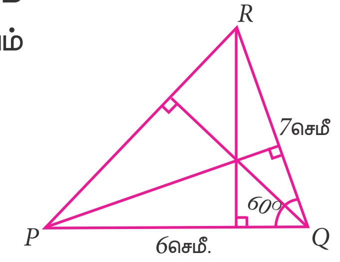
செய்முறை மேற்கண்ட செயல்பாட்டைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் எவையேனும் இரு முனைகளிலிருந்து அவற்றின் எதிர்ப்பக்கங்களுக்கு செங்குத்துக்கோடுகள் வரைக. செங்குத்துக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

4-Geometry_TM.indd 187 26-12-2019 12:37:21

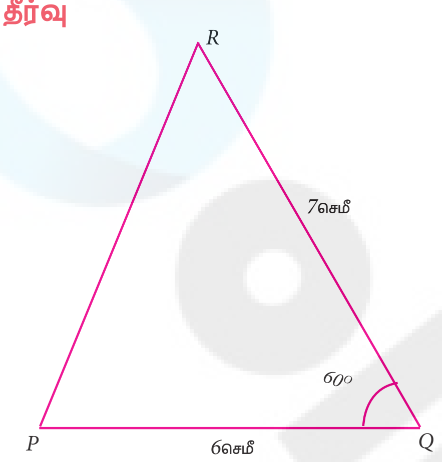
எடுத்துக்காட்டு 4.13

$PQ = 6$ செமீ, $\angle Q = 60^\circ$ மற்றும் $QR = 7$ செமீ அளவுகளைக் கொண்ட ΔPQR வரைந்து அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.

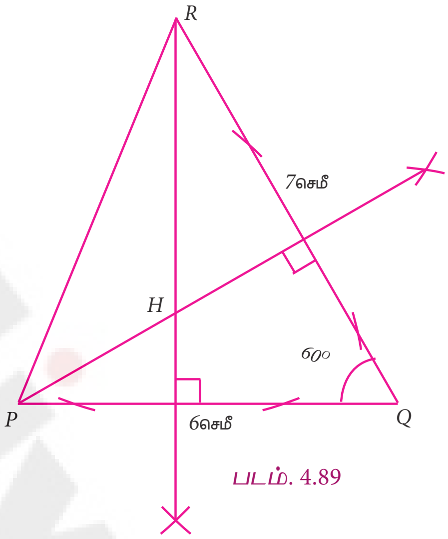
உதவிப்படம்



தீர்வு



படம். 4.88



படம். 4.89

படி 1

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவிற்கு ΔPQR வரைக.

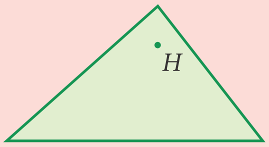
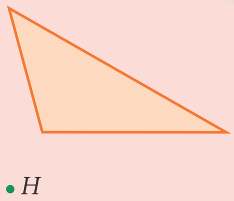
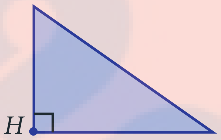
படி 2:

R மற்றும் P இலிருந்து அதன் எதிர்ப்பக்கங்கள் PQ மற்றும் QR இக்கு குத்துக்கோடுகள் வரைக.

அவ்விரண்டு குத்துக்கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி H ஆனது, ΔPQR இன் குத்துக்கோட்டு மையம் ஆகும்.

குறிப்பு

கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணங்களுக்குச் குத்துக்கோட்டு மையம் எங்கே அமையும் என்பதை அறிந்துகொள்ளுதல்.

	குறுங்கோண முக்கோணம்	விரிகோண முக்கோணம்	செங்கோண முக்கோணம்
குத்துக்கோட்டு மையம் (H)	Δ இன் உள்ளே 	Δ இன் வெளியே 	செங்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளி 

பயிற்சி 4.5

1. $LM = 7.5$ செமீ, $MN = 5$செமீ மற்றும் $LN = 8$செமீ அளவுகளுக்கு ΔLMN வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்கவும்.
2. முக்கோணம் ABC யை வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்க. இங்கு A இல் செங்கோணம், $AB = 4$செமீ மற்றும் $AC = 3$செமீ.

4-Geometry_TM.indd 188 26-12-2019 12:37:22

3. $AB = 6$செமீ, $\angle B = 110^\circ$ மற்றும் $AC = 9$செமீ அளவுகளுள்ள ΔABC வரைந்து அதன் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்க.

4. $PQ = 5$ செமீ, $PR = 6$ செமீ மற்றும் $\angle QPR = 60^\circ$ அளவுகளுள்ள ΔPQR வரைக. மேலும் நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்கவும்.

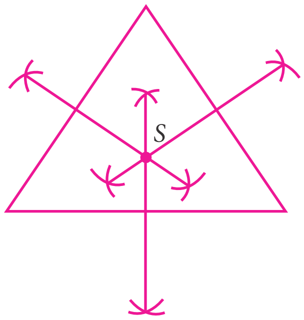
5. $PQ = 7$ செ.மீ., $QR = 8$ செமீ மற்றும் $PR = 5$ செமீ என்ற அளவுகளைக் கொண்ட ΔPQR வரைந்து அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.

6. 6.5 செமீ பக்க அளவுகளைக் கொண்ட சமபக்க முக்கோணம் வரைக. அம்முக்கோணத்திற்குக் குத்துக்கோடு மையம் காண்க.

7. $AB = 6$ செமீ, $\angle B = 110^\circ$ மற்றும் $BC = 5$ செமீ என்ற அளவுகளை உடைய ΔABC வரைந்து அதன் குத்துக்கோடு மையம் காண்க.

8. $PQ = 4.5$ செமீ, $QR = 6$ செமீ மற்றும் $PR = 7.5$ செமீ என்ற அளவுகளை உடைய செங்கோண ΔPQR வரைந்து அதன் குத்துக்கோட்டு மையம் காண்க.

4.7.3 முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் வரைதல் (Construction of the Circumcentre of a Triangle)



படம். 4.90

சுற்றுவட்டமையம் (Circumcentre)

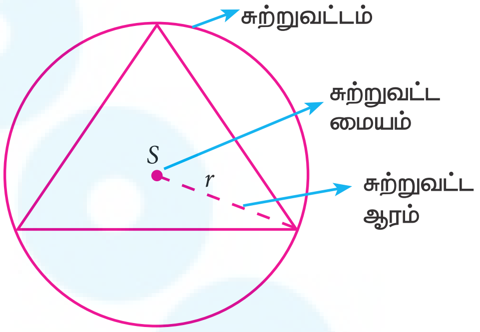
ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் என்பது அம்முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் மையக் குத்துக்கோடுகளும் சந்திக்கும் புள்ளியாகும். இதனை “S” எனக் குறிப்போம்.

சுற்றுவட்டம் (Circumcircle)

ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிப்புள்ளிகள் வழியே சுற்றுவட்ட மையத்தை (S) மையமாகக்கொண்டு செல்லும் வட்டம் சுற்றுவட்டம் எனப்படும்.

சுற்றுவட்ட ஆரம் (Circumradius)

சுற்று வட்ட மையம் S –க்கும் முக்கோணத்தின் ஏதேனும் ஓர் உச்சிப்புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு சுற்றுவட்ட ஆரம் எனப்படும்.



படம். 4.91

செயல்பாடு 11

நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு கோட்டுத்துண்டின் மையக் குத்துக்கோட்டைக் காணுதல்.

செய்முறை ஒரு காகிதத்தை மடித்து PQ என்ற கோட்டுத்துண்டை உருவாக்குவோம். P என்ற புள்ளி Q இன் மீது பொருந்துமாறு மீண்டும் காகிதத்தை மடிக்கும்போது கிடைக்கும் கோட்டுத்துண்டு RS ஆகும். RS என்பது PQ இன் மையக்குத்துக்கோடு ஆகும்.

4-Geometry_TM.indd 189 26-12-2019 12:37:22

செயல்பாடு 12

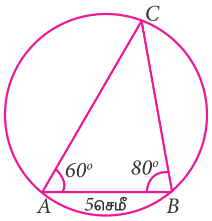
நோக்கம் காகித மடிப்பைப் பயன்படுத்தி ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தைக் காணுதல்.

செய்முறை ஒரு தாளில் முக்கோணத்தை வரைந்து கொள்க. பின்னர் செயல்பாடு 11ஐப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் எவையேனும் இரண்டு பக்கங்களுக்கு மையக்குத்துக்கோட்டைக் காண வேண்டும். இந்த இரண்டு மையக்குத்துக் கோடுகளும் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி அம்முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையம் ஆகும்.

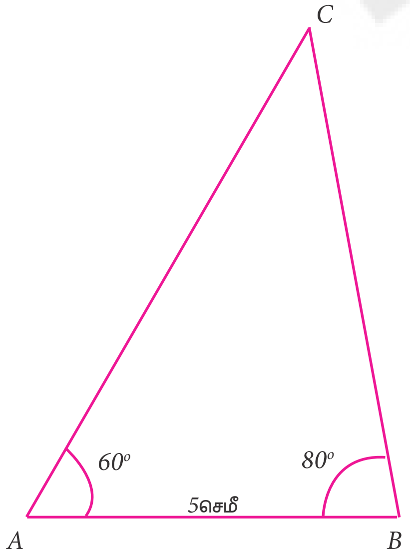
எடுத்துக்காட்டு 4.14

$AB = 5$ செமீ, $\angle A = 60^\circ$ மற்றும் $\angle B = 80^\circ$. என்ற அளவுகளை உடைய ΔABC வரைக. அதற்குச் சுற்றுவட்டம் வரைந்து சுற்றுவட்ட ஆரம் காண்க.

உதவிப்படம்



தீர்வு **படி 1** கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவிற்கு ΔABC வரைக



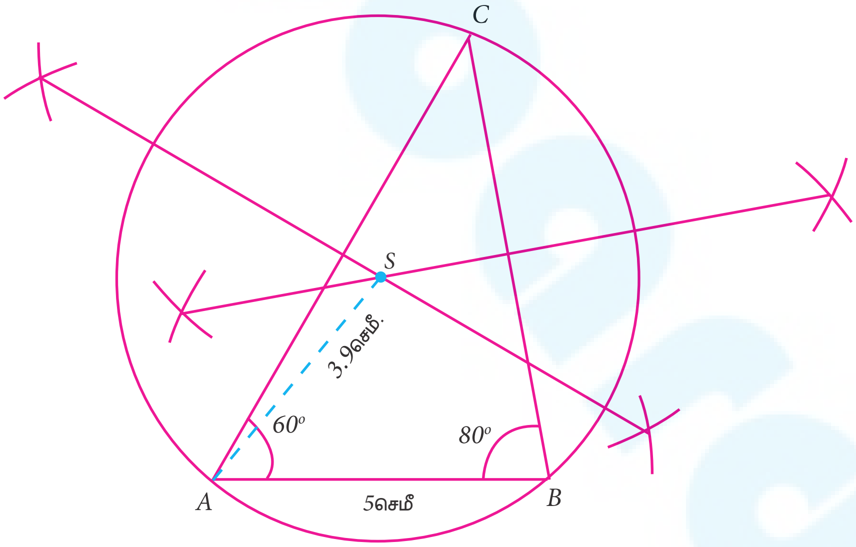
படம். 4.92

படி 2

எவையேனும் இரண்டு பக்கங்களுக்கு (AC மற்றும் BC) மையக் குத்துக்கோடுகள் வரைக. அவை வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளி S, சுற்றுவட்ட மையம் ஆகும்.

படி 3

Sஐ மையமாகவும், $SA = SB = SC$ ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு A, B, மற்றும் C வழியே செல்லும் ஒரு சுற்றுவட்டம் வரைக.



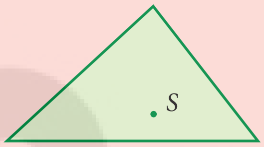
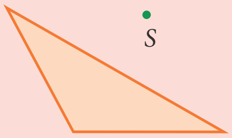
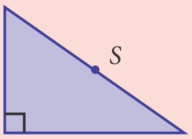
படம். 4.93

சுற்றுவட்ட ஆரம் $= 3.9$ செமீ.

4-Geometry_TM.indd 190 26-12-2019 12:37:23

குறிப்பு

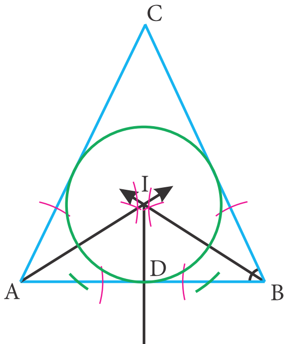
கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணங்களுக்குச் சுற்றுவட்ட மையம் எங்கே அமையும் என்பதை அறிந்துகொள்ளுதல்.

	குறுங்கோண முக்கோணம்	விரிகோண முக்கோணம்	செங்கோண முக்கோணம்
சுற்றுவட்ட மையம் (S)	Δ இன் உள்ளே 	Δ இன் வெளியே 	கர்ணத்தின் மையம் 

4.7.4 ஒரு முக்கோணத்தின் உள்வட்டம் வரைதல் (Construction of the Incircle of a Triangle)

உள்வட்ட மையம் (Incentre)

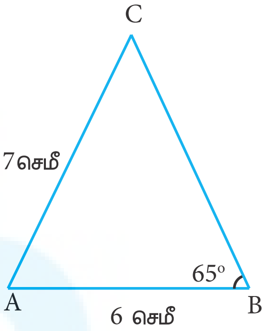
ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோண இருசமவெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளியானது, அதன் உள்வட்ட மையம் (முக்கோணத்தின் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளில் ஒன்றால் உருவாவது) என அழைக்கப்படுகிறது. உள்வட்ட மையம் என்பது உள்வட்டத்தின் மையம் ஆகும். இது I என்ற ஆங்கில எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. இது முக்கோணத்தின் பக்கங்களில் இருந்து சமதொலைவில் உள்ளது.



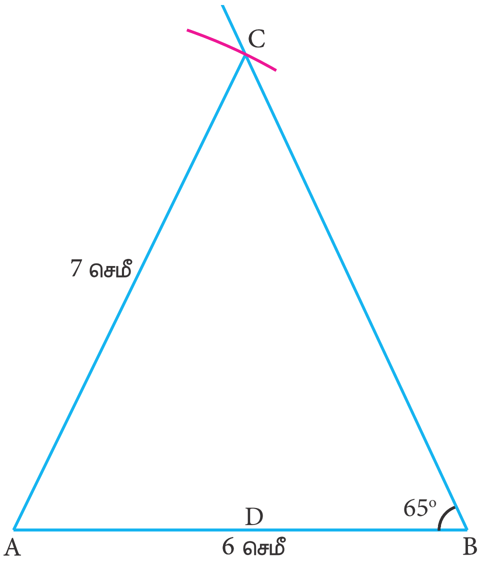
படம் 4.94

எடுத்துக்காட்டு 4.15 $AB = 6$ செமீ, $\angle B = 65^\circ$ மற்றும் $AC = 7$ செமீ அளவுகளுள்ள ΔABC வரைந்து அதன் உள்வட்டம் வரைக. மேலும் உள் ஆரத்தை அளந்து எழுதுக.

உதவிப்படம்



தீர்வு

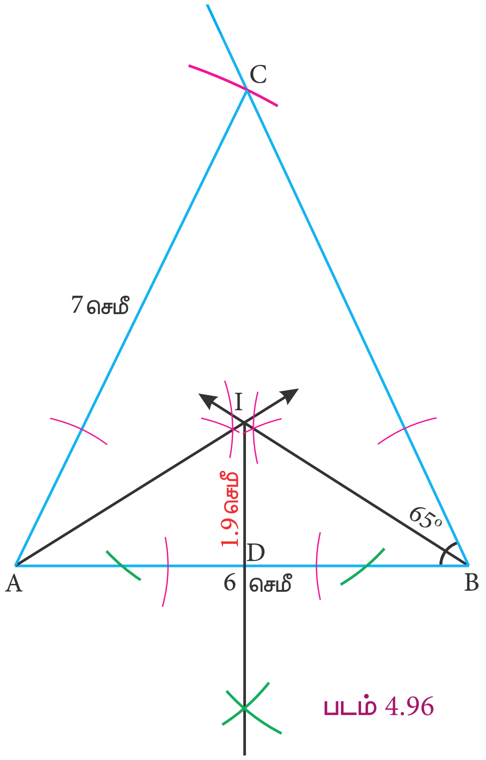


படம் 4.95

படி 1 : $AB = 6$செமீ, $\angle B = 65^\circ$ மற்றும் $AC = 7$செமீ அளவுகளுள்ள ΔABC வரைக.

4-Geometry_TM.indd 191 26-12-2019 12:37:24

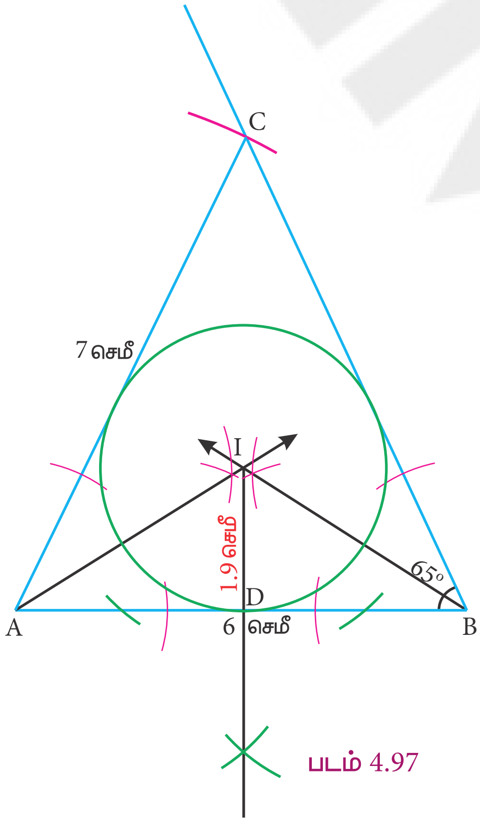
படி 2: எவையேனும் இரு கோணங்களுக்குக் (இங்கு $\angle A$ மற்றும் $\angle B$) கோண இருசமவெட்டிகள் வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளி I ஆனது ΔABC இன் உள்வட்ட மையம் ஆகும். I இல் இருந்து ஏதேனும் ஒரு பக்கத்திற்குச் (இங்கு AB) செங்குத்துக் கோடு வரைக. அக்கோடு AB ஐச் சந்திக்கும் புள்ளி D ஆகும்.



படம் 4.96

படி 3: I ஐ மையமாகவும் ID ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டமானது முக்கோணத்தின் அனைத்துப் பக்கங்களையும் உட்புறமாகத் தொட்டுச் செல்லும்.

படி 4: உள் ஆரத்தை அளக்க. உள் ஆரம் = 1.9செமீ



படம் 4.97

குறிப்பு

அனைத்து வகை முக்கோணங்களுக்கும் உள்வட்ட மையம் எப்போதும் முக்கோணத்தின் உள்ளேயே அமையும்.

பயிற்சி 4.6

1. AB = 8 செமீ, $BC = 6$ செமீ மற்றும் $\angle B = 70^\circ$ அளவுள்ள ABC வரைந்து, அம்முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டம் வரைக. சுற்றுவட்ட மையம் காண்க.
2. 4.5 செமீ மற்றும் 6 செமீ அளவுகளைச் செங்குத்துப் பக்கங்களாகக் கொண்ட செங்கோண ΔPQR வரைந்து சுற்றுவட்ட மையம் காண்க மற்றும் சுற்றுவட்டம் வரைக.
3. $AB = 5$ செமீ, $BC = 6$ செமீ மற்றும் $\angle B = 100^\circ$ அளவுள்ள ΔABC வரைந்து அதற்குச் சுற்றுவட்டம் வரைக மற்றும் சுற்றுவட்ட மையம் காண்க
4. $QR = 7$ செமீ, $\angle Q = 50^\circ$ மற்றும் $PQ = PR$ அளவுகள் கொண்ட இருசமபக்க ΔPQR வரைக. மேலும், ΔPQR இன் சுற்றுவட்ட மையம் வரைக.

4-Geometry_TM.indd 192 26-12-2019 12:37:25

5. 6.5 செமீ பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோணம் வரைந்து அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறிக்க. மேலும் உள்வட்டத்தை வரைக.

6. கர்ணம் 10 செமீ, ஒருபக்க அளவு 8 செமீ உள்ள செங்கோண முக்கோணம் வரைக. அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறித்து உள்வட்டம் வரைக.

7. $AB = 9$ செமீ, $\angle CAB = 115°$ மற்றும் $\Delta ABC = 40°$ என்ற அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக. மேலும் அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறித்து உள்வட்டம் வரைக.
(குறிப்பு : மேற்கண்ட கணக்குகளிலிருந்து எந்தவொரு முக்கோணத்திற்கும் உள்வட்டமானது முக்கோணத்தின் உள்ளே அமைகிறது என்பதை நீங்கள் காணலாம்)

8. $AB=BC=6$செமீ, $\angle B = 80°$ என்ற அளவுகளுக்கு ΔABC வரைக. அதன் உள்வட்ட மையத்தைக் குறித்து உள்வட்டம் வரைக.

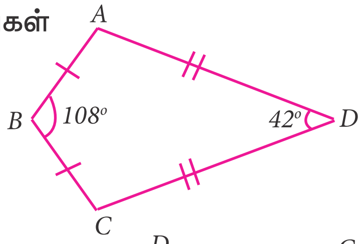
ALHHQ5

பயிற்சி 4.7

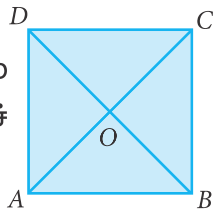
பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. முக்கோணத்தின் வெளிக்கோணம் எந்த இரு கோணங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்?
   (1) வெளிக்கோணங்கள் (2) உள்ளெதிர்க்கோணங்கள்
   (3) ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் (4) உள் கோணங்கள்

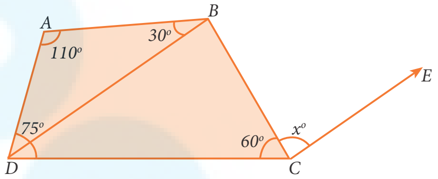
2. நாற்கரம் $ABCD$ இல் $AB = BC$ மற்றும் $AD = DC$ எனில், கோணம் $\angle BCD$ இன் அளவு
   (1) 150° (2) 30° (3) 105° (4) 72°



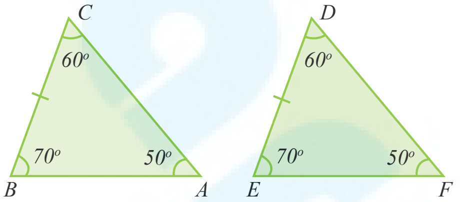
3. சதுரம் $ABCD$ இல் மூலை விட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஆனது O இல் சந்திக்கின்றன எனில், Oவை முனையாகக் கொண்ட சர்வசம முக்கோணச் சோடிகளின் எண்ணிக்கை
   (1) 6 (2) 8 (3) 4 (4) 12



4. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $CE \parallel DB$ எனில், $x°$ இன் மதிப்பு
   (1) 45° (2) 30° (3) 75° (4) 85°



5. கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூற்றுகளில் சரியானது எது?
   (1) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (2) $\Delta ABC = \Delta DEF$
   (3) $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ (4) $\Delta ABC \cong \Delta FED$



6. சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சமமெனில் அந்தச் சாய்சதுரம் ஒரு
   (1) இணைகரம் ஆனால் செவ்வகம் அல்ல (2) செவ்வகம் ஆனால் சதுரம் அல்ல
   (3) சதுரம் (4) இணைகரம் ஆனால் சதுரம் அல்ல

7. நாற்கரம் $ABCD$ இல் $\angle A$ மற்றும் $\angle B$ இன் இருசமவெட்டிகள் O இல் சந்திக்கின்றன, எனில், $\angle AOB$ இன் மதிப்பு

4-Geometry_TM.indd 193 26-12-2019 12:37:26

(1) $\angle C + \angle D$ (2) $\frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$ (3) $\frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{3}\angle D$ (4) $\frac{1}{3}\angle C + \frac{1}{2}\angle D$

8. ஓர் இணைகரத்தின் உள் கோணங்கள் $90°$ எனில், அந்த இணைகரம் ஒரு

(1) சாய் சதுரம் (2) செவ்வகம் (3) சரிவகம் (4) பட்டம்

9. பின்வருவனவற்றுள் எந்தக் கூற்று சரியானது?

(1) இணைகரத்தின் எதிர்க் கோணங்கள் சமமல்ல.

(2) இணைகரத்தின் அடுத்துள்ள கோணங்கள் நிரப்பிகள்.

(3) இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் எப்பொழுதும் சமம்.

(4) இணைகரத்தின் இரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்கள் எப்பொழுதும் சமம்.

10. முக்கோணத்தின் கோணங்கள் $(3x{-}40)^\circ$, $(x+20)^\circ$ மற்றும் $(2x{-}10)^\circ$ எனில் x இன் மதிப்பு

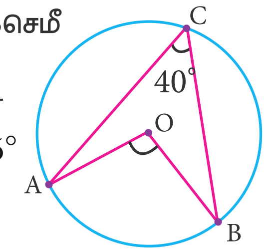
(1) $40°$ (2) $35°$ (3) $50°$ (4) $45°$

11. O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் சம நீளமுள்ள நாண்கள் PQ மற்றும் RS. மேலும், $\angle POQ = 70°$ எனில், $\angle ORS =$ ________

(1) $60°$ (2) $70°$ (3) $55°$ (4) $80°$

12. ஆரம் 25 செமீ உள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 15 செமீ தூரத்தில் உள்ள நாணின் நீளம் __________

(1) 25செமீ (2) 20செமீ (3) 40செமீ (4) 18செமீ

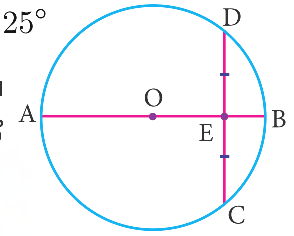


13. படத்தில் வட்டமையம் O மற்றும் $\angle ACB = 40°$ எனில், $\angle AOB =$ _______

(1) $80°$ (2) $85°$ (3) $70°$ (4) $65°$

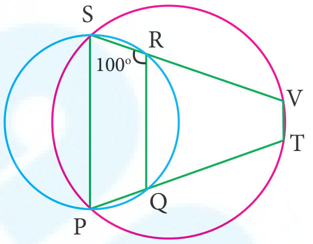
14. வட்ட நாற்கரம் $ABCD$யில், $\angle A = 4x$, $\angle C = 2x$ எனில், x இன் மதிப்பு

(1) $30°$ (2) $20°$ (3) $15°$ (4) $25°$



15. படத்தில் வட்டமையம் O மற்றும் விட்டம் AB ஆகியன, நாண் CD ஐப் புள்ளி E இல் இருசமக் கூறிடுகின்றன. மேலும், $CE = ED = 8$ செமீ மற்றும் $EB = 4$ செமீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம்

(1) 8செமீ (2) 4செமீ (3) 6செமீ (4)10செமீ

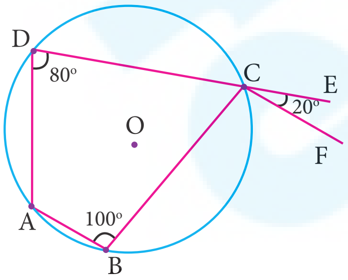


16. படத்தில் $PQRS$ மற்றும் $PTVS$ என்ற இரண்டு வட்ட நாற்கரங்களில் $\angle QRS = 100°$ எனில், $\angle TVS =$

(1) $80°$ (2) $100°$ (3) $70°$ (4) $90°$

17. வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு கோண அளவு $75°$ எனில், எதிர் கோணத்தின் அளவு

(1) $100°$ (2) $105°$ (3) $85°$ (4) $90°$



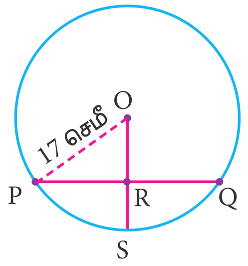
18. படத்தில் வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ இல் பக்கம் DC ஆனது E வரை நீட்டப்பட்டுள்ளது. மேலும் AB இக்கு இணையாக CF வரைக. இங்கு $\angle ADC = 80°$ மற்றும் $\angle ECF = 20°$ எனில், $\angle BAD = ?$

(1) $100°$ (2) $20°$ (3) $120°$ (4) $110°$

4-Geometry_TM.indd 194 26-12-2019 12:37:30

19. AD ஐ விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் ஒரு நாண் AB. இங்கு, $AD = 30$ செமீ மற்றும் $AB = 24$ செமீ எனில், வட்ட மையத்திலிருந்து AB அமைந்துள்ள தூரம் _______

(1) 10செமீ (2) 9செமீ
(3) 8செமீ (4) 6செமீ.



20. படத்தில் $OP = 17$ செமீ, $PQ = 30$ செமீ மற்றும் OS ஆனது PQ இக்குச் செங்குத்து எனில், RS இன் மதிப்பு.

(1) 10செமீ (2) 6செமீ (3) 7செமீ (4) 9செமீ

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் மற்றும் எதிர்க் கோணங்கள் சமம்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சமக் கூறிடும்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் இணைகரத்தை இரு சர்வசம முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கும்.
- ஒரு நாற்கரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமம் எனில் அது ஓர் இணைகரமாகும்.
- ஒரே அடிப்பக்கத்தையும் இரு இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் இணைகரத்தின் பரப்புகள் சமம்.
- ஒரே அடிப்பக்கத்தையும் இரு இணைகோடுகளுக்கு இடையேயும் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்புகள் சமம்.
- இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், அது ஒரு சாய்சதுரமாகும்.
- ஒரே கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் வழியே ஒரே ஒரு வட்டம்தான் வரைய இயலும்.
- ஒரு வட்டத்தில் சம நீளமுள்ள நாண்கள் வட்ட மையத்தில் சம கோணங்களைத் தாங்கும்.
- வட்ட மையத்திலிருந்து நாணிற்கு வரையப்படும் செங்குத்து, அந்த நாணை இருசமக் கூறிடும்.
- ஒரு வட்டத்தில் உள்ள சம நாண்கள் வட்ட மையத்திலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்கும்.
- ஒரு வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் அந்த வில்லைத் தவிர்த்து வட்டத்தின் மீதிப் பரிதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஏற்படுத்தும் கோணத்தைப் போல் இரு மடங்காகும்.
- அரைவட்டத்தில் அமையும் கோணம் செங்கோணமாகும்.
- ஒரே வட்டத்துண்டில் அமையும் கோணங்கள் சமம்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு சோடி எதிர் கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும்.
- வட்ட நாற்கரத்தின் ஒரு பக்கத்தை நீட்டிப்பதால் ஏற்படும் வெளிக்கோணம் உள்ளெதிர் கோணத்திற்குச் சமம்.

4-Geometry_TM.indd 195 26-12-2019 12:37:31

இணையச் செயல்பாடு–1

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி – 1

தேடுபொறியில் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

படி – 2

"Properties: Parallelogram" என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும் . அங்கு "Rotate" மற்றும் "Page" எனும் நழுவல் (slider) தோன்றும்

படி – 3

"Rotate" எனும் நழுவலில் உள்ள கரும்புள்ளியை இழுக்க, முக்கோண வடிவம் இரட்டித்து இணைகர வடிவம் தோன்றும்.

படி – 4

"Page" எனும் நழுவலில் உள்ள கரும்புள்ளியை இழுக்க, இணைகரத்தின் மூன்று பண்புகள் விளக்கப்படும்.

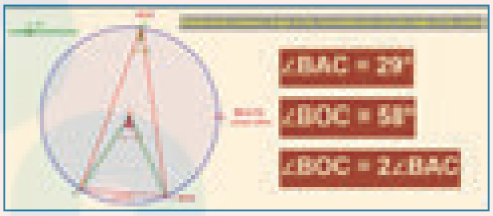
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

இணைகரத்தின் பண்புகள்: https://www.geogebra.org/m/m9Q2QpWD

B563_9_MAT_TM_T3

இணையச் செயல்பாடு–2

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra இன் "Angles in a circle" என்னும் பணித்தாளின் பக்கத்திற்குச் செல்க. இப்பணித்தாளில் வட்டம் குறித்த இரண்டு செயல்பாடுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி - 2

இரண்டாவது செயல்பாடு "Angles in the segment of a circle". B மற்றும் D புள்ளிகளை இழுத்து கோணங்களைச் சரிபார்க்க. மேலும் "Move" ஐக் கொண்டு வட்டத்தின் ஆரம் மற்றும் நாணின் நீளத்தை மாற்ற இயலும்.

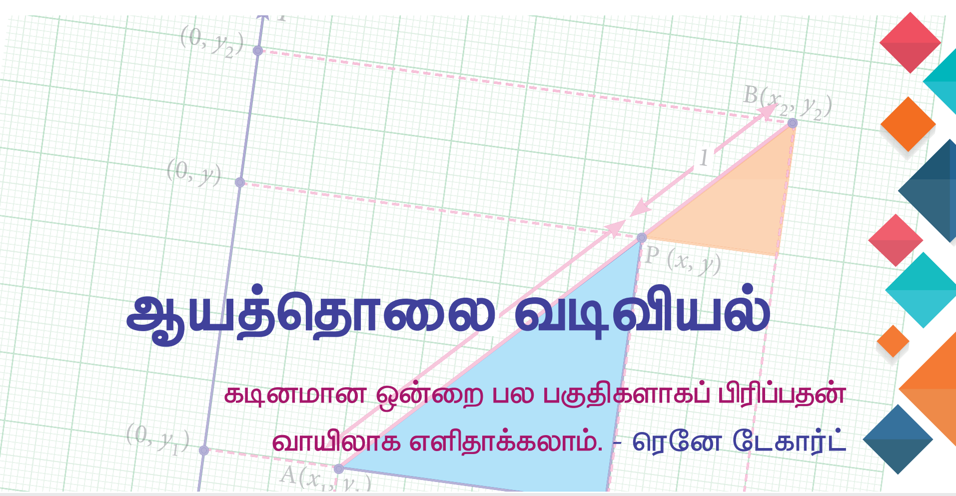
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

Angle in a circle: https://ggbm.at/yaNUhv9S or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

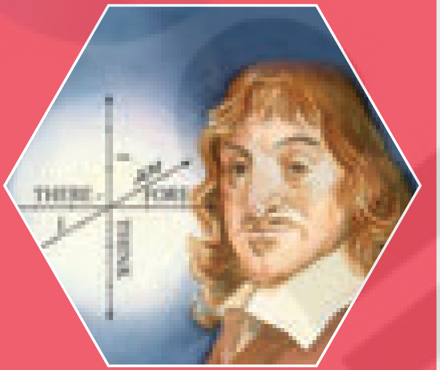
4-Geometry_TM.indd 196 26-12-2019 12:37:31

5



ஆயத்தொலை வடிவியல்

கடினமான ஒன்றை பல பகுதிகளாகப் பிரிப்பதன் வாயிலாக எளிதாக்கலாம். - ரெனே டேகார்ட்



ரெனே டேகார்ட்
(கி.பி. (பொ.ஆ.) 1596-1650)

பிரான்ஸ் நாட்டுக் கணித அறிஞர் ரெனே டேகார்ட் (Rene Descartes) ஆயத்தொலை வடிவியல் அல்லது பகுமுறை வடிவியல் என்ற புதிய பிரிவைக் கணிதத்தில் உருவாக்கினார். அது கடந்த காலங்களில் எண்கணிதம், இயற்கணிதம் மற்றும் வடிவியல் ஆகியவற்றை ஒருங்கிணைத்து, வரைபடத்தில் புள்ளிகளாகவும், சமன்பாடுகளாகவும் வடிவியல் உருவங்களாகவும் காட்சிப்படுத்தும் ஓர் உத்தியாகும். தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் ஆய அச்சுத் தொலைவுகளையும், இரு எண்களையும் பயன்படுத்தி ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு கோடுகளில் இருந்து அது எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது என்பதன் மூலம் குறிக்கலாம். இது முழுவதும் ரெனே டேகார்ட்டின் கண்டுபிடிப்பாகும்.

CT76MX

கற்றல் விளைவுகள்

- கார்ட்டீசியன் ஆயத்தொலை முறையைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- ஒரு புள்ளியின் கிடை அச்சுத் தொலைவு, செங்குத்து அச்சுத் தொலைவு மற்றும் கொடுக்கப் பட்ட புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் ஆகியவற்றை அறிந்து கொள்ளுதல்.
- கார்ட்டீசியன் தளத்தில் அமையும் இரு புள்ளிகளின் தொலைவை வாய்ப்பாட்டின் மூலம் கண்டறிதல்.
- நடுப்புள்ளிக்கான சூத்திரத்தைப் புரிந்து கொள்ளுதல் மற்றும் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் பயன்படுத்துதல்.
- பிரிவு சூத்திரத்தைத் தருவித்தல் மற்றும் கணக்குகளைத் தீர்ப்பதில் பயன்படுத்துதல்.
- நடுக்கோட்டு மையத்திற்கான சூத்திரத்தைப் புரிந்துகொள்ளுதல் மேலும் அதன் பயன்பாட்டை அறிதல்.

5.1 தளத்தினை வரைபடமாகக் குறித்தல் (Mapping the Plane)

நீங்கள் ஏதேனும் ஒரு முகவரியை எப்படி எழுதுவீர்கள்? எடுத்துக்காட்டாக,

சரக்கல்விளை தொடக்கப்பள்ளி,
135, சரக்கல்விளை வீட்டுவசதி வாரிய சாலை,
கீழ்சரக்கல்விளை, நாகர்கோவில் – 629 002,
கன்னியாகுமரி மாவட்டம்,
தமிழ்நாடு, இந்தியா.

5 Cordinate TM.indd 197 12/12/2019 3:36:14 PM

படம் 5.1

இந்த உலகில் எவரும், எங்கிருந்தும், தான் படித்த பள்ளியை அடையாளப்படுத்த இந்தத் தகவல் போதுமானது. இந்தப் பூமியில் கோடானகோடிக் கட்டடங்கள் உள்ளன எனக் கருதுக. இருப்பினும், ஒரு குறிப்பிட்ட மனிதர் பயின்ற பள்ளியை எவ்வளவு உள்ளடங்கிய பகுதியில் இருந்தாலும் அதை அடையாளம் காண முகவரி தகவல்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

இது எப்படிச் சாத்தியமாகிறது? ஒரு குறிப்பிட்ட முகவரியை அடையாளம் காணும் முறையைக் காண்போம். இந்த உலகம் நாடுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு இருக்கிறது என்பதை நாம் அறிவோம். அதில் இந்தியாவும் ஒன்று. மேலும், இந்தியா மாநிலங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு இருக்கிறது. இந்த மாநிலங்களில் நம் தமிழ்நாட்டை அடையாளம் காண இயலும்.

மேலும், தொடர்ந்து நோக்கும்போது, நம் மாநிலம் மாவட்டங்களாகவும், மாவட்டங்கள் வட்டங்களாகவும், வட்டங்கள் கிராமங்களாகவும் தொடர்ந்து கொண்டே சென்றால், மேலும் இதே வழியில், அந்த வட்டத்தில் உள்ள ஏராளமான கிராமங்களில் சரக்கல்விளை கிராமத்தை ஒருவர் அடையாளம் காண இயலும். இப்படியாக அக்கிராமத்தில் உள்ள ஏராளமான சாலைகளில் நாம் ஆர்வமாகத் தேடும் வீட்டுவசதிவாரியச் சாலையும் ஒன்று. நாம் அத்தெருவில் உள்ள கட்டடங்களில் 135 என்ற கதவிலக்கம் கொண்ட அரசுத் தொடக்கப்பள்ளிக் கட்டடத்தைக் கண்டறிந்து, நமது ஆராய்ச்சியை முடிவிற்குக் கொண்டுவரலாம்.

படம் 5.2

அமெரிக்காவின், நியூயார்க் மாநகரின் ஒரு பகுதி மன்ஹட்டன். வரைபடத்தில் இந்நகரின் நிழற்சாலைகள் (Avenue) வடக்குத் தெற்காகவும், தெருக்கள் கிழக்கு மேற்காகவும் அமைந்துள்ளன என்பதைக் காண்பிக்கிறது. நீங்கள் தேடும் பகுதி 9ஆவது மற்றும் 10ஆவது நிழற்சாலைகளுக்கு இடையே 57ஆவது தெருவில் இருக்கிறது எனில், அப்பகுதியை வரைபடத்தில் இருந்து உடனடியாகக் கண்டறியலாம். இதேபோல் 34 மற்றும் 35ஆவது சாலைகளுக்கு இடையில் 2ஆவது நிழற்சாலை அமைந்துள்ள இடத்தைக் கண்டறியலாம். மேலும், நியூயார்க்வாசிகள் இதை இன்னும் எளிதாக்குகிறார்கள். ஒரு தெருவில் உள்ள கதவிலக்கத்தைக் கொண்டு அவை எந்த இரு நிழற்சாலைகளுக்கு இடையே அமைகின்றன என்பதையும், ஒரு நிழற்சாலையில் உள்ள கதவிலக்கத்தைக் கொண்டு அது எந்த இரு தெருக்களுக்கு இடையே அமைகிறது எனவும் துல்லியமாகக் கண்டறியலாம்.

5 Cordinate TM.indd 198 12/12/2019 3:36:15 PM

எல்லா வரைபடங்களும் பாதைகளையும் அதில் ஓர் இடத்தையும் குறிப்பிட, அதன் அருகில் உள்ளவை, தொலைவில் உள்ளவை, அது எவ்வளவு தொலைவில் அமைந்துள்ளது, அவற்றிற்கு இடையே அமைந்துள்ளவை போன்ற எல்லாத் தகவல்களையும் கொண்டு அந்த இடத்தை அடையாளம் காண உதவுகின்றன. நாம் அட்சரேகை (மன்ஹட்டன் தெருக்களைப் போன்று கிழக்கு மேற்காக) மற்றும் தீர்க்க ரேகை (மன்ஹட்டன் நிழற்சாலைகளைப் போன்று வடக்குத் தெற்காக) களைக் கொண்டு பூமியிலுள்ள இடங்களைத் துல்லியமாகக் குறிப்பிட இயலும். வரைபடத்தில் எண்களின் பயன்பாடு எவ்வாறு பயன் உள்ளதாய் இருக்கிறது என்பது ஆர்வமூட்டக்கூடியது.

எண்களைக் கொண்டு வரைபடத்தில் இடங்களைக் குறிப்பிடுவது என்ற கருத்து வடிவியல் மூலம் கிடைக்கிறது. தளங்கள், கன உருவங்கள் மற்றும் எல்லா வகையான வடிவங்கள் போன்றவற்றை வரைபடத்தைக் கொண்டு உருவாக்கக் கணித அறிஞர்கள் விரும்பினார்கள். அவர்கள் அவ்வாறான வரைபடத்தை ஏன் விரும்பினார்கள்? ஒரு வடிவியல் உருவத்தில் ஒரு செயலை நிகழ்த்தும்போது, ஒரு புள்ளியானது உட்புறத்தில் அல்லது வெளிப்புறத்தில் அல்லது விளிம்பில் அமைந்துள்ளதா என உற்று நோக்குகிறோம். ஒரு தள உருவத்தின் விளிம்பில் உள்ள இரு புள்ளிகளும், அதற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியும் தரப்படுமானால், விளிம்பின் மேல் உள்ள இரு புள்ளிகளில் எது வெளியே அமையும் புள்ளிக்கு மிக அருகில் உள்ளது, அது எவ்வளவு நெருக்கமாக உள்ளது என்பதை ஆராய்வோம். கனச்சதுரம் போன்ற கன உருவங்களில் இதுபோன்ற சிக்கலான கேள்விகளைக் கற்பனை செய்யலாம்.

கணித அறிஞர்கள் பலரும், வட்டங்கள், பலகோணங்கள் மற்றும் கோளங்கள் பற்றிய தங்களின் புரிதலுக்கு இப்படிக் கேள்விகள் எழுப்பி அதன் மூலம் தீர்வு கண்டார்கள். அன்றாட வாழ்க்கையிலும் கணித உத்திகள் மற்றும் நுணுக்கமான கணித வழிமுறைகள் பயன்பட்டன. 17ஆம் நூற்றாண்டில் கணித விதியில் ஆயத்தொலைவு முறை தோன்றியிராவிடில், 18ஆம் நூற்றாண்டில் அட்சரேகை மற்றும் தீர்க்கரேகை போன்றவற்றைக் கொண்டு உலக வரைபடத்தில் குறிப்பது நடைபெற்று இருக்காது.

நீங்கள் முன்பே மெய்யெண் தொகுப்பின் வரைபடத்தை எண்கோட்டில் அறிந்துள்ளீர்கள். இது இரு திசையிலும் முடிவில்லாமல் நீள்கிறது. எண்கோட்டில் எவையேனும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையே முடிவில்லாத புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன. நாம் இப்பொழுது ஒரு தளத்தின் வரைபடத்தை வரைந்து, அத்தளத்தில் உள்ள புள்ளிகளையும், புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவு போன்றவற்றையும் விவாதிக்க இருக்கிறோம். மேலும், நாம் இதுவரை சுருக்கமாக விவாதித்த அனைத்து வடிவியல் வடிவங்களையும் வரைய இருக்கிறோம்.

எண்கணிதம் நம்மை எண்களின் உலகத்திற்கும் மற்றும் அதன் செயல்களின் உலகத்திற்கும் அறிமுகப்படுத்தியது, இயற்கணிதம் நமக்குத் தெரியாத ஒன்றின் மதிப்பையும் மற்றும் அவற்றைச் சமன்பாட்டில் பயன்படுத்திக் கண்டுபிடிக்கவும் கற்றுத் தந்தது. வடிவியல் நமக்கு வடிவங்களை அதன் பண்பின் அடிப்படையில் விளக்கக் கற்றுத் தந்தது. ஆயத்தொலை வடிவியலானது எண்களின் பயன் மற்றும் இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு வடிவியலைப் படிப்பதற்குப் பல உத்திகளை ஓர் இடத்தில் அழகிய முறையில் ஒருங்கிணைத்துக் காட்சிப்படுத்திக் கற்றுத்தர இருக்கிறது. இது ஆர்வமூட்டும் செயல்பாடாகும்.

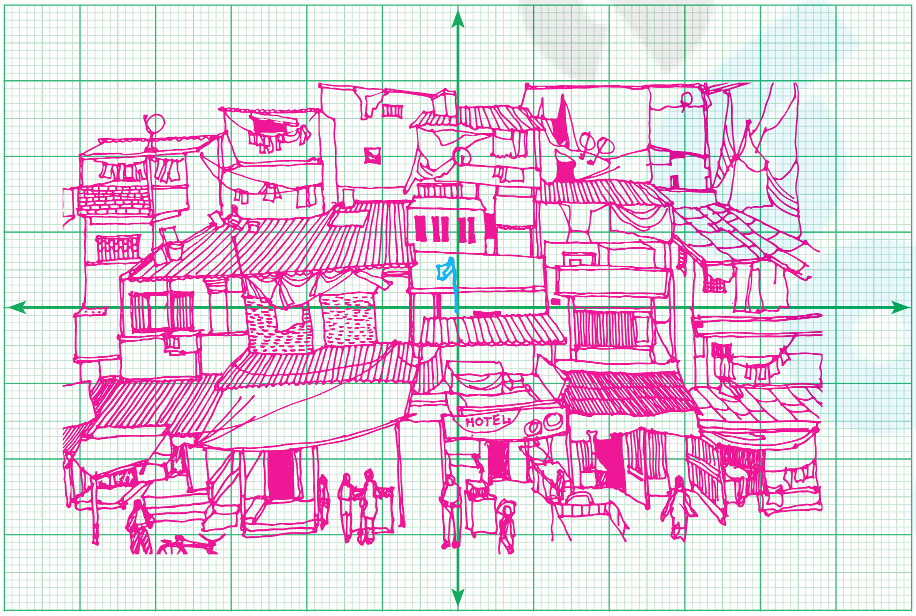
5 Cordinate TM.indd 199 12/12/2019 3:36:15 PM

5.2 ஆயத் தொலைவைக் கண்டறிதல் (Devising a Coordinate System)

நீ உன் நண்பனிடம் 5செ.மீ × 3செ.மீ அளவுள்ள செவ்வகத்தை வெற்றுத் தாளில் வரையச் சொல்லவும். அந்த அளவுகளுக்கு அவனால் செவ்வகம் வரைய முடியும், ஆனால் எங்கே வரைய வேண்டும் என அவன் கேட்டால், நீ எப்படிப் பதில் சொல்வாய்? இப்பொழுது படத்தைப் பார். நீ இதை மற்றொருவருக்கு எப்படி விளக்குவாய்?

படம் 5.3

மேற்கூறிய படத்தை(படம் 5.3) ஆய்வு செய்வோம். இதில் சாதாரணமாகக் குறிப்பிட்ட வீட்டை அடையாளப்படுத்துதல் என்பது மிகக் கடினமான பணியாகும். ஏதேனும் ஓர் இடத்தையோ அல்லது ஒரு பொருளையோ அடையாளத்திற்காக நிறுவும்பொழுது நமக்கு மற்றோர் இடத்தையோ அல்லது பொருளையோ அடையாளப்படுத்துதல் எளிதாகும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கொடியைப் பொருத்திவிட்டு அந்தக் கொடிக்கு இடது புறமாக உள்ள வீட்டைப் பற்றியோ, அவ்வீட்டிற்குக் கீழே அமைந்துள்ள உணவகத்தைப் பற்றியோ, அதற்கு வலப்புறமாக அமைந்துள்ள அலை ஏற்பியைப் (Antenna) பற்றியோ பேசலாம்.



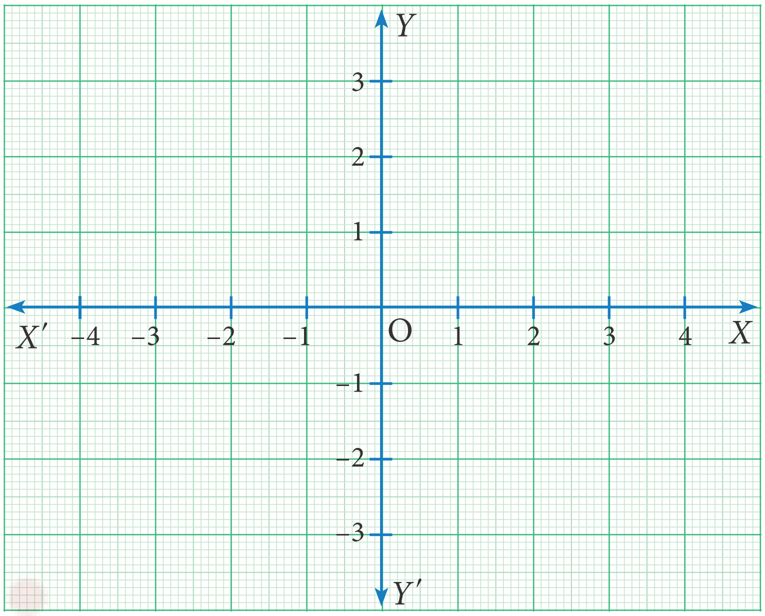
படம் 5.4

படம் 5.4 இல் உள்ளதுபோல், இரு செங்குத்துக்கோடுகள் வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியைக் கொடிக்கு அருகில் அமையுமாறு வரைக. இப்பொழுது நீ உன் நண்பனிடம் கொடிக்கம்பத்தை ஆரம்ப இடக்குறியீடாகக் கொண்டு படத்தின் மொத்த நீள அகலத்தை 2 செ.மீ. வலப்புறம், 3 செ.மீ. மேற்புறம், மேலும், உனக்குத் திசை தெரிந்தால் 2 செ.மீ. கிழக்கே, 3 செ.மீ. வடக்கே எனவும் கூறலாம்.

பொதுவாக இது போலவே எண்கோடு என்பது பூச்சியத்திற்கு வலப்புறமாக மிகை எண்களையும், பூச்சியத்திற்கு இடப்புறமாகக் குறை எண்களையும் கொண்ட கிடைக்கோட்டில் குறிப்பதாகும். நாம் இப்பொழுது மற்றோர் எண்கோட்டு நகலைச் செங்குத்தாகக் கருதுவோம். ஆனால் பூச்சியத்திற்கு மேல்புறம் மிகை எண்களையும் கீழ்ப்புறம் குறை எண்களையும் குறிப்போம். (படம் 5.5).

5 Cordinate TM.indd 200 12/12/2019 3:36:16 PM

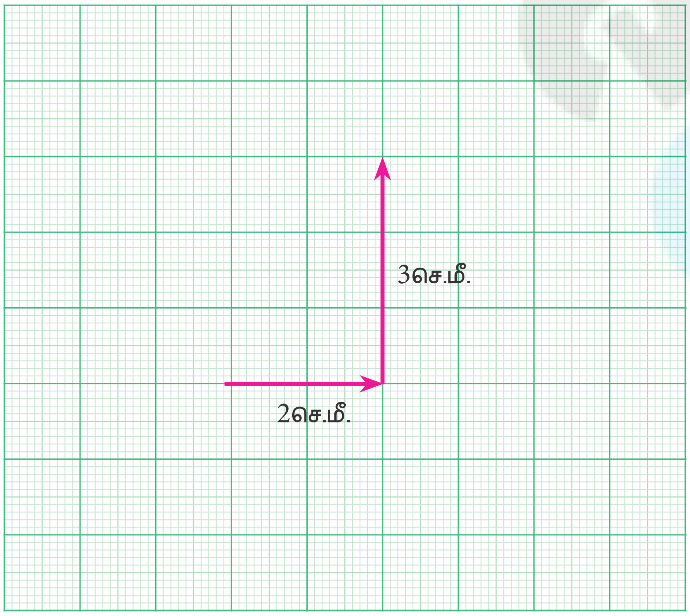
இரு எண்கோடுகளும் எங்கே சந்திக்கின்றன? இரு கோடுகளும் பூச்சியத்திலேயே சந்திக்கின்றன. இதுவே நம்முடைய கொடி குறிப்பிட்ட இடமாகும். இரண்டு கோடுகளிலும் இதனோடு தொடர்புடைய மற்ற எண்களைப் பற்றிப் பேசலாம். ஆனால், இப்பொழுது நீங்கள் இரு எண்கோட்டில் உள்ள எண்களை மட்டுமல்லாமல் அதைவிட அதிகமாகப் பார்க்கலாம்.



படம் 5.5

நாம் வலப்புறம் 2 அலகும் மேல்புறம் 3 அலகும் செல்வதாக நினைத்தால் நாம் இந்த இடத்தை (→ 2, ↑ 3) என அழைக்கலாம்.

செங்குத்து, கிடைநிலை, மேல், கீழ் ... போன்ற அனைத்தையும் பயன்படுத்துவது எளிதல்ல. எனவே, இதை நாம் சுருக்கமாக (2, 3) எனக் கூறுவோம். மேலும் வலப்புறம் 2 அலகு மற்றும் மேற்புறம் 3 அலகு என்பதைப் புரிந்துகொண்டுள்ளோம்.



படம் 5.6

நாம் முதலில் 3 அலகு மேற்புறம் மற்றும் 2 அலகு வலப்புறம் சென்று அடைந்த இடமான (2, 3) இக்கான வழிமுறையும் (3, 2) இக்கான வழிமுறையும் ஒன்றாகுமா? என்பதைக் கருத்தில் கொள்க. மேலும், (−2, 3) எவ்வாறு அமையும்? இது எப்பொழுதும் (0, 0) இலிருந்து 2 அலகு இடப்புறம் மற்றும் 3 அலகு மேற்புறம் அமையும். (2, −3) இக்கான வழிமுறை என்ன? இது குறிப்பிடுவது 2 அலகு வலப்புறம் 3 அலகு கீழ்ப்புறம். நமக்கு இப்பொழுது கிடை மற்றும் செங்குத்து எண் கோடுகளுக்குப் பெயரிடவேண்டிய தேவை உள்ளது. கிடைநிலை எண் கோட்டை x அச்சு மற்றும் செங்குத்து எண் கோட்டை y அச்சு எனவும் அழைப்போம். வலப்புறத்தில் X எனவும் இடப்புறத்தில் X' எனவும் மேல்புறம் Y எனவும் கீழ்ப்புறம் Y' எனவும் குறிப்போம்.

x-ஆயத் தொலைவானது கிடை அச்சுத் தொலைவு *(abscissa)* எனவும் y ஆயத் தொலைவானது செங்குத்து அச்சுத் தொலைவு *(ordinate)* எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. ஆய அச்சுகள் வெட்டும் புள்ளி (0,0) ஐ ஆதி (origin) என்போம்.

5 Cordinate TM.indd 201 12/12/2019 3:36:16 PM

நாம் இப்பொழுது தாளிலுள்ள எந்தவொரு புள்ளியையும் (x,y) என விளக்கலாம். எவ்வாறாயினும் நம்முடைய தாளில் 1, 2, ... குறிப்பது எதை? இந்த எண்களைக் குறிப்பிட நமக்குச் சில பொருத்தமான அலகுகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டிய தேவை உள்ளது. எடுத்துக்காட்டாக, நாம் 1 அலகை 1 செ.மீ. எனத் தேர்ந்தெடுப்போம். ஆகவே, (0,0) –க்கு வலப்புறமாக 2 செ.மீ. நகர்ந்து மற்றும் மேல்நோக்கி 3 செ.மீ. நகர்தலே (2,3) இன் வழிமுறையாகும். அலகுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பது தன்னிச்சையானது என்பதை நினைவில்கொள்ளவேண்டும். நாம் 1 அலகை 2 செ.மீ. என எடுப்போமேயானால் நமக்குக் கிடைக்கும் படங்கள் மிகப் பெரியதாகும். ஆனால் தொடர்புள்ள தூரம் எப்பொழுதும் மாறாது. இப்போது நம்மிடம் உள்ளது வெறும் காகிதம் அல்ல. தளத்தில் உள்ள எண்ணற்ற புள்ளிகளை விளக்கும் மொழி ஆகும்.

குறிப்பு

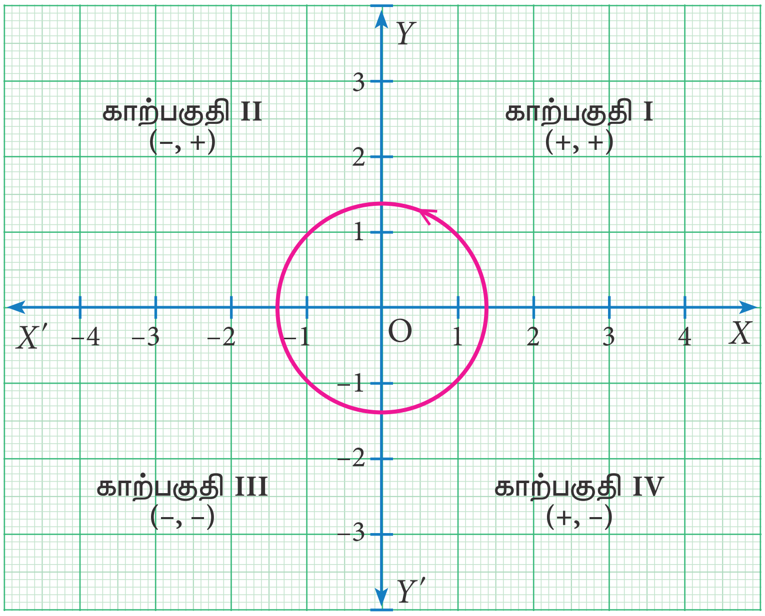
(0,0)ஐத் தாளின் மையத்திலோ அல்லது வேறு எங்கேயோ குறிப்பது ஒரு பொருட்டல்ல. நமக்கு எப்பொழுதும் (0,0) ஆதிப்புள்ளியாகும். மேலும், அங்கிருந்தே புள்ளிக்கான எல்லா வழிமுறைகளும் தொடரும் ஆதிப்புள்ளியை O என்ற எழுத்தால் குறிப்பிடுவோம்.

x அச்சும் y அச்சும் தளத்தை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன. அவற்றை நாம் காற்பகுதிகள் என்போம். (நினைவில் கொள்க: நாற்கரம் என்பது நான்கு பக்கங்களைக் கொண்டது. நான்கு காற்பகுதிகள்) பொதுவாக, அவை I, II, III மற்றும் IV என எண்ணிடப்படும். இதில் I ஆனது கிழக்கு மேற்பகுதியையும், II ஆனது மேற்கு மேல்பகுதியையும், III ஆனது மேற்கு கீழ்ப் பகுதியையும் மற்றும், IV ஆனது கிழக்குக் கீழ்ப்பகுதியையும் கடிகார எதிர்ச்சுற்றில் பயணத்தையும் உள்ளடக்கியதாகும்.

தளம்	காற்பகுதி	x,y இன் தன்மை	ஆயத் தொலைகளின் குறிகள்
XOY	I	$x>0,\ y>0$	(+,+)
$X'OY$	II	$x<0,\ y>0$	(–,+)
$X'OY'$	III	$x<0,\ y<0$	(–,–)
XOY'	IV	$x>0,\ y<0$	(+,–)

குறிப்பு

இந்த வழிமுறையை (கடிகார எதிர் சுற்று) கடிகாரச் சுற்றில் அல்லாமலோ அல்லது வேறு ஏதேனும் காற்பகுதியில் இருந்தோ தொடங்கலாமா? இது ஒன்றும் பொருட்டல்ல, ஆனால், இது சில நூற்றாண்டுகளுக்கு முன்பிருந்தே நம்மால் பின்பற்றப்படும் சில சிறந்த வழிமுறைகளில் ஒன்றாகும்.



படம் 5.7

குறிப்பு

- x அச்சில் அமையும் எந்த ஒரு புள்ளி Pயின் y அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம் ஆகும். அதாவது, $P(x,0)$.
- y அச்சில் அமையும் எந்த ஒரு புள்ளி Q இன் x அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம் ஆகும். அதாவது, $Q(0, y)$
- $(x, y) \neq (y, x)$; x மற்றும் y சமமல்ல
- செவ்வக ஆய அச்சுக்களை உடைய தளம் கார்ட்டீசியன் தளம் ஆகும்.

5 Cordinate TM.indd 202 12/12/2019 3:36:17 PM

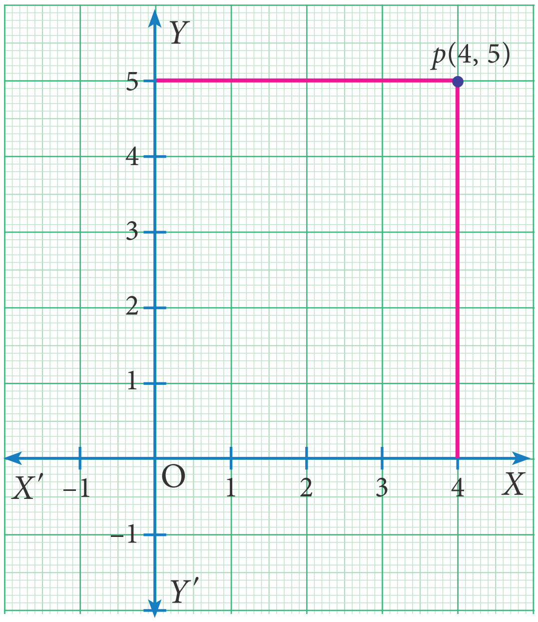
5.2.1 கார்ட்டீசியன் தளத்தில் புள்ளிகளைக் குறித்தல் (Plotting Points in Cartesian Coordinate Plane)

$(4,5)$ என்ற புள்ளியைக் கார்ட்டீசியன் ஆய அச்சுத் தளத்தில் குறிக்க, x அச்சில் 4 அலகுகள் நகர்ந்து, அங்கிருந்து ஒரு செங்குத்துக் கோடு $x = 4$ வரைக.

இதே போல் y அச்சில் 5 அலகுகள் நகர்ந்து அங்கிருந்து ஒரு கிடைமட்டமாகக் கோடு $y = 5$ வரைக.

இந்த இரு கோடுகள் சந்திக்கும் இடம் கார்ட்டீசியன் தளத்தில் புள்ளி $(4,5)$ இன் இடம் ஆகும்.

இப்புள்ளியானது x அச்சில் இருந்து 5 அலகுகள் தொலைவிலும் y அச்சில் இருந்து 4 அலகுகள் தொலைவிலும் அமையும். இவ்வாறு கார்ட்டீசியன் தளத்தில் $(4,5)$ என்ற புள்ளி குறிக்கப்படுகிறது.



படம் 5.8

எடுத்துக்காட்டு 5.1

பின்வரும் புள்ளிகள் எந்தக் காற்பகுதியில் அமையும்?

(அ) $(3,-8)$ (ஆ) $(-1,-3)$ (இ) $(2, 5)$ (ஈ) $(-7, 3)$

தீர்வு

(அ) x -ஆயத்தொலை மிகை மதிப்பு மற்றும் y – ஆயத்தொலை குறை மதிப்பு. எனவே, $(3,-8)$ என்ற புள்ளி IV ஆவது காற்பகுதியில் அமையும்.

(ஆ) x -ஆயத்தொலை குறை மதிப்பு மற்றும் y -ஆயத்தொலை குறை மதிப்பு. எனவே, $(-1,-3)$ என்ற புள்ளி III ஆவது காற்பகுதியில் அமையும்.

(இ) x -ஆயத்தொலை மிகை மதிப்பு மற்றும் y -ஆயத்தொலை மிகை மதிப்பு. எனவே, $(2,5)$ என்ற புள்ளி I ஆவது காற்பகுதியில் அமையும்.

(ஈ) x -ஆயத்தொலை குறை மதிப்பு மற்றும் y – ஆயத்தொலை மிகை மதிப்பு. எனவே, $(-7,3)$ என்ற புள்ளி II ஆவது காற்பகுதியில் அமையும்.

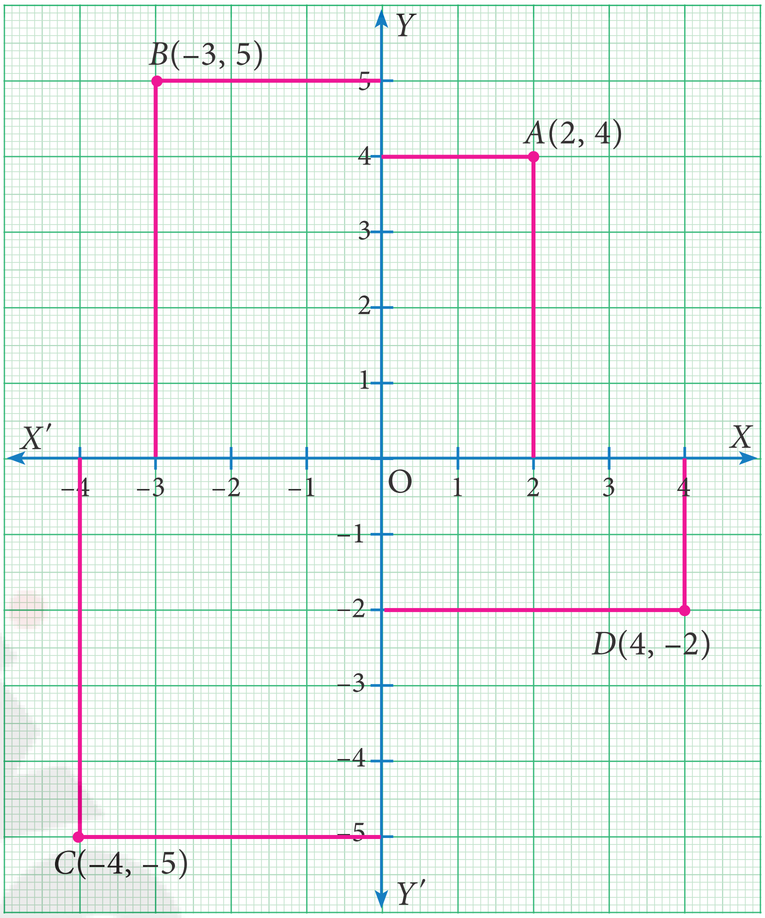
எடுத்துக்காட்டு 5.2

$A(2, 4)$, $B(-3, 5)$, $C(-4, -5)$, மற்றும் $D(4,-2)$ என்ற புள்ளிகளைக் கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கவும்.

5 Cordinate TM.indd 203 12/12/2019 3:36:17 PM

தீர்வு

(i) (2,4) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x = 2$ என்ற குத்துக்கோடு மற்றும் $y = 4$ என்ற கிடைமட்டக் கோடும் வரைக. இவ்விரு கோடுகளின் சந்திப்புப் புள்ளி (2,4) இன் அமைவிடம் ஆகும். இம்முறையில் A (2,4) என்ற புள்ளி கார்ட்டீசியன் தளத்தில் காற்பகுதி I இல் குறிக்கப்படுகிறது.



படம் 5.9

(ii) (–3,5) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x=-3$ என்ற குத்துக்கோடு மற்றும் $y = 5$ என்ற கிடைமட்டக் கோடும் வரைக. இவ்விரு கோடுகளின் சந்திப்புப் புள்ளி (–3,5) இன் அமைவிடம் ஆகும். இம்முறையில் $B(-3,5)$ என்ற புள்ளி கார்ட்டீசியன் தளத்தில் காற்பகுதி II இல் குறிக்கப்படுகிறது.

(iii) (–4,–5) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x=-4$ என்ற குத்துக்கோடு மற்றும் $y=-5$ என்ற கிடைமட்டக் கோடும் வரைக. இவ்விரு கோடுகளின் சந்திப்புப் புள்ளி (–4,–5) இன் அமைவிடம் ஆகும். இம்முறையில் $C(-4,-5)$ என்ற புள்ளி கார்ட்டீசியன் தளத்தில் காற்பகுதி III இல் குறிக்கப்படுகிறது.

(iv) (4, –2) என்ற புள்ளியைக் குறிக்க, $x = 4$ என்ற குத்துக்கோடு மற்றும் $y=-2$ என்ற கிடைமட்டக் கோடும் வரைக. இவ்விரு கோடுகளின் சந்திப்பு புள்ளி (4,–2) இன் அமைவிடம் ஆகும். இம்முறையில் $D(4,-2)$என்ற புள்ளி கார்ட்டீசியன் தளத்தில் காற்பகுதி IV இல் குறிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

கார்ட்டீசியன் தளத்தில் ஒரு புள்ளியின் x அச்சுத் தொலைவு மற்றும் y அச்சுத் தொலைவு இரண்டையும் இடமாற்றம் செய்தால் அப்புள்ளி கார்ட்டீசியன் தளத்தில் வேறொரு புள்ளியின் அமைவிடத்தைப் பெறும். எப்பொழுது அவை இரண்டும் ஒன்றாக அமையும் எனச் சிந்திக்க!

5 Cordinate TM.indd 204 12/12/2019 3:36:17 PM

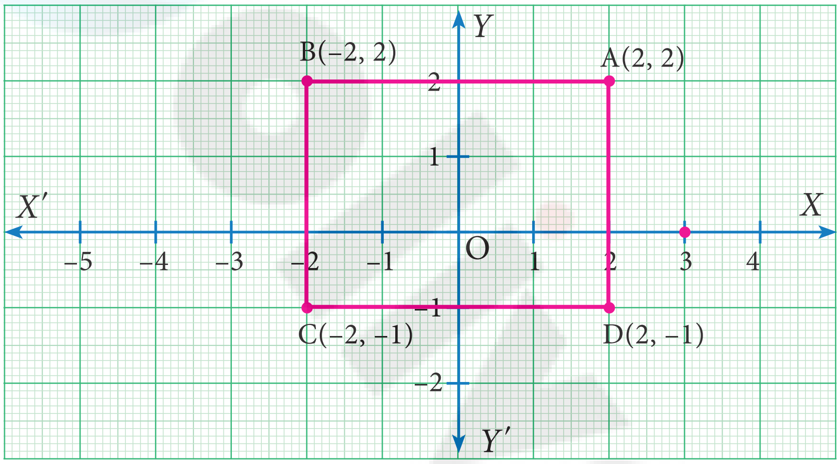
எடுத்துக்காட்டு 5.3 $A(2,2)$, $B(-2,2)$, $C(-2,-1)$, மற்றும் $D(2,-1)$ என்ற புள்ளிகளைக் கார்ட்டீசியன் தளத்தில் குறிக்கவும். அந்தப் புள்ளிகளை வரிசைப்படி இணைக்கும்போது கிடைக்கும் வடிவத்தை விவாதிக்கவும்.

குறிப்பு

x-அச்சிற்கு இணையான கோட்டில் அமைந்திருக்கும் புள்ளிகளின் y- அச்சுத் தொலைவு சமமானதாக அமையும்.

தீர்வு

புள்ளி	A	B	C	D
காற்பகுதி	I	II	III	IV



படம் 5.10

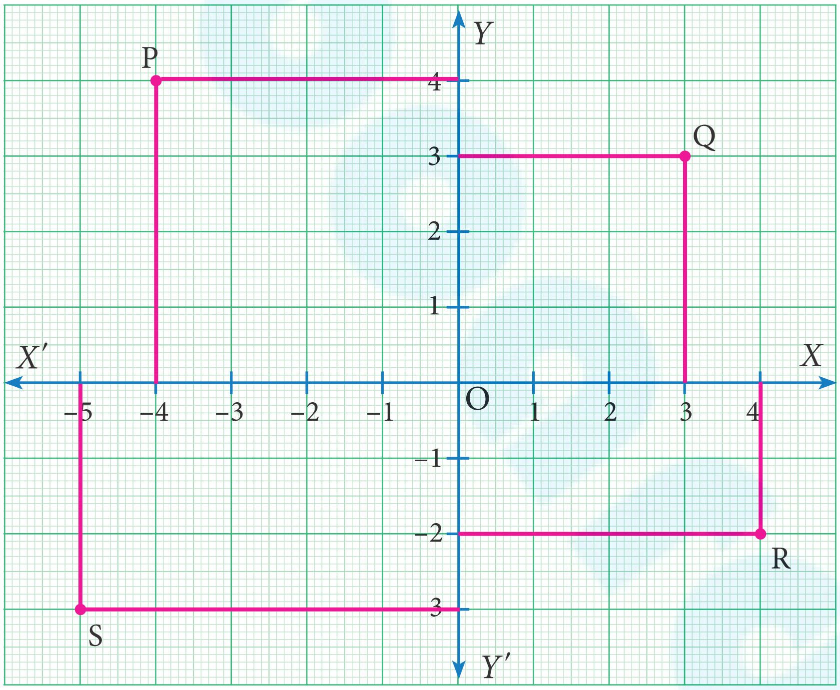
$ABCD$ ஒரு செவ்வகம் ஆகும். இச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் பரப்பளவைக் காண முடியுமா?

பயிற்சி 5.1

1. பின்வரும் புள்ளிகளை ஆய அச்சு வடிவத்தில் குறித்து அது எந்தக் காற்பகுதியில் அமைகிறது எனக் காண்க. $P(-7,6)$, $Q(7,-2)$, $R(-6,-7)$, $S(3,5)$ மற்றும் $T(3,9)$

2. அருகில் உள்ள படம் 5.11 இல் தரப்பட்டுள்ள கார்ட்டீசியன் தளத்தில் இருந்து, பின்வரும் புள்ளிகளின் கிடை அச்சுத் தொலைவு மற்றும் செங்குத்து அச்சுத் தொலைவை எழுதுக.

   (i) P (ii) Q
   (iii) R (iv) S



படம் 5.11

5 Cordinate TM.indd 205 12/12/2019 3:36:18 PM

3. பின்வரும் புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அவற்றை இணைக்கவும், கிடைக்கும் வடிவத்தைப் பற்றி தங்களின் கருத்தைக் கூறுக.

(i) (–5,3) (–1,3) (0,3) (5,3) (ii) (0,–4) (0,–2) (0,4) (0,5)

4. பின்வரும் புள்ளிகளை ஆயத்தொலைத் தளத்தில் குறித்து, வரிசைப்படி அவற்றை இணைக்கவும். எந்த வகையான வடிவியல் உருவம் கிடைக்கும்?

(i) (0,0) (–4,0) (–4,–4) (0,–4) (ii) (–3,3) (2,3) (–6,–1) (5,–1)

செயல்பாடு 1

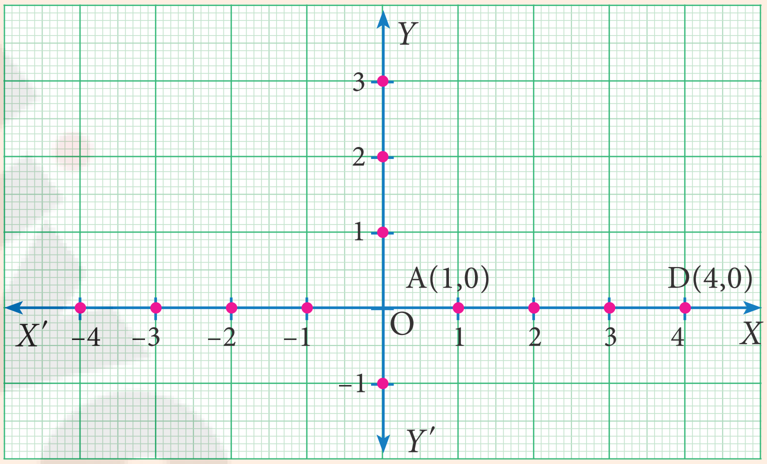
பின்வரும் புள்ளிகளை வரைப்படத் தாளில், 1 செ.மீ = 1 அலகு என அளவுத் திட்டம் எடுத்துக் குறிக்கவும்.

A (1,0) மற்றும் *D* (4,0) புள்ளிகள் ஒன்று மற்றொன்றில் இருந்து எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

AD மற்றும் *DA* காண்க.

AD = *DA* என்பது சரியா?

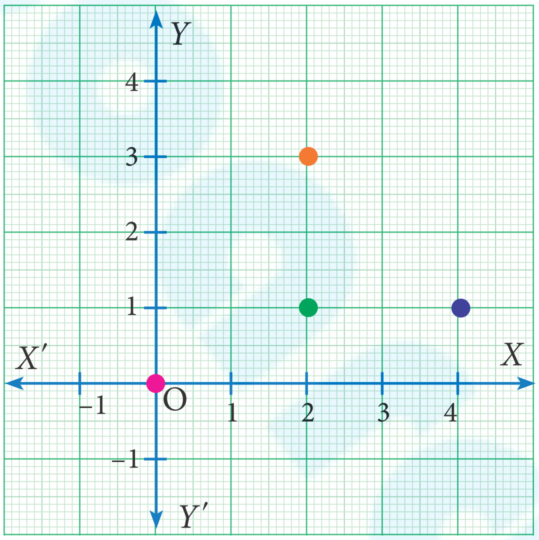
இதேபோல், மற்றொரு புள்ளி சோடிகளைக் குறித்து அவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தொலைவைச் சரிபார்க்க.



படம் 5.12

5.3 இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு (Distance between any Two Points)

அகிலாவும் சண்முகமும் சத்தியமங்கலத்தில் ஒரே தெருவில் வசிக்கும் இரு நண்பர்கள். இத்தெருவும் நூலகம் அமைந்துள்ள மற்றொரு தெருவும் சந்திக்கும் இடத்தில் சண்முகத்தின் வீடு அமைந்துள்ளது. சண்முகத்தின் வீட்டிற்கு அருகில் உள்ள பள்ளியில் இருவரும் படிக்கின்றார்கள். கீழேயுள்ள வரைபடத்தைப் பார்க்காமல் அவர்களின் வீடுகள், நூலகம் மற்றும் பள்ளியின் படங்களை நீயாக வரைய முயற்சி செய்க. பள்ளியானது, ஆதிப்புள்ளியில் உள்ளதாகக் கருதுக. (ஆயத்தொலை அமைப்பு மொழியின் எல்லா வழிமுறைகளையும் பயன்படுத்தி நாம் இதைச் செய்யலாமே!)



படம் 5.13

இப்பொழுது 1 அலகு = 50 மீட்டர்கள் என அளவுத் திட்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தைப் (படம் 5.13) பார்த்து நீங்கள்

5 Cordinate TM.indd 206 12/12/2019 3:36:18 PM

இங்குள்ள வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும்.

(1) சண்முகத்தின் வீட்டிலிருந்து அகிலாவின் வீடு எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

(2) சண்முகத்தின் வீட்டிலிருந்து நூலகம் எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

(3) சண்முகம் மற்றும் அகிலாவின் வீடுகளிலிருந்து பள்ளி எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

(4) அகிலாவின் வீட்டிலிருந்து நூலகம் எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

(5) அகிலாவின் வீட்டிலிருந்து சண்முகத்தின் வீடு எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது?

வினா எண் (1)–ற்கு விடையளித்த பின்பு கேள்வி (5)–ற்கான தேவை இருக்காது. புள்ளி Aஇலிருந்து Bஇக்கு உள்ள தொலைவும், புள்ளி B இலிருந்து A –க்கு உள்ள தொலைவும் சமம் எனத் தெள்ளதெளிவாகிறது. மேலும், நாம் பொதுவாகப் புள்ளி A–க்கும் B–க்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு என அழைப்போம். ஆனால் கணிதவியலாளர்கள் பொதுவாக எவ்வாறு பின்வரும் பண்புகளைக் குறித்துக்கொள்வார்களோ அதேபோல் நாம் இதையும் தொலைவு (A,B) = தொலைவு (B,A) எனக் குறித்துக்கொள்வது சிறந்தது. இது ஒரு தளத்தில் அமையும் எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும். ஆகவே, எவ்வாறாயினும் வினா எண் (5)உம் வினா எண் (1) உம் ஒன்றே.

மற்ற வினாக்களின் விடைதான் என்ன? அந்த வினாக்கள் அனைத்தும் வெவ்வேறானவையே. இரண்டு வீடுகளும் வடக்குத் தெற்காக ஒரே தெருவில் அமைந்துள்ளதை நாம் அறிவோம். இதிலிருந்து, y அச்சுத் தொலைவானது வினா எண்(1) இன் விடையாக அமைகிறது.

இதேபோன்று, நூலகமும் சண்முகத்தின் இல்லமும் கிழக்கு மேற்காகச் செல்லும் ஒரே தெருவில் இருப்பதால் x ஆயத் தொலைவுதான் (2) ஆவது வினாவிற்கான விடையாகும்.

எத்தகைய வழிகள் உள்ளன என்பதைப் பொருத்துதான் மூன்றாவது மற்றும் நான்காவது வினாக்களுக்கான விடை அமைகிறது. x மற்றும் y அச்சுகளுக்கு இணையாக 1, 2, 3 . . . எனக் குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளை உடைய ஒரேயொரு தெரு மட்டுமே உள்ளதாக நாம் கருதினால் தொலைவுகளைக் கூட்டுவதால் இவ்வினாக்களுக்கு நம்மால் விடையளிக்க இயலும். ஆயினும் அகிலாவின் இல்லத்திற்குக் கிழக்கே உள்ள பரந்த திடலைக் கருதுவோம்.

குறிப்பு

தொலைவு (A,B) = தொலைவு (B,A) என்ற சமன்பாடு சில நேரங்களில் உண்மையல்ல என்பது தெளிவு. A இலிருந்து B–க்குச் செல்லும் சாலையானது ஒரு வழிப்பாதையாக இருக்கும்பொழுது நீங்கள் மறுவழியில் செல்ல இயலுமா? இப்பொழுது B இலிருந்து A –க்குச் செல்லும் தொலைவு மாறுபடும். ஆனால் நாம் இவ்வாறான சிக்கல்கள் எல்லாவற்றையும் தவிர்த்து இருவழியில் செல்வதாகவே கருதுவோம்

ஒருவேளை திடலைக் கடந்து அவள் நடந்து செல்ல விரும்பக் கூடும். இவ்வேளையில் ஓரிடத்திலிருந்து மற்றோர் இடத்திற்குச் செல்ல பல வழிகள் இருப்பதால் அவற்றின் தொலைவினைப் பற்றிக் கணக்கிடுவது துல்லியமாக இருக்காது. எனவே, அதனைக் கணிக்க நமக்கு ஒரு வழிமுறை தேவை. A மற்றும் B –க்கு இடையே பல வழிகள் இருப்பதால் அவற்றில் மீச்சிறு தொலைவினைக் குறிக்கத் தொலைவு (A, B) என்பதைப் பயன்படுத்துவோம்.

தளத்திலுள்ள A மற்றும் B என்ற எவையேனும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவைப் பற்றிச் சிந்திக்கும்போது, A மற்றும் B–க்கு இடையே உள்ள நேர்க்கோட்டுத் தொலைவைத்தான் நாம் தொலைவு (A, B) எனக் கருதுவோம். இந்தக் கருத்தே ஆயத்தொலை அமைப்பிலும் முக்கியமான காரணியாகும்! அதற்கு முன்னர், நாம் எடுத்துக்காட்டின் உதவிக்கொண்டு மேலும் இரு வினாக்களுக்கு விடையளிக்க முயலுவோம்.

5 Cordinate TM.indd 207 12/12/2019 3:36:18 PM

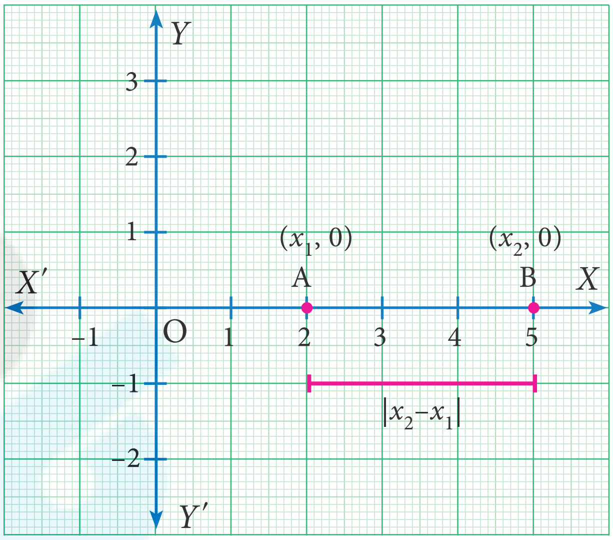
1. பள்ளியை ஆதியாகக் கொண்டு இரு இல்லங்கள், பள்ளி மற்றும் நூலகத்திற்கான ஆயத் தொலைவுகளை வரையறுக்கவும்.
2. மேற்கண்ட எவையேனும் இரு இடங்களுக்கிடையே உள்ள தூரத்தினை ஆயத்தொலைவுகள் மூலம் கணக்கிடுக.

"நேர்க்கோட்டுத் தொலைவு" என்பது "காகத்தின் பறக்கும் பாங்கு" என அழைக்கப்படுகிறது. அதாவது இடையே தரை வழியாக எத்தன்மையான இடையூறு நேர்ந்தாலும் பொருட்படுத்தாது Aஇலிருந்து B–க்குச் செல்ல வேண்டுமெனில் பறக்கத்தான் வேண்டும் என்பதே இதன் பொருளாகும். எனினும் எந்தப் பறவையும் அவ்வாறு நேர்க்கோட்டில் பறப்பதில்லை என்பது உறுதி.

இதற்கு முறையான விடையளிக்க, $A = (x, y)$ மற்றும் $B = (x', y')$ எனத் தளத்தில் அமையும் இரு புள்ளிகளுக்கிடையே தொலைவு (A, B) கணக்கிட நம்மால் இயலும். மேலும், x, y, x' மற்றும் y' ஆகியவற்றின் வாயிலாக ஒரு வாய்ப்பாட்டை எளிதாகத் தருவிக்கலாம். இதனை நாம் தருவிக்க முயல்வோம்.

5.3.1 ஆய அச்சுகளில் அமைந்த இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு (Distance between Two Points on the Coordinate Axes)

x–அச்சின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் : x அச்சில் அமைந்த இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு என்பது அவற்றின் x அச்சுத் தொலைவுகளின் வித்தியாசம் ஆகும்.



படம் 5.14

$A(x_1, 0)$ மற்றும் $B(x_2, 0)$ என்ற இரு புள்ளிகளை x அச்சின் மேல் கருதுவோம்.

புள்ளி Aஇல் இருந்து Bஇன் தொலைவு

$AB = OB - OA = x_2-x_1$ ஏனெனில் $x_2>x_1$

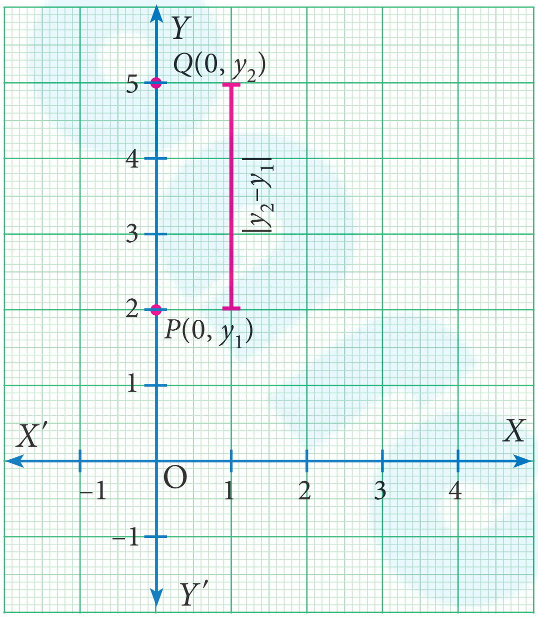
அல்லது

$= x_1-x_2$ ஏனெனில் $x_1>x_2$

$AB = |x_2-x_1|$

(இதை x_2-x_1 இன் மட்டு மதிப்பு அல்லது மிகை மதிப்பு [absolute value] எனப் படிக்க வேண்டும்.)

y–அச்சின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் : இதேபோல, y அச்சில் அமைந்த இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு என்பது அவற்றின் y அச்சுத் தொலைவுகளின் வித்தியாசம் ஆகும்.



படம் 5.15

$P(0,y_1)$, $Q(0,y_2)$ என்ற புள்ளிகளைக் கருதுக.

புள்ளி P இலிருந்து Q இன் தொலைவு

$PQ = OQ - OP.$

$= y_2 - y_1$ ஏனெனில் $y_2 > y_1$ அல்லது

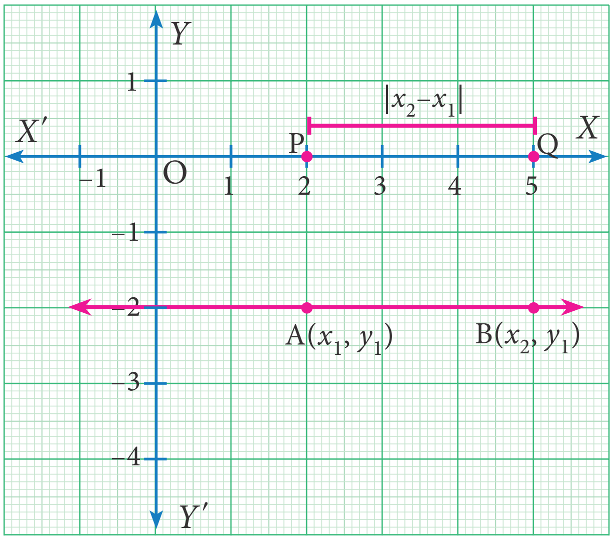
5 Cordinate TM.indd 208 12/12/2019 3:36:19 PM

$= y_1 - y_2$ ஏனெனில் $y_1 > y_2$, $PQ = |y_2 - y_1|$

(இதை $y_2 - y_1$ இன் மட்டு மதிப்பு அல்லது மிகை மதிப்பு [absolute value] எனப் படிக்க வேண்டும்)

5.3.2 ஆய அச்சுகளுக்கு இணையான கோட்டில் அமையும் புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு (Distance Between Two Points Lying on a Line Parallel to Coordinate Axes)

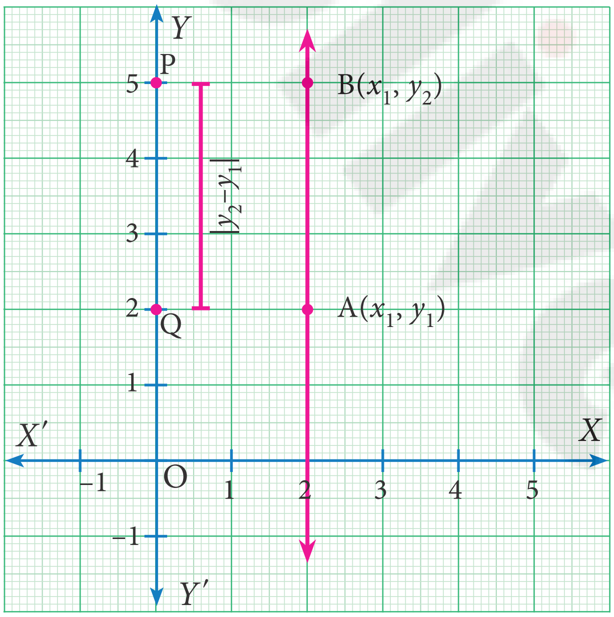
$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_1)$ என்ற புள்ளிகளைக் கருதுவோம். அவற்றின் y அச்சுத் தொலைவுகள் சமமாக உள்ளதால் அவை x அச்சிற்கு இணையாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன. A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளில் இருந்து x அச்சிற்கு முறையே AP மற்றும் BQ என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரைக. படத்தை (படம் 5.16) உற்று நோக்கினால் AB இன் தொலைவு, PQ இன் தொலைவிற்குச் சமமாக அமைகிறது.



படம் 5.16

AB இன் தொலைவு $= PQ$ இன் தொலைவு

$= |x_2 - x_1|$



படம் 5.17

[இரு புள்ளிகளின் x அச்சுத் தொலைவுகளின் வித்தியாசம்]

இதேபோல் புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_1, y_2)$ இணைக்கும் கோடு y அச்சிற்கு இணையாகும். எனவே, இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $|y_2 - y_1|$ (இரு புள்ளிகளின் y அச்சுத் தொலைவுகளின் வேறுபாடு) ஆகும்.

சிந்தனைக் களம்

ஒருவர் 3 கி.மீ. தூரம் வடக்கு நோக்கிச் செல்கிறார். பிறகு அங்கிருந்து 4 கி.மீ. கிழக்கு நோக்கிச் செல்கிறார் எனில், தற்போது ஆரம்ப இடத்திலிருந்து எவ்வளவு தொலைவில் இருக்கிறார்?

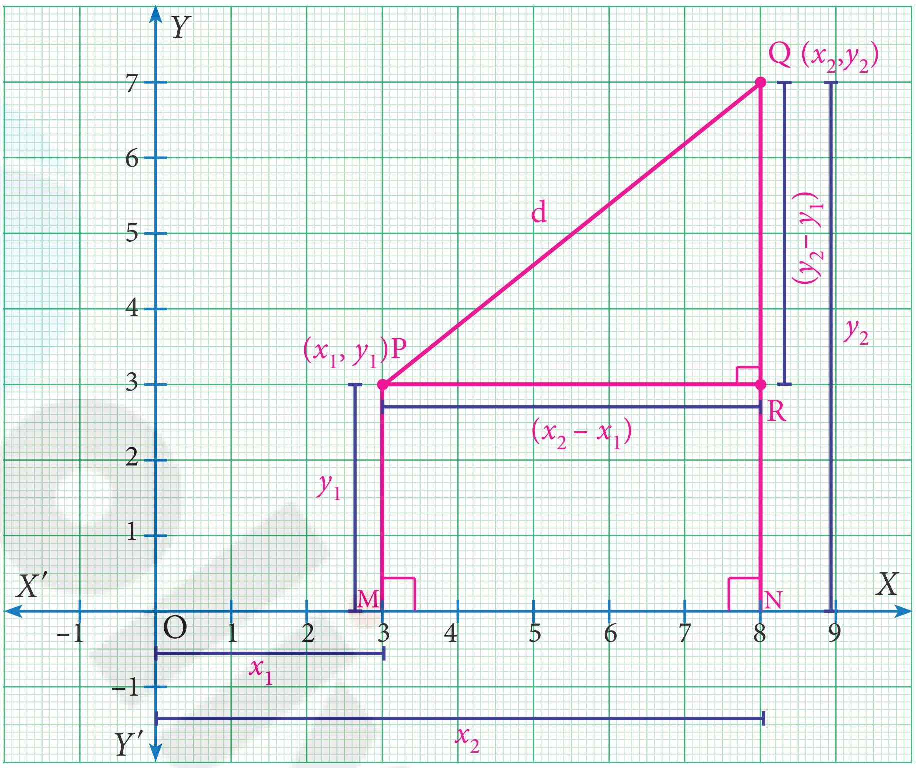
5.3.3 தளத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு (Distance Between the Two Points on a Plane)

$P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ என்பன கார்ட்டீசியன் தளத்தில் (அல்லது xy தளம்) உள்ள இரு புள்ளிகள் என்க. மேலும் அப்புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு "d" என்க. அதாவது $PQ=d$

படி 1 ஆய அச்சுகளின் விதிப்படி,

$OM = x_1$; $MP = y_1$ $ON = x_2$; $NQ = y_2$

5 Cordinate TM.indd 209 12/12/2019 3:36:20 PM



படம் 5.18

இங்கு $PR \perp NQ$

மேலும் $PR = MN$ (செவ்வகம் $MNRP$ இன் எதிர்ப் பக்கங்கள்)

$= ON - OM$ (O இல் இருந்து தொலைவு)

$= x_2 - x_1$ ....(1)

மற்றும் $RQ = NQ - NR$

$= NQ - MP$ (செவ்வகம் $MNRP$ இன் எதிர்ப்பக்கங்கள்)

$= y_2 - y_1$ ....(2)

CTG2PK

படி 2 ΔPQR இல் R ஒரு செங்கோணம் ($PR \perp NQ$).

$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி)

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$ (வர்க்க மூலத்தின் மிகைப்பகுதி)

குறிப்பு

இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு

- $P(x_1, y_1)$ மற்றும் $Q(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவிற்கான வாய்ப்பாடு $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.
- PQ இன் தொலைவு = QP இன் தொலைவு
  $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$
- $P(x_1, y_1)$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி $O(0,0)$ இக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $OP = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

5 Cordinate TM.indd 210 12/12/2019 3:36:21 PM

5.3.4 தொலைவுப் பண்புகள் (Properties of Distances)

ஒரு தளத்தில் அமைந்த எவையேனும் A, B எனும் இரு புள்ளிகளுக்குத் தொலைவு (A, B) = தொலைவு (B, A) என நாம் முன்னரே கண்டோம். இங்கு மற்ற சில பண்புகளைப் பற்றிச் சிந்திப்போம்.

ஒரு தளத்திலுள்ள A மற்றும் B ஆகிய இரு புள்ளிகளும் ஒரே புள்ளியாக $(A=B)$ இருந்தால் மட்டுமே தொலைவு $(A, B) = 0$ ஆக இருக்கும்.

A மற்றும் B ஆகிய எவையேனும் இரு தனித்த புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு $(A, B)>0$.

A, B மற்றும் C என மூன்று புள்ளிகளைக் கருதுவோம். அவற்றின் x ஆயத் தொலைவுகள் ஒன்றாக இருந்தால் அவை மூன்றும் y அச்சுக்கு இணையாக ஒரு கோட்டிலமைந்த புள்ளிகளாக இருக்கும் என நாம் அறிவோம். அதே போன்று, y அச்சுத் தூரங்கள் ஒன்றாக இருப்பின் அவை மூன்றும், x அச்சுக்கு இணையாக ஒரே கோட்டிலமைந்த புள்ளிகளாக இருக்கும் என நாம் அறிவோம். ஆயினும் ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகளாக அமைய இவை மட்டுமே வரையறையன்று. மேலும், புள்ளிகள் $(0,0)$, $(1,1)$ மற்றும் $(2, 2)$ ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகளாகும். இந்த ஆயத் தொலைவுப் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகளாகத் திகழ எத்தகைய தொடர்பினைக் கொண்டிருக்க வேண்டும் என நினைக்கத் தோன்றுகிறது அல்லவா?

இங்குதான் தொலைவு வாய்ப்பாடு நமக்குப் பயன்படுகின்றது. A, B மற்றும் C ஆகிய புள்ளிகள் முக்கோணத்தின் முனைகளாக முறையாகப் பெயரிடப்பட்ட பிறகு,

தொலைவு (A, B) + தொலைவு $(B, C) >$ தொலைவு (A, C) ஆக இருக்கும் என நாம் அறிவோம்.

ஒரு தளத்திலுள்ள மூன்று புள்ளிகள் எப்போது முக்கோணத்தை அமைக்காது? அவை ஒரே கோட்டில் அமையும்போது, இவ்வாறான நிகழ்வில் நாம்,

தொலைவு(A,B) + தொலைவு(B,C) = தொலைவு(A,C) என நிறுவலாம்.

அதேபோன்று, A, B மற்றும் C ஆகியன ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள், மேலும் $\angle ABC = 90^\circ$ எனில் நாம் அறிவது,

தொலைவு$(AB)^2$+ தொலைவு$(BC)^2$ = தொலைவு$(AC)^2$.

இதன் மறுதலையையும் நம்மால் மெய்ப்பித்துக் காட்ட முடியும். அதாவது புள்ளிகள் A, B மற்றும் C என்பன மேற்காணும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்தால் அப்புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகவே அமையும்.

குறிப்பிட்ட வடிவியல் வடிவங்களுக்கான வினாக்களுக்கு விடையளிப்பதில் தொலைவுப் பண்புகள் எவ்வாறு பயன்படுகிறது என்பதைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் விளக்குகிறது.

5 Cordinate TM.indd 211 12/12/2019 3:36:21 PM

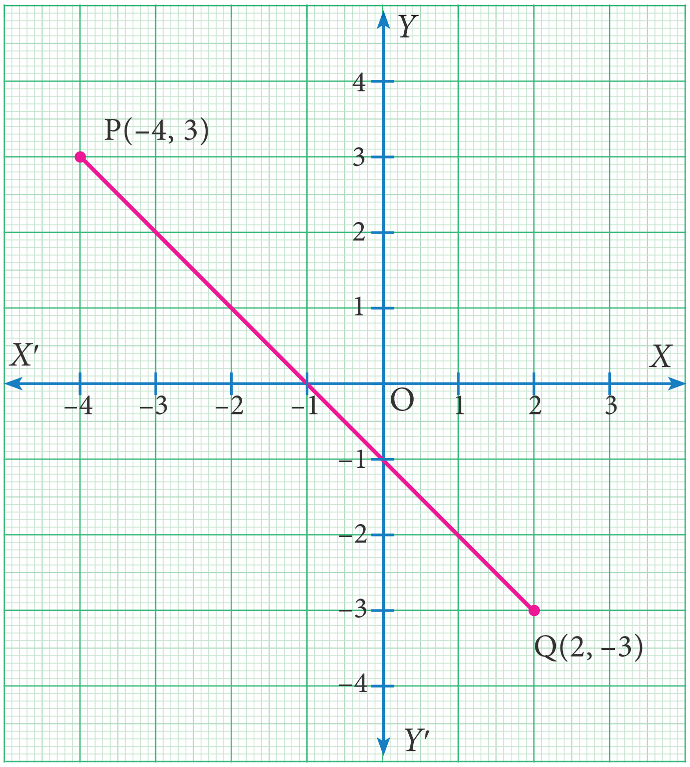
எடுத்துக்காட்டு 5.4

(–4, 3), (2,–3) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவினைக் காண்க.

தீர்வு

(-4, 3), (2,-3) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(2+4)^2 + (-3-3)^2}$$
$$= \sqrt{(6^2 + (-6)^2)} = \sqrt{(36+36)}$$
$$= \sqrt{(36 \times 2)}$$
$$= 6\sqrt{2}$$



படம் 5.19

எடுத்துக்காட்டு 5.5

$A(3,1)$, $B(6,4)$ மற்றும் $C(8,6)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோடமையும் புள்ளிகள் என நிறுவுக.

தீர்வு

தொலைவு வாய்பாட்டின் படி

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{(4+4)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$$

ஆகவே, தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன.

ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள்

கொடுத்துள்ள மூன்று புள்ளிகளை இரண்டிரண்டு புள்ளிகளின் சோடிகளாக எழுதி, மூன்று சோடிகளைப் பெறலாம். அவற்றுள் ஏதேனும் இரண்டு சோடிகளின் தொலைவுகளின் கூடுதல் மூன்றாவது சோடியின் தொலைவுக்குச் சமமாக இருந்தால் அம்மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும். A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையுமானால் $AB + BC = AC$ எனக் கூறலாம்

எடுத்துக்காட்டு 5.6

$A(7, 10)$, $B(-2, 5)$, $C(3, -4)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.

தீர்வு $A = (7, 10)$, $B = (-2, 5)$, $C = (3,-4)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-2-7)^2 + (5-10)^2}$$
$$= \sqrt{(-9)^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{(81+25)}$$

5 Cordinate TM.indd 212 12/12/2019 3:36:22 PM

$$= \sqrt{106}$$

$$AB^2 = 106 \qquad \ldots (1)$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{(5)^2 + (-9)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$$

$$BC^2 = 106 \qquad \ldots (2)$$

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - 7)^2 + (-4 - 10)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-14)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 196} = \sqrt{212}$$

$$AC^2 = 212 \qquad \ldots (3)$$

(1),(2) மற்றும் (3) இல் இருந்து ,

$$AB^2 + BC^2 = 106 + 106 = 212 = AC^2$$

அதாவது $AB^2 + BC^2 = AC^2$

ஆகவே தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் உச்சி B இல் செங்கோணத்தைக் கொண்ட செங்கோண ΔABC ஐ அமைக்கும்.

செங்கோண முக்கோணம்

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் இரண்டு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலானது அதன் கர்ணமாகிய மூன்றாவது பக்கத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.7

$A(-4, -3)$, $B(3, 1)$, $C(3, 6)$, $D(-4,2)$ என்ற வரிசைப்படி எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட புள்ளிகள் ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகளாக அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு புள்ளிகள் $A(-4, -3)$, $B(3, 1)$, $C(3, 6)$, $D(-4, 2)$ என்பன ஏதேனும் ஒரு நாற்கரம் $ABCD$ இன் உச்சிகள் என்க.

தொலைவு வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்த,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3 + 4)^2 + (1 + 3)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

$$BC = \sqrt{(3 - 3)^2 + (6 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{0 + 25} = \sqrt{25} = 5$$

$$CD = \sqrt{(-4 - 3)^2 + (2 - 6)^2}$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

$$AD = \sqrt{(-4 + 4)^2 + (2 + 3)^2} = \sqrt{(0)^2 + (5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$AB = CD = \sqrt{65}$ மற்றும் $BC = AD = 5$

எதிரெதிர்ப்பக்கங்கள் சமம் என்பதால் தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் இணைகரம் $ABCD$ இன் உச்சிகளாக அமையும்.

இணைகரம்

இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமநீளமுடையவை

எடுத்துக்காட்டு 5.8

$A(7, 3)$ மற்றும் x அச்சின் மீது அமைந்த புள்ளி B இன் x அச்சுத் தொலைவு 11 எனில் AB இன் தொலைவைக் காண்க.

5 Cordinate TM.indd 213 12/12/2019 3:36:24 PM

தீர்வு புள்ளி B ஆனது x அச்சின் மீது அமைவதால் அதன் y அச்சுத் தொலைவு 0 ஆகும்.

எனவே, புள்ளி $B(11, 0)$

$A(7, 3)$, $B(11, 0)$ என்ற புள்ளிகளுக்கிடையேயான தொலைவு,

தொலைவு வாய்ப்பாட்டின்படி,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(11-7)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

எடுத்துக்காட்டு 5.9

P, Q மற்றும் R என்ற புள்ளிகளின் அச்சுத் தொலைவுகள் முறையே $(6,-1)$, $(1, 3)$ மற்றும் $(a, 8)$. மேலும், $PQ = QR$ எனில் 'a' இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் $P(6, -1)$, $Q(1, 3)$ $R(a, 8)$

$$PQ = \sqrt{(1-6)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (4)^2} = \sqrt{41}$$

$$QR = \sqrt{(a-1)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (5)^2}$$

கணக்கின்படி $PQ = QR$

ஆகவே $\sqrt{41} = \sqrt{(a-1)^2 + (5)^2}$

$41 = (a-1)^2 + 25$ [இருபுறமும் வர்க்கம் காண]

$(a-1)^2 + 25 = 41$

$(a-1)^2 = 41 - 25$

$(a-1)^2 = 16$

$(a-1) = \pm 4$ [வர்க்க மூலம் காண]

$a = 1 \pm 4$

$a = 1 + 4$ அல்லது $a = 1 - 4$

$a = 5$ அல்லது $a = -3$

CTPXR8

எடுத்துக்காட்டு 5.10

$A(2, 2)$, $B(8,-4)$ என்பன தரப்பட்டுள்ள தளத்திலுள்ள இரு புள்ளிகள் என்க. x-அச்சில் (மிகைப்பகுதி) P என்ற புள்ளி அமைந்துள்ளது. இது ABஐ $1:2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது எனில், P இன் அச்சுத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு $A(2, 2)$ மற்றும் $B(8, -4)$, $P = (x, 0)$ என்க. (P ஆனது x அச்சின் மீதுள்ளதால்)

தொலைவு வாய்ப்பாட்டின்படி,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AP = \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 4} = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$$

$$BP = \sqrt{(x-8)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{x^2 - 16x + 64 + 16} = \sqrt{x^2 - 16x + 80}$$

கணக்கின்படி, $AP : PB = 1 : 2$

5 Cordinate TM.indd 214 12/12/2019 3:36:25 PM

அதாவது $\frac{AP}{BP} = \frac{1}{2}$ $(\because BP = PB)$

$$2AP = BP$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$4AP^2 = BP^2$$

$$4(x^2 - 4x + 8) = (x^2 - 16x + 80)$$

$$4x^2 - 16x + 32 = x^2 - 16x + 80$$

$$3x^2 - 48 = 0$$

$$3x^2 = 48$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

புள்ளி Pஆனது x அச்சில் (மிகைப்பகுதியில்) அமைவதால்,

புள்ளி P இன் அச்சுத் தொலைவுகள் $(4, 0)$

எடுத்துக்காட்டு 5.11 புள்ளிகள் $(9, 3), (7, -1)$ மற்றும் $(-1, 3)$ வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $(4, 3)$ என நிறுவுக. மேலும் அவ்வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

தீர்வு $P(4, 3), A(9, 3), B(7, -1)$ மற்றும் $C(-1, 3)$ என்க

புள்ளிகள் A, B, மற்றும் C வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் P என்பதால் அப்புள்ளிகள் P இல் இருந்து சம தூரத்தில் அமையும். அதாவது $PA = PB = PC$

தொலைவு வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்த,

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AP = PA = \sqrt{(4-9)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$BP = PB = \sqrt{(4-7)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$CP = PC = \sqrt{(4+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(5)^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$PA = PB = PC = 5$, ஆரம் $= 5$.

எனவே, P என்ற புள்ளி A, B மற்றும் C என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையமாகும்.

பயிற்சி 5.2

1. கீழ்க்காணும் புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவைக் காண்க.
   (i) $(1, 2)$ மற்றும் $(4, 3)$ (ii) $(3,4)$ மற்றும் $(-7, 2)$
   (iii) (a, b) மற்றும் (c, b) (iv) $(3, -9)$ மற்றும் $(-2, 3)$

2. தரப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் ஒரு கோடமையும் புள்ளிகளா என ஆராய்க.
   (i) $(7,-2),(5,1),(3,4)$ (ii) $(a,-2), (a,3), (a,0)$

5 Cordinate TM.indd 215 12/12/2019 3:36:26 PM

3. பின்வரும் புள்ளிகள் வரிசைப்படி எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால், அது ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

   (i) $A\ (5,4), B(2,0), C\ (-2,3)$ (ii) $A\ (6,-4), B\ (-2, -4), C\ (2,10)$

4. பின்வரும் புள்ளிகள் வரிசைப்படி எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால், அது ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

   (i) $A(2, 2), B(-2, -2), C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ (ii) $A(\sqrt{3}, 2), B\ (0,1), C(0,3)$

5. பின்வரும் புள்ளிகள் வரிசைப்படி எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால், அது ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

   (i) $A(-3, 1), B(-6, -7), C\ (3, -9), D(6, -1)$ (ii) $A\ (-7, -3), B(5,10), C(15,8), D(3, -5)$

6. பின்வரும் புள்ளிகள் வரிசைப்படி எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால், அது ஒரு சாய்சதுரத்தை அமைக்குமா என ஆராய்க.

   (i) $A(3,-2), B\ (7,6), C\ (-1,2), D\ (-5, -6)$ (ii) $A\ (1,1), B(2,1), C\ (2,2), D(1,2)$

7. புள்ளிகள் $A(-1, 1)$, $B(1,3)$ மற்றும் $C(3, a)$, மேலும் $AB = BC$ எனில் 'a' இன் மதிப்பைக் காண்க.

8. புள்ளி A இன் x அச்சுத் தொலைவு அதன் y அச்சுத் தொலைவிற்குச் சமம். மேலும், $B(1, 3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து அப்புள்ளி A ஆனது 10 அலகு தொலைவில் இருக்கிறது. எனில் A இன் அச்சுத் தொலைவுகளைக் காண்க.

9. புள்ளி (x, y) ஆனது புள்ளிகள் $(3, 4)$ மற்றும் $(-5, 6)$ என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சம தொலைவில் இருக்கிறது. x மற்றும் y இக்கு இடையே உள்ள உறவைக் காண்க.

10. புள்ளிகள் $A(2, 3)$ மற்றும் $B(2,-4)$ என்க. x அச்சின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளி P ஆனது $AP = \frac{3}{7} AB$ என்ற வகையில் அமைந்துள்ளது எனில், புள்ளி P இன் அச்சுத் தொலைவைக் காண்க.

11. புள்ளிகள் $(1, 2)$, $(3, -4)$ மற்றும் $(5, -6)$ இன் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மையம் $(11, 2)$ என நிறுவுக.

12. ஆதிப் புள்ளியை மையமாக உடைய வட்டத்தின் ஆரம் 30 அலகுகள். அந்த வட்டம் ஆய அச்சுகளை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க. இவ்வாறான எந்த இரு புள்ளிகளுக்கும் இடையே உள்ள தொலைவைக் காண்க.

5.4 ஒரு கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி (The Mid–point of a Line Segment)

படம் 5.20

ஒருவர் தனது இரு சக்கர வண்டியைக் கல்லூரியில் இருந்து கிழக்கு நோக்கி நேராகச் செல்லும் பாதையில் கிராமம் A–க்கும் பின்பு கிராமம் B–க்கும் செலுத்துவதாகக் கற்பனை செய்யுங்கள். இரண்டு கிராமங்களுக்கு இடையில் எரிபொருள் நிரப்பும் நிலையம் இல்லை. A மற்றும் B–க்கு இடையில் அமைந்த ஒரு புள்ளியில், தனது பயணத்திற்குத் தேவையான எரிபொருள் இல்லை என்பதை அவர் உணர்கிறார். இந்நிலையில், அவர் A–க்குத் திரும்பி விடுவாரா அல்லது தனது பயணத்தை B-ஐ நோக்கித் தொடர்வாரா?

குறைந்த தூரம் எது? இவற்றை எவ்வாறு அறிவது? இதற்கு அவர் நடுவில் அமைந்த மையப்புள்ளியைக் கடந்து விட்டாரா என்பதை அறிய வேண்டியுள்ளது

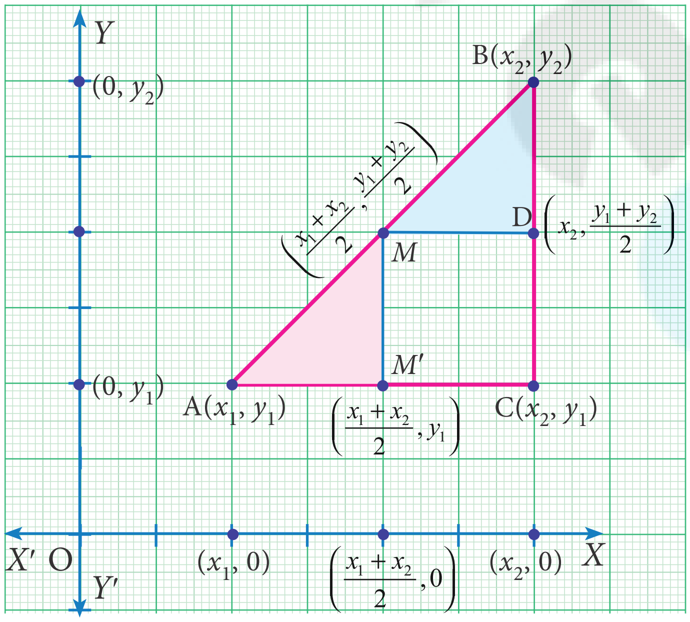
படம் 5.21

மேற்காணும் படம் 5.21 ஆனது இந்தச் சூழ்நிலையை விளக்குகிறது. கல்லூரியானது ஆதி O விலும், இதிலிருந்து கிராமம் A மற்றும் கிராமம் B முறையே தொலைவுகள் x_1 மற்றும் x_2 விலும் $(x_1 < x_2)$ அமைந்துள்ளதாகக் கற்பனை செய்வோம். AB இன் நடுப்புள்ளி M எனில் x ஆனது பின்வரும் வழியில் பெறப்படுகின்றது.

$AM = MB$ மற்றும் $x - x_1 = x_2 - x$

இதிலிருந்து, $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ எனப் பெறலாம்.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்பன இரு புள்ளிகள், படம் 5.22 இல் கோட்டுத் துண்டு AB இன் நடுப்புள்ளி $M(x, y)$ எனில், M' என்பது AC இன் நடுப்புள்ளியாகும். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் பக்கங்களின் மையக்குத்துக் கோடுகள் கர்ணத்தின் நடுப்புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும். (இது படத்தில் காணும் வண்ணமிடப்பட்ட இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பண்புகளில் இருந்தும் பெறப்படுகின்றது. இவ்வகை முக்கோணங்களில் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்).



படம் 5.22

மற்றொரு வகையில் தீர்வு காணல்

(விகிதச் சமப் பண்பைப் பயன்படுத்தி)

நாம் புள்ளி M ஐ $M(x,y)$ எனக் கருதுவோம். இப்போது $\Delta AMM'$ மற்றும் ΔMBD ஆகியவை விகிதச் சமமானவை. எனவே,

$$\frac{AM'}{MD} = \frac{MM'}{BD} = \frac{AM}{MB}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{1}{1} \quad (AM = MB)$$

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = 1$ ஐக் கருதுக.

$$2x = x_2 + x_1 \Rightarrow x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

இதேபோல், $y = \dfrac{y_2 + y_1}{2}$

M இன் x ஆயத்தொலைவு, A மற்றும் C இன் x ஆயத்தொலைவுகளின் சராசரி $= \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, மேலும் இதேபோல், M இன் y-ஆயத் தொலைவு, B மற்றும் C இன் y ஆயத்தொலைவுகளின் சராசரி $= \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ ஆகும்.

5 Cordinate TM.indd 217 12/12/2019 3:36:34 PM

புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ஆகும்.

சிந்தனைக்களம்

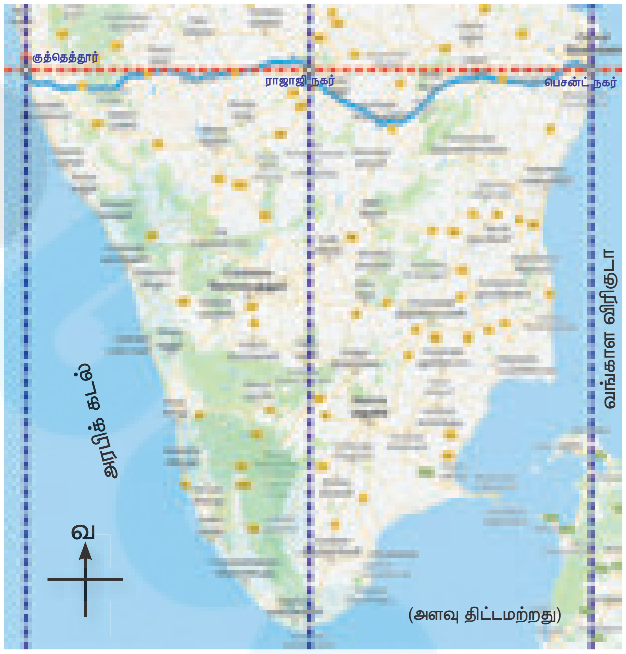
$AD = 4$ செமீ மேலும், D ஆனது AC இன் நடுப்புள்ளி மற்றும் C ஆனது AB இன் நடுப்புள்ளி எனில் AB இன் நீளம் காண்க.

எடுத்துக்காட்டாக, புள்ளிகள் $(-8,-10)$ மற்றும் $(4,-2)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு $x_1 = -8$, $x_2 = 4$, $y_1 = -10$ மற்றும் $y_2 = -2$.

தேவையான நடுப்புள்ளி ஆனது $\left(\frac{-8+4}{2}, \frac{-10-2}{2}\right)$ அல்லது $(-2,-6)$.

நம்முடைய நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழலில் நடுப்புள்ளியின் பயன்பாட்டைப் பார்க்கலாம். பின்வரும் நகரங்களின் தீர்க்கரேகை மற்றும் அட்சரேகையைக் கருதுவோம்.

நகரங்களின் பெயர்	தீர்க்கரேகை	அட்சரேகை
சென்னை (பெசன்ட் நகர்)	$80.27°$ கி	$13.00°$ வ
மங்களூரு (குத்தெத்தூர்)	$74.85°$ கி	$13.00°$ வ
பெங்களூரு (ராஜாஜி நகர்)	$77.56°$ கி	$13.00°$ வ



படம் 5.23

நாம் சென்னை $(80.27°$ கி, $13.00°$ வ$)$ மற்றும் மங்களூரு $(74.85°$ கி, $13.00°$ வ$)$ ஆகியவற்றின் தீர்க்கரேகை மற்றும் அட்ச ரேகைகளை இணைகளாக எடுக்கலாம். மேலும் பெங்களூருவானது சென்னை மற்றும் மங்களூருவிற்கு நடுவில் அமைந்துள்ள நகரமாகும். இப்பொழுது நாம் ஆயத்தொலைவுகளின் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டால், $\left(\frac{80.27+74.85}{2}, \frac{13.00+13.00}{2}\right)$ என அமையும். இது பெங்களூருவின் தீர்க்கரேகை மற்றும் அட்சரேகையான $(77.56°$ கி, $13.00°$ வ$)$ஐக் கொடுக்கின்றது. மேற்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளில் இருந்து மையத்தில் அமைந்துள்ள புள்ளியானது மற்ற இரண்டு புள்ளிகளுக்கும் நடுப் புள்ளியாகும். மேலும் அந்தப் புள்ளியானது மற்ற இரண்டு புள்ளிகளைச் சம விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

5 Cordinate TM.indd 218 12/12/2019 3:36:37 PM

எடுத்துக்காட்டு 5.12 ஒரு வட்டத்தின் மையப்புள்ளி $(3,-4)$. AB ஆனது அந்த வட்டத்தின் விட்டம் மற்றும் $B(5,-6)$ எனில் A இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

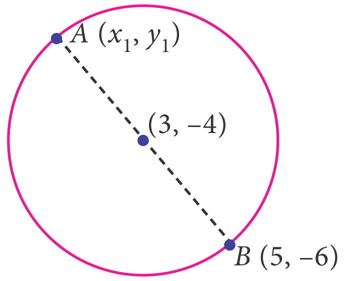
A இன் ஆயத்தொலைவு (x_1, y_1) என்க, $B(5,-6)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. விட்டம் AB இன் நடுப்புள்ளி வட்டத்தின் மையம் என்பதால், நாம் பெறுவது,

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3 \qquad \frac{y_1+y_2}{2}=-4$$

$$x_1+5=6 \qquad y_1-6=-8$$

$$x_1=6-5 \qquad y_1=-8+6$$

$$x_1=1 \qquad y_1=-2$$



படம் 5.24

எனவே, A இன் ஆயத்தொலைவுகள் $(1,-2)$ ஆகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

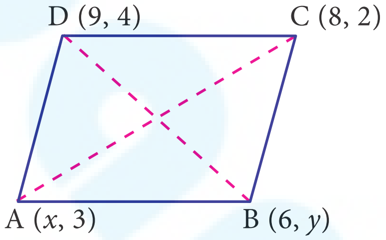
(i) $A(3,0)$ மற்றும் $B(-5,4)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி X என்க. மேலும் $P(-11,-8)$ மற்றும் $Q(8,-2)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி Y என்க. கோட்டுத் துண்டு XY இன் நடுப்புள்ளி காண்க.

(i) $A(8,-5)$ மற்றும் $B(-2,11)$, ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி $(3,x)$ எனில் 'x' இன் மதிப்பு காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 5.13 $(x,3),(6,y),(8,2)$ மற்றும் $(9,4)$ என்பன வரிசையாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட இணைகரத்தின் உச்சிகள் எனில் x மற்றும் y இன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$A(x,3)$, $B(6,y)$, $C(8,2)$ மற்றும் $D(9,4)$ என்பவை இணைகரம் $ABCD$ இன் உச்சிகள் என்க. வரையறையின்படி, மூலைவிட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும்



படம் 5.25

AC இன் நடுப்புள்ளி = BD இன் நடுப்புள்ளி

$$\left(\frac{x+8}{2},\frac{3+2}{2}\right)=\left(\frac{6+9}{2},\frac{y+4}{2}\right)$$

இருபுறமும் ஆயத் தொலைவுகளைச் சமப்படுத்த, நாம் பெறுவது

F6PZA2

5 Cordinate TM.indd 219 12/12/2019 3:36:41 PM

$$\frac{x+8}{2}=\frac{15}{2} \quad \text{மற்றும்} \quad \frac{5}{2}=\frac{y+4}{2}$$

$$x+8=15 \qquad 5=y+4$$

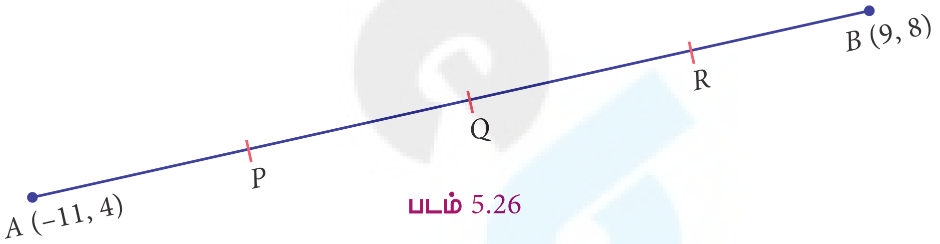
$$x=7 \qquad y=1$$

இதிலிருந்து, $x = 7$ மற்றும் $y = 1$.

சிந்தனைக்களம்

$A(6,1)$, $B(8,2)$ மற்றும் $C(9,4)$ என்பன இணைகரம் $ABCD$ இல் வரிசையாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்ட உச்சிகள். நடுப்புள்ளிக்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி நான்காவது உச்சி Dயைக் காண்க. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) மற்றும் (x_4, y_4) என்பன இணைகரத்தின் நான்கு முனைகள் எனில் மேற்காணும் புள்ளிகளைப் பயன்படுத்தி $(x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$ இன் மதிப்பு காண்க. மேலும் உமது விடைக்கான காரணத்தைக் கூறுக.

எடுத்துக்காட்டு 5.14 புள்ளிகள் $A(-11,4)$ மற்றும் $B(9,8)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை நான்கு சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.



படம் 5.26

தீர்வு

$A(-11,4)$ மற்றும் $B(9,8)$ஐ இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை நான்கு சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் P, Q, R என்க. இங்கு $AP = PQ = QR = RB$.

இங்கு AB இன் நடுப்புள்ளி Q, AQ இன் நடுப்புள்ளி P மற்றும் QB இன் நடுப்புள்ளி R என்க.

AB இன் நடுப்புள்ளி $Q = \left(\frac{-11+9}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{12}{2}\right) = (-1,6)$

AQ இன் நடுப்புள்ளி $P = \left(\frac{-11-1}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = \left(\frac{-12}{2}, \frac{10}{2}\right) = (-6,5)$

QB இன் நடுப்புள்ளி $R = \left(\frac{-1+9}{2}, \frac{6+8}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{14}{2}\right) = (4,7)$

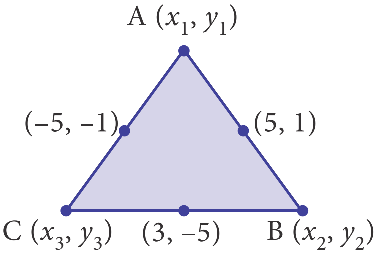
எனவே கோட்டுத்துண்டு AB ஐ நான்கு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் $P(-6, 5)$, $Q(-1, 6)$ மற்றும் $R(4, 7)$ ஆகும்.

5 Cordinate TM.indd 220 12/12/2019 3:36:45 PM

எடுத்துக்காட்டு 5.15 ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் $(5,1)$, $(3,-5)$ மற்றும் $(-5,-1)$ எனில், அந்த முக்கோணத்தின் முனைகளின் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

ΔABC இன் முனைகள் $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ என்க. மேலும் பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் CA இன் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $(5,1)$, $(3,-5)$ மற்றும் $(-5,-1)$ என்க.



படம் 5.27

$\frac{x_1+x_2}{2}=5 \Rightarrow x_1+x_2 = 10 \quad ...(1)$

$\frac{x_2+x_3}{2}=3 \Rightarrow x_2+x_3 = 6 \quad ...(2)$

$\frac{x_3+x_1}{2}=-5 \Rightarrow x_3+x_1 = -10 \quad ...(3)$

(1), (2) மற்றும் (3) ஐக் கூட்டக் கிடைப்பது,

$2x_1+2x_2+2x_3=6$

2 ஆல் வகுக்க,

$x_1+x_2+x_3=3 \quad ...(4)$

$(4)-(2) \Rightarrow x_1=3-6=-3$

$(4)-(3) \Rightarrow x_2=3+10=13$

$(4)-(1) \Rightarrow x_3=3-10=-7$

$\frac{y_1+y_2}{2}=1 \Rightarrow y_1+y_2 = 2 \quad ...(5)$

$\frac{y_2+y_3}{2}=-5 \Rightarrow y_2+y_3 = -10 \quad ...(6)$

$\frac{y_3+y_1}{2}=-1 \Rightarrow y_3+y_1 = -2 \quad ...(7)$

(5), (6) மற்றும் (7) ஐக் கூட்டக் கிடைப்பது,

$2y_1+2y_2+2y_3=-10$

2 ஆல் வகுக்க,

$y_1+y_2+y_3=-5 \quad ...(8)$

$(8)-(6) \Rightarrow y_1=-5+10=5$

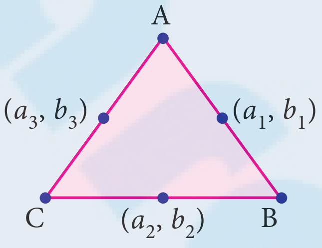
$(8)-(7) \Rightarrow y_2=-5+2=-3$

$(8)-(5) \Rightarrow y_3=-5-2=-7$

முக்கோணத்தின் மூன்று முனைகள் $A(-3,5)$, $B(13,-3)$ மற்றும் $C(-7,-7)$ ஆகும்.

சிந்தனைக்களம்

(a_1,b_1), (a_2,b_2) மற்றும் (a_3,b_3) என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் என்க. எடுத்துக்காட்டு 5.15 ஐப் பயன்படுத்தி, $(a_1+a_3-a_2,\ b_1+b_3-b_2)$, $(a_1+a_2-a_3,\ b_1+b_2-b_3)$ மற்றும் $(a_2+a_3-a_1,\ b_2+b_3-b_1)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. விடைகளை ஒப்பிடும்போது நீங்கள் அறிவது என்ன? உங்கள் விடைக்கான காரணத்தைத் தருக.



படம் 5.28

5 Cordinate TM.indd 221 12/12/2019 3:36:52 PM

பயிற்சி 5.3

1. கீழ்க்காணும் புள்ளிகளை இணைத்து உருவாக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளிகளைக் காண்க.
   (i) $(-2,3)$ மற்றும் $(-6,-5)$ (ii) $(8,-2)$ மற்றும் $(-8,0)$
   (iii) (a,b) மற்றும் $(a+2b,2a-b)$ (iv) $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{7}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{3}{2},\frac{-11}{7}\right)$

2. ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(-4,2)$. அந்த வட்டத்தில் $(-3,7)$ என்பது விட்டத்தின் ஒரு முனை எனில், மற்றொரு முனையைக் காண்க.

3. $(3,4)$ மற்றும் $(p,7)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி (x,y) ஆனது $2x+2y+1=0$, இன் மேல் அமைந்துள்ளது எனில், p இன் மதிப்பு காண்க.?

4. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் $(2,4)$, $(-2,3)$ மற்றும் $(5,2)$ எனில் அந்த முக்கோணத்தின் முனைகளின் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.

5. AB ஐ ஒரு நாணாக உடைய வட்டத்தின் மையம் $O(0,0)$. இங்கு, புள்ளிகள் A மற்றும் B முறையே $(8,6)$ மற்றும் $(10,0)$ ஆகும். வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து நாண் AB –க்கு வரையப்படும் செங்குத்து OD எனில், OD இன் மையப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

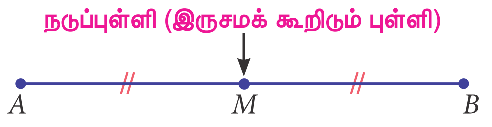
6. புள்ளிகள் $A(-5,4)$, $B(-1,-2)$ மற்றும் $C(5,2)$ என்பன இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள், இதில் B இல் செங்கோணம் அமைந்துள்ளது. மேலும் $ABCD$ ஒரு சதுரம் எனில் D இன் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.

7. முக்கோணம் DEF இன் பக்கங்கள் DE, EF மற்றும் FD களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $A(-3,6)$, $B(0,7)$ மற்றும் $C(1,9)$ எனில், நாற்கரம் $ABCD$ ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.

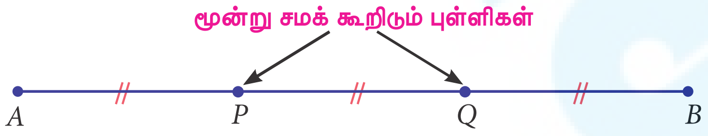
8. $A(-3,2)$, $B(3,2)$ மற்றும் $C(-3,-2)$ என்பன A இல் செங்கோணத்தைக் கொண்டுள்ள செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகள் எனில் கர்ணத்தின் நடுப்புள்ளியானது உச்சிகளிலிருந்து சமத் தொலைவில் உள்ளது என்பதை நிறுவுக.

5.5 ஒரு கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமக்கூறிடும் புள்ளிகள் (Points of Trisection of a Line Segment)

ஒரு கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி ஆனது அந்தக் கோட்டுத்துண்டை இருசமக் கூறிடும் புள்ளி ஆகும். நாம் ஒரு கோட்டுத் துண்டை மூன்று சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்க வேண்டுமெனில், அக்கோட்டுத் துண்டை மூன்று சமக் கூறிடுவதற்கு ஏற்ப புள்ளிகளைத் தேர்ந்தெடுத்துக் குறித்திட வேண்டும்.



படம் 5.29
$AM = MB$

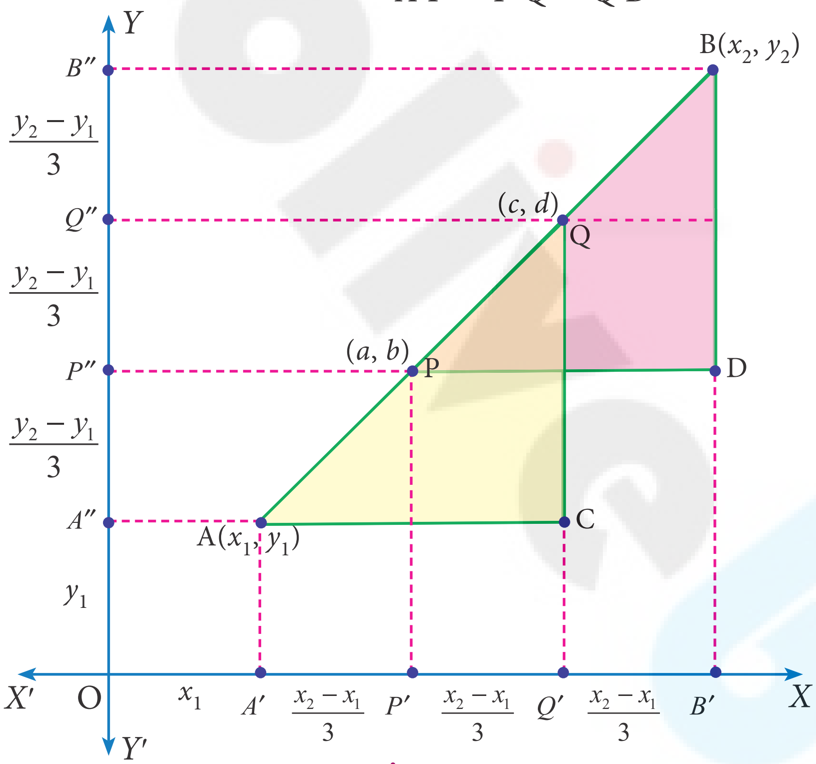


படம் 5.30
$AP = PQ = QB$

5 Cordinate TM.indd 222 12/12/2019 3:36:54 PM

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கோட்டுத்துண்டை, இரண்டு புள்ளிகள் மூன்று சமக் கூறிடும். இந்தப் புள்ளிகளை அடைவதற்கான வழிமுறையானது, நாம் இருசமக் கூறிடும் (அதாவது நடுப்புள்ளி) புள்ளியை அடைவது போன்றதே. கொடுக்கப்பட்ட படம் 5.31 ஐ உற்று நோக்குவோம். இங்கு கோட்டுத்துண்டு AB யை மூன்று சமக் கூறிடும் புள்ளிகள் P மற்றும் Q ஆகும். இதில் A ஆனது (x_1, y_1) மற்றும் B ஆனது (x_2, y_2). இதிலிருந்து நாம் P ஆனது AQ இன் நடுப்புள்ளி மற்றும் Q ஆனது PB இன் நடுப்புள்ளி என்பவற்றை நாம் தெளிவாக உணரலாம். இங்கு ΔACQ மற்றும் ΔPDB ஆகியவற்றைக் கருதுவோம். (இவற்றை வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பண்புகளின் அடிப்படையிலும் சரிபார்க்கலாம்; உயர் வகுப்புகளில் இது விரிவாக விளக்கப்படும்).

$$A'P' = P'Q' = Q'B'$$



படம் 5.31

குறிப்பு

நாம் ஒரு கோட்டுத் துண்டை மூன்று சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் பொழுது கிடைமட்ட மற்றும் செங்குத்துக் கால்களும் மூன்று சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கப்படும்.

P ஆனது (a, b) எனில்,

$$a = OP' = OA' + A'P' = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{3} = \frac{x_2 + 2x_1}{3};$$

$$b = PP' = OA'' + A''P'' = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{3} = \frac{y_2 + 2y_1}{3}$$

எனவே, புள்ளி P ஆனது $\left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right)$ ஆகும்.

Q ஆனது (c, d) எனில்,

$$c = OQ' = OB' - Q'B' = x_2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{3}\right) = \frac{2x_2 + x_1}{3};$$

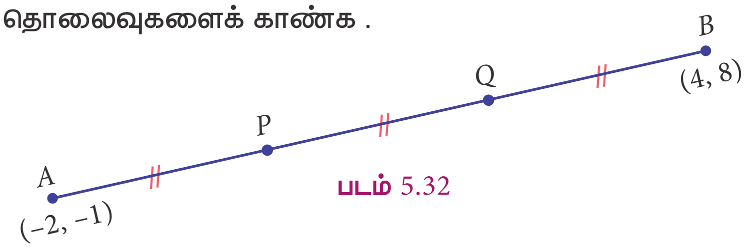
$$d = OQ'' = OB'' - Q''B'' = y_2 - \left(\frac{y_2 - y_1}{3}\right) = \frac{2y_2 + y_1}{3}$$

அதாவது தேவையான புள்ளி Q ஆனது $\left(\frac{2x_2 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + y_1}{3}\right)$ ஆகும்.

5 Cordinate TM.indd 223 12/12/2019 3:37:00 PM

எடுத்துக்காட்டு 5.16 $(-2,-1)$ மற்றும் $(4,8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமக்கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க .

தீர்வு



படம் 5.32

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் $A(-2,-1)$ மற்றும் $B(4,8)$ என்க.

AB ஐ மூன்று சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகள் $P(a,b)$ மற்றும் $Q(c,d)$ என்க. ஆகவே $AP = PQ = QB$ ஆகும்.

மேலே நிறுவப்பட்ட சூத்திரத்தின்படி, புள்ளி P ஆனது

$$\left(\frac{x_2+2x_1}{3},\frac{y_2+2y_1}{3}\right)=\left(\frac{4+2(-2)}{3},\frac{8+2(-1)}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{4-4}{3},\frac{8-2}{3}\right) = (0, 2)$$

மற்றும் புள்ளி Q ஆனது

$$\left(\frac{2x_2+x_1}{3},\frac{2y_2+y_1}{3}\right)=\left(\frac{2(4)-2}{3},\frac{2(8)-1}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{8-2}{3},\frac{16-1}{3}\right) = (2, 5)$$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

(i) புள்ளிகள் $(4,-1)$ மற்றும் $(-2,-3)$ ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

(ii) புள்ளி $(6,-9)$ மற்றும் ஆதியை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

5.6 பிரிவுச் சூத்திரம் (Section Formula)

கோட்டுத் துண்டை இரு சமக்கூறிடுதல் மற்றும் மூன்று சமக்கூறிடுதல் பற்றிக் கற்றோம். இப்போது புள்ளிகள் (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $m{:}n$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தலைக் கற்றுக்கொள்வோம்.

ஒரு கோட்டுத்துண்டு AB மற்றும் ஒரு மிகை மெய் எண் r கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

படம் 5.33

நாம் AB ஐ $r:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண இருக்கின்றோம்.

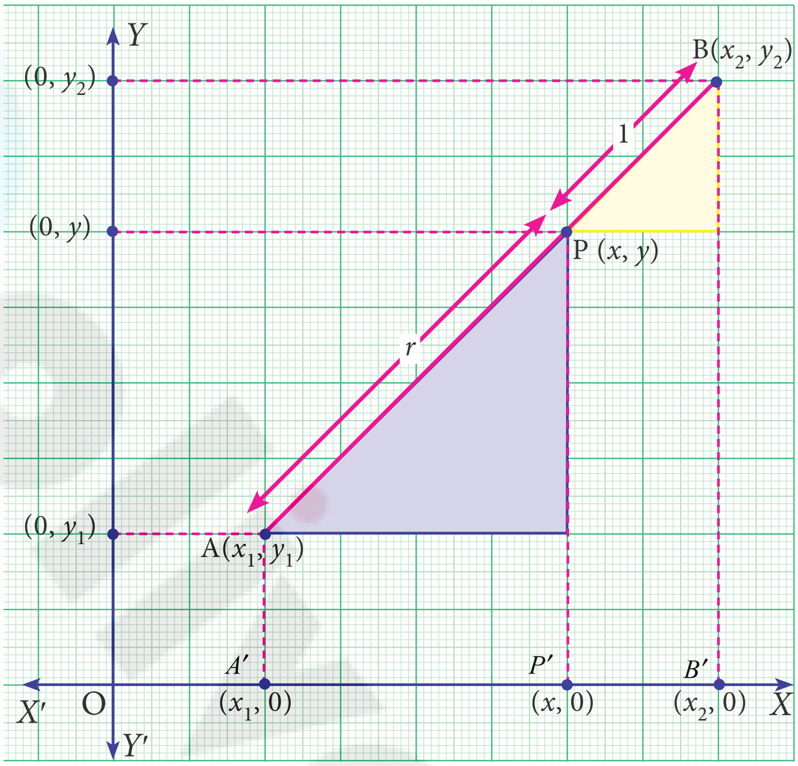
அதாவது $\frac{AP}{PB}=\frac{r}{1}$ அல்லது $AP=r(PB)$.

இதிலிருந்து $x - x_1 = r(x_2 - x)$

இதைத் தீர்க்க, $x = \dfrac{rx_2 + x_1}{r+1}$ ….. (1)

5 Cordinate TM.indd 224 12/12/2019 3:37:04 PM

நாம் இந்த முடிவை ஒரு கோட்டின் மேல் அமைந்துள்ள எந்தவொரு புள்ளிக்கும் பின்வருமாறு பொதுமைப்படுத்தலாம்



படம் 5.34

$AP:PB = r:1$ என எடுக்க, நாம் பெறுவது $A'P':P'B' = r:1$.

எனவே $A'P' = r(P'B')$

ஆகவே, $(x - x_1) = r(x_2 - x)$

இதிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{r+1} \quad \ldots [(1) \text{ ஐப் பார்க்க}]$$

இதே வழியில் நாம் பெறுவது $y = \dfrac{ry_2 + y_1}{r+1}$

A மற்றும் B இக்கு இடையில் P மற்றும் $\dfrac{AP}{PB} = r$, எனில் நாம் பெறும் வாய்ப்பாடு P ஆனது

$\left(\dfrac{rx_2 + x_1}{r+1}, \dfrac{ry_2 + y_1}{r+1}\right)$. r ஆனது $\dfrac{m}{n}$ என எடுக்கப்பட்டால், பிரிவுச் சூத்திரமானது

$\left(\dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$, எனக் கிடைக்கிறது. இதுவே நிலையான அமைப்பாகும் .

சிந்தனைக் களம்

(i) $m = n = 1$ எனில் நிகழ்வது என்ன? நாம் முன்பே நிறுவிய முடிவு ஒன்றை அடையாளம் காண முடிகிறதா?

(ii) $AP : PB = 1 : 2$ மற்றும் $AQ : QB = 2:1$ எனில் $AP : AB$ என்ன? $AQ : AB$ என்ன?

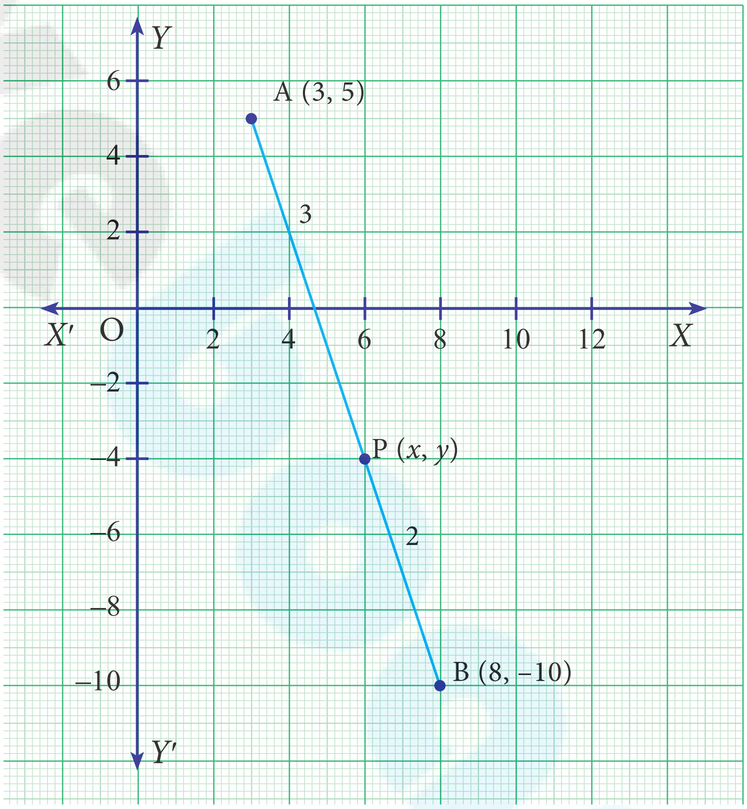
5 Cordinate TM.indd 225 12/12/2019 3:37:07 PM

குறிப்பு

- புள்ளிகள் (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை X-அச்சு பிரிக்கும் விகிதம் $\frac{-y_1}{y_2}$ மற்றும் Y-அச்சு பிரிக்கும் விகிதம் $\frac{-x_1}{x_2}$.
- மூன்று புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமையும் எனில், அவற்றின் ஒரு புள்ளி மற்ற இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $r : 1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.
- கொடுக்கப்பட்ட மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோட்டில் அமையும்பொழுது மட்டுமே பிரிவுச் சூத்திரம் பயன்படும் என்பதை நினைவில் கொள்ளவும்.
- இந்தப் பிரிவுச் சூத்திரமானது ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம், உள்வட்ட மையம், வெளிவட்ட மையம் போன்றவற்றைக் காணப் பயன்படுகிறது. இயற்பியலில் இது பொருளின் பொருண்மை மையம், சமநிலைப் புள்ளிகள் போன்ற பலவற்றில் பயன்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 5.17

புள்ளிகள் $(3,5)$ மற்றும் $(8,-10)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $3:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.



படம் 5.35

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(3,5)$, $B(8,-10)$ என்க. மேலும் புள்ளி $P(x,y)$ ஆனது கோட்டுத் துண்டு AB ஐ $3:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி என்க.

பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி,

$$P(x,y) = P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

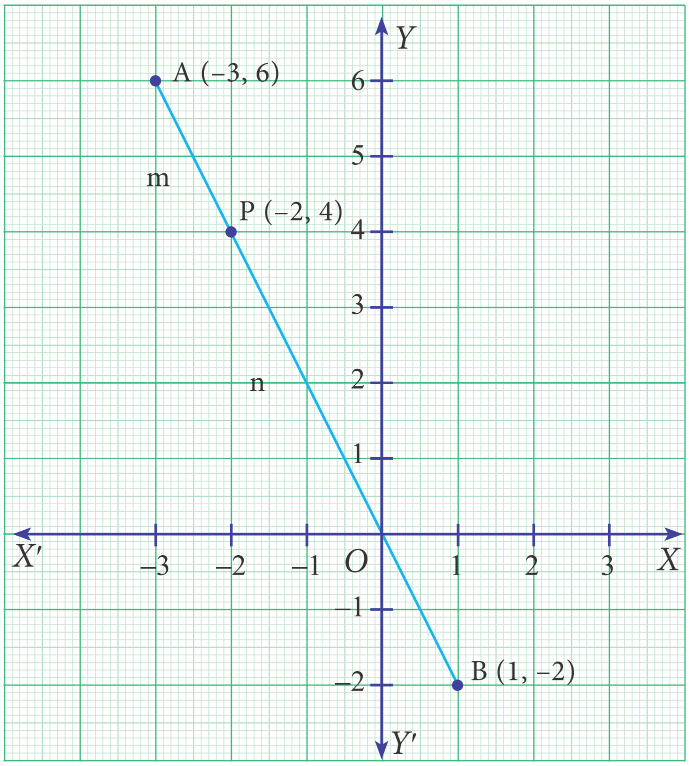
இங்கு, $x_1 = 3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 8$, $y_2 = -10$ மற்றும் $m = 3$, $n = 2$

ஆகையால், $$P(x,y) = P\left(\frac{3(8)+2(3)}{3+2}, \frac{3(-10)+2(5)}{3+2}\right)$$

$$= P\left(\frac{24+6}{5}, \frac{-30+10}{5}\right) = P(6,-4)$$

5 Cordinate TM.indd 226 12/12/2019 3:37:10 PM

எடுத்துக்காட்டு 5.18 $A(-3,6)$ மற்றும் $B(1,-2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டைப் புள்ளி $P(-2,4)$ ஆனது உட்புறமாக என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கும்?



படம் 5.36

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் $A(-3, 6)$ மற்றும் $B(1, -2)$ஆகும். $P(-2, 4)$ ஆனது AB ஐ உட்புறமாக $m : n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது என்க.

பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி

$$P(x,y) = P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

$$= P(-2,4) \quad .....(1)$$

இங்கு $x_1 = -3,\ y_1 = 6,\ x_2 = 1,\ y_2 = -2$

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{m(1)+n(-3)}{m+n}, \frac{m(-2)+n(6)}{m+n}\right) = P(-2,4)$$

x-இன் ஆயத்தொலைவைச் சமப்படுத்த, நாம் பெறுவது

$$\frac{m-3n}{m+n} = -2 \quad \text{அல்லது} \quad m-3n = -2m-2n$$

$$3m = n$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$$

$$m:n = 1:3$$

P ஆனது AB ஐ உட்புறமாக 1:3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

குறிப்பு

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் y இன் ஆயத்தொலைவுகளைச் சமப்படுத்தியும் இதே முடிவைப் பெறலாம். அதை முயன்று பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.19 புள்ளிகள் $A(-3,5)$ மற்றும் B ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டைப் புள்ளி $P(-2,3)$ ஆனது 1:6 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது எனில் B இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க?

தீர்வு

புள்ளிகள் $A(-3,5)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்க.

புள்ளி $P(-2,3)$ஆனது AB ஐ உட்புறமாக 1:6 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி $P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right) = P(-2,3)$

5 Cordinate TM.indd 227 12/12/2019 3:37:13 PM

$$P\left(\frac{1(x_2)+6(-3)}{1+6},\frac{1(y_2)+6(5)}{1+6}\right) = P(-2,3)$$

ஆயத் தொலைவுகளைச் சமப்படுத்த

$$\frac{x_2-18}{7} = -2 \qquad\qquad \frac{y_2+30}{7} = 3$$

$$x_2 - 18 = -14 \qquad\qquad y_2 + 30 = 21$$

$$x_2 = 4 \qquad\qquad y_2 = -9$$

ஆகவே, புள்ளி B இன் ஆயத்தொலைவுகள் $(4,-9)$ ஆகும்.

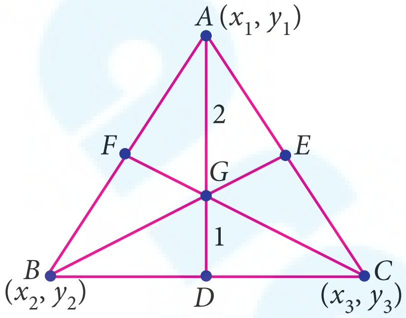
பயிற்சி 5.4

1. $A(4,-3)$ மற்றும் $B(9,7)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $3:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.
2. $A(-3,5)$ மற்றும் $B(4,-9)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டைப் புள்ளி $P(2,-5)$ என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கும்?
3. $A(1,2)$ மற்றும் $B(6,7)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டில் $AP = \frac{2}{5}AB$ என்றவாறு அமையும் புள்ளி P இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.
4. $A(-5,6)$ மற்றும் $B(4,-3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை மூன்று சமப் பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.
5. $A(6,3)$ மற்றும் $B(-1,-4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டானது, ABஇன் நீளத்தில் பாதி அளவினை இரு முனைகளிலும் இணைத்து இரு மடங்காக ஆக்கப்படுகின்றது எனில் புதிய முனைகளின் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.
6. பிரிவுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் புள்ளிகள் $A(7,-5)$, $B(9,-3)$ மற்றும் $C(13,1)$ ஆகியன ஒரே கோட்டில் அமையும் என நிரூபிக்க.
7. கோட்டுத்துண்டு AB ஆனது முனை B இலிருந்து C இக்கு அதன் நீளம் 25% அதிகரிக்குமாறு நீட்டப்படுகின்றது. புள்ளிகள் A மற்றும் B இன் ஆயத் தொலைவுகள் முறையே $(-2,-3)$ மற்றும் $(2,1)$ எனில் C இன் ஆயத்தொலைவுகளைக் காண்க.

5.7 நடுக்கோட்டு மையத்தின் ஆயத்தொலைவுகள் (The Coordinates of the Centroid)

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்டுள்ள ΔABC ஐக் கருதுக.

AD, BE மற்றும் CF என்பன ΔABC இன் நடுக்கோடுகள் என்க.



படம் 5.37

BC இன் மையப் புள்ளி $D\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)$

நடுக்கோடு AD ஐ நடுக்கோட்டு மையம் G ஆனது உட்புறமாக $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி, நடுக்கோட்டு மையம் $G(x,y)$ஆனது,

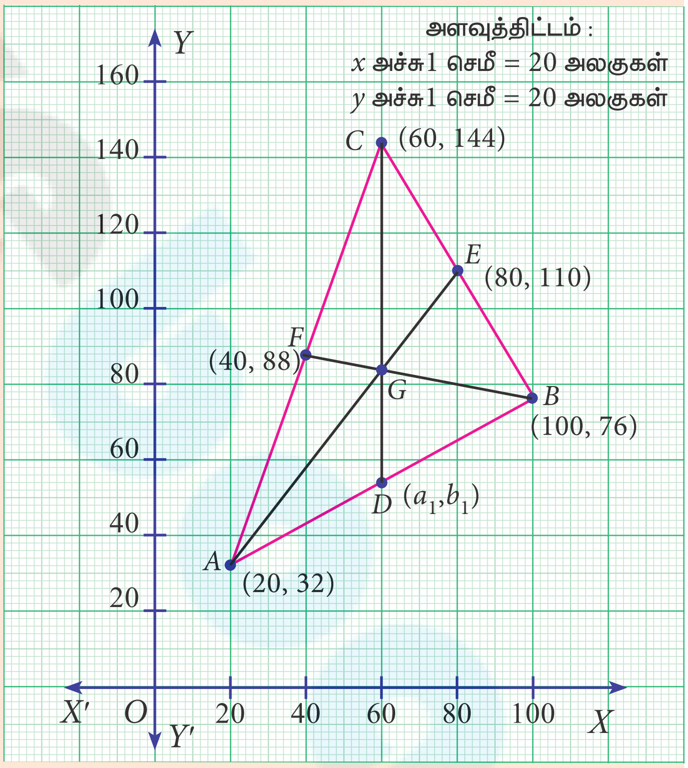
$$\left(\frac{\frac{2(x_2+x_3)}{2}+1(x_1)}{2+1}, \frac{\frac{2(y_2+y_3)}{2}+1(y_1)}{2+1}\right) = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

> $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்டுள்ள முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

செயல்பாடு - 2

1. வரைபடத் தாளில் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$–ஐ உச்சிகளாக உடைய ΔABC –ஐ வரைக.

2. ΔABC இன் நடுக்கோடுகள் வரைந்து நடுக்கோட்டு மையத்தைக் குறிக்கவும்



படம் 5.38

உற்றுநோக்கல்

(i) ΔABC இன் முனைகளின் ஆயத்தொலைவுகள் இங்கு $A(x_1, y_1) =$ ______________________, $B(x_2, y_2) =$ ________________ மற்றும் $C(x_3, y_3) =$ __________

(ii) நடுக்கோட்டு மையம் G இன் ஆயத்தொலைவுகள்= ______________

(iii) நடுக்கோட்டு மையத்திற்கான சூத்திரத்தின்படி, G இன் ஆயத் தொலைவுகள் = ____________.

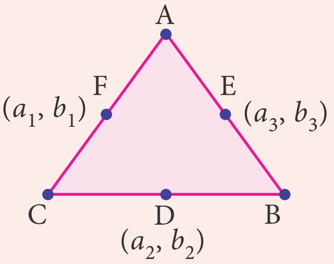
(iv) AB இன் நடுப்புள்ளி ______________.

(v) AB இன் நடுப்புள்ளி மற்றும் (x_3, y_3) ஐ இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை $2:1$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி ______________.

குறிப்பு

- ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி (G) யில் சந்திக்கும். மேலும் அந்தப் புள்ளியானது, நடுக்கோட்டின் மேல் உள்ள முனைக்கு எதிர்ப்பக்கத்திலிருந்து மூன்றில் ஒரு பங்கு தொலைவில் அமையும்.

- ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையமும் அந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைத்து உருவாக்கப்படும் முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையமும் ஒன்றே (வெவ்வேறானவை அல்ல).



படம் 5.39

- $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ மற்றும் (a_3, b_3) ஆனது ΔABC இன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் எனில் அதன் நடுக்கோட்டு மையம்

$$G\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}, \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.20 $A(6,-1)$, $B(8,3)$ மற்றும் $C(10,-5)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.

தீர்வு

$A(6,-1)$, $B(8,3)$ மற்றும் $C(10,-5)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $G(x, y)$

$$G(x,y) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

கொடுக்கப்பட்டது $(x_1, y_1) = (6,-1)$; $(x_2, y_2) = (8,3)$;

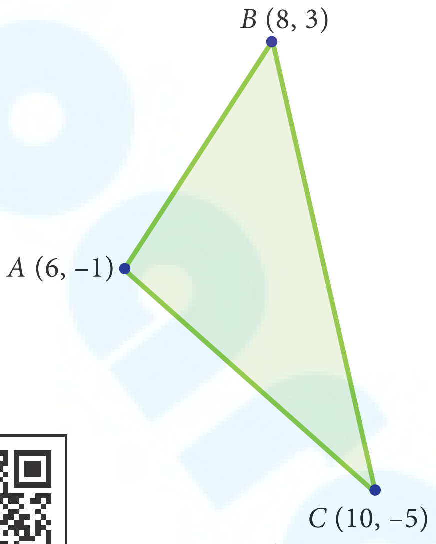
$(x_3, y_3) = (10,-5)$

முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம்

$$G(x,y) = G\left(\frac{6+8+10}{3}, \frac{-1+3-5}{3}\right)$$

$$= G\left(\frac{24}{3}, \frac{-3}{3}\right) = G(8,-1)$$

F6YVBP

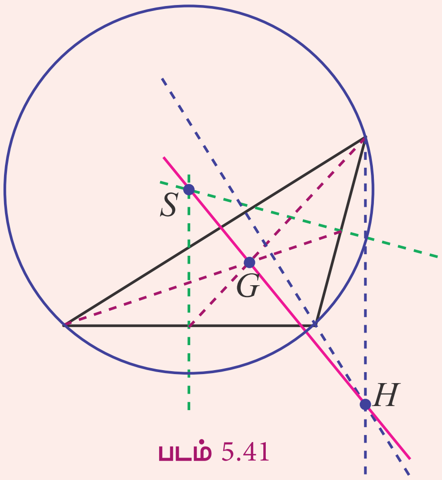


படம் 5.40

5 Cordinate TM.indd 230 12/12/2019 3:37:25 PM

குறிப்பு

- ஒரு முக்கோணத்தில், ஆய்லரின் கோடு என்பது செங்கோட்டு மையம் (H), நடுக்கோட்டு மையம் (G) மற்றும் சுற்றுவட்ட மையம் (S) இன் வழியே செல்லும் கோடு ஆகும். G ஆனது, கோட்டுத்துண்டு $\overline{HS}$ ஐ $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும். அதாவது நடுக்கோட்டு மையமானது, செங்கோட்டு மையம் மற்றும் சுற்றுவட்ட மையத்தை $2:1$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக செங்கோட்டு மையத்திலிருந்து பிரிக்கும்.



படம் 5.41

- ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தில் செங்கோட்டு மையம், உள்வட்ட மையம், நடுக்கோட்டு மையம் மற்றும் சுற்றுவட்ட மையம் அனைத்தும் ஒரே புள்ளியில் அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.21 $(1,-6)$ மற்றும் $(-5,2)$ ஆகியன ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு முனைப் புள்ளிகள் மற்றும் அதன் நடுக்கோட்டு மையம் $(-2,1)$ எனில் முக்கோணத்தின் மூன்றாவது முனைப் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று முனைப் புள்ளிகள் $A(1,-6)$, $B(-5,2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ என்க.

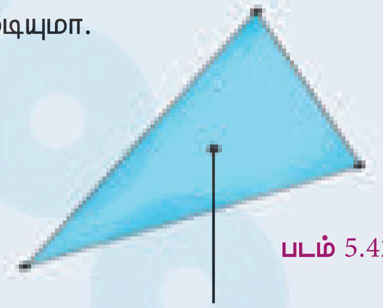
முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $(-2,1)$ ஆனது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே நாம் பெறுவது,

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=-2$	$\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=1$
$\frac{1-5+x_3}{3}=-2$	$\frac{-6+2+y_3}{3}=1$
$-4+x_3=-6$	$-4+y_3=3$
$x_3=-2$	$y_3=7$

எனவே மூன்றாவது முனைப் புள்ளி $(-2,7)$ ஆகும்.

சிந்தனைக் களம்

(i) ஆசிரியர், முனைகள் A(5, 8), B(2, 4), C(8, 3) இல் அமையுமாறு உள்ள ஒரு முக்கோண வடிவத் தட்டு மற்றும் ஒரு குச்சியை மாணவனிடம் வழங்கித் தட்டைக் குச்சியின் மேல் நிலையாக நிற்கச் செய்யுமாறு கூறினார். அந்த மாணவனுக்குத் தட்டு நிலையாக நிற்கும் புள்ளியைக் காண்பதற்குத் தங்களால் உதவ முடியுமா.


படம் 5.42

(ii) இந்த முக்கோணத்தின் புவிஈர்ப்பு மையம் எது? ஏன்?

பயிற்சி 5.5

1. பின்வரும் புள்ளிகளை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.

   (i) $(2,-4)$, $(-3,-7)$ மற்றும் $(7,2)$ (ii) $(-5,-5)$, $(1,-4)$ மற்றும் $(-4,-2)$

5 Cordinate TM.indd 231 12/12/2019 3:37:28 PM

2. ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $(4,-2)$ மற்றும் அதன் இரு முனைப்புள்ளிகள் $(3,-2)$ மற்றும் $(5,2)$ எனில் மூன்றாவது முனைப் புள்ளியைக் காண்க.

3. $A(-1,3), B(1,-1)$ மற்றும் $C(5,1)$ ஆகியன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள் எனில் A வழியே செல்லக் கூடிய நடுக்கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

4. $(1,2)$, $(h,-3)$ மற்றும் $(-4,k)$ ஆகியன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப்புள்ளிகள். மேலும் புள்ளி $(5,-1)$ ஆனது அந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் எனில், $\sqrt{(h+k)^2+(h+3k)^2}$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

5. $A(-3,5)$ மற்றும் $B(3,3)$ ஆகியன முறையே ஒரு முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம் மற்றும் நடுக்கோட்டு மையம் ஆகும். C ஆனது இந்த முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையம் எனில், கோட்டுத் துண்டு AC ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.

6. $A(3,4)$, $B(-2,-1)$ மற்றும் $C(5,3)$ என்பன முக்கோணம் ABC இன் முனைப் புள்ளிகள். G ஆனது அதன் நடுக்கோட்டு மையம் மற்றும் $BDCG$ ஆனது ஓர் இணைகரம் எனில் முனைப்புள்ளி D இன் ஆயத் தொலைவுகளைக் காண்க.

7. முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் $\left(\frac{3}{2},5\right)$, $\left(7,\frac{-9}{2}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{13}{2},\frac{-13}{2}\right)$ எனில் அந்த முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.

F78RDC

பயிற்சி 5.6

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. ஒரு புள்ளியின் y-அச்சுத் தொலைவு பூச்சியம் எனில் அது எப்பொழுதும்_____ அமையும்
   (1) முதலாம் காற்பகுதியில் (2) இரண்டாம் காற்பகுதியில்
   (3) x-அச்சின் மீது (4) y-அச்சின் மீது

2. $(-5, 2)$ மற்றும் $(2, -5)$ என்ற புள்ளிகள் _________ அமையும்
   (1) ஒரே காற்பகுதியில் (2) முறையே II, III காற்பகுதியில்
   (3 முறையே II, IV காற்பகுதியில் (4) முறையே IV, II காற்பகுதியில்

3. புள்ளிகள் O $(0,0)$, A$(3, -4)$, B$(3, 4)$ மற்றும் C$(0, 4)$ ஐக் குறித்து அவற்றை OA, AB, BC மற்றும் CO என இணைத்தால் கிடைக்கும் உருவம் _____________.
   (1) சதுரம் (2) செவ்வகம் (3) சரிவகம் (4) சாய்சதுரம்

4. புள்ளிகள் $P(-1, 1), Q(3,-4), R(1,-1), S(-2,-3)$ மற்றும் $T(-4, 4)$ என்பன ஒரு வரைபடத் தாளில் குறிக்கப்பட்டால் நான்காவது காற்பகுதியில் அமையும் புள்ளிகள் ___________
   (1) P மற்றும் T (2) Q மற்றும் R (3) மற்றும் S (4) P மற்றும் Q

5. ஒரு புள்ளியின் y அச்சுத் தொலைவு 4 மற்றும் அப்புள்ளி y அச்சில் அமைந்தால் அப்புள்ளி ______ ஆகும்
   (1) $(4, 0)$ (2) $(0, 4)$ (3) $(1, 4)$ (4) $(4, 2)$

5 Cordinate TM.indd 232 12/12/2019 3:37:29 PM

6. $(2, 3)$ மற்றும் $(1, 4)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு ______

(1) 2 (2) $\sqrt{56}$ (3) $\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{2}$

7. புள்ளிகள் $A(2, 0)$, $B(-6, 0)$, $C(3, a-3)$ ஆனது x-அச்சின் மீது அமைந்தால் a இன் மதிப்பு _____

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) −6

8. $(x+2, 4) = (5, y-2)$ எனில், (x,y) இன் மதிப்பு _____

(1) (7, 12) (2) (6, 3) (3) (3, 6) (4) (2, 1)

9. Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 என்பன கார்ட்டீசியன் தளத்தின் நான்கு காற்பகுதிகள் எனில், $Q_2 \cap Q_3$ என்பது _____

(1) $Q_1 \cup Q$ (2) $Q_2 \cup Q_3$ (3) வெற்றுக் கணம் (4) x-அச்சின் குறைப் பகுதி.

10. $(5, -1)$ என்ற புள்ளிக்கும் ஆதிப் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு_________

(1) $\sqrt{24}$ (2) $\sqrt{37}$ (3) $\sqrt{26}$ (4) $\sqrt{17}$

11. $P(2,4)$ மற்றும் $Q(5,7)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை 2:1 என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி C இன் ஆயத்தொலைவுகள்

(1) $\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$ (2) (3,5) (3) (4,4) (4) (4,6)

12. $A(-4,3)$ மற்றும் $B(-2,4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி $P\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{2}\right)$ எனில் (a,b) ஆனது

(1) $(-9,7)$ (2) $\left(-3, \frac{7}{2}\right)$ (3) $(9, -7)$ (4) $\left(3, -\frac{7}{2}\right)$

13. $P(2,7)$ மற்றும் $R(-2,3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை $Q(1,6)$என்ற புள்ளியானது என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

(1) 1:2 (2) 2:1 (3) 1:3 (4) 3:1

14. $(-3,2)$, என்ற புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் $(3,4)$ ஐ ஒரு முனையாகக் கொண்ட விட்டத்தின் மற்றொரு முனையைக் காண்க

(1) $(0,-3)$ (2) $(0,9)$ (3) $(3,0)$ (4) $(-9,0)$

15. $A(a_1,b_1)$ மற்றும் $B(a_2,b_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை X−அச்சு எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

(1) $b_1 : b_2$ (2) $-b_1 : b_2$ (3) $a_1 : a_2$ (4) $-a_1 : a_2$

16. $(6,4)$ மற்றும் $(1, -7)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை X−அச்சு எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

(1) 2:3 (2) 3:4 (3) 4:7 (4) 4:3

17. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் CA ஆகியவற்றின் நடுப் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைவுகள் முறையே $(3,4)$, $(1,1)$ மற்றும் $(2,-3)$ எனில் A மற்றும் B இன் ஆயத்தொலைவுகள் யாவை?

(1) (3,2), (2,4) (2) (4,0), (2,8) (3) (3,4), (2,0) (4) (4,3), (2,4)

18. $(-a,2b)$ மற்றும் $(-3a,-4b)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப் புள்ளியானது

(1) $(2a,3b)$ (2) $(-2a, -b)$ (3) $(2a,b)$ (4) $(-2a, -3b)$

5 Cordinate TM.indd 233 12/12/2019 3:37:32 PM

19. $(-5,1)$ மற்றும் $(2,3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டை Y-அச்சு உட்புறமாக என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

(1) 1:3 (2) 2:5 (3) 3:1 (4) 5:2

20. $(1,-2)$, $(3,6)$, $(x,10)$ மற்றும் $(3,2)$ ஆகியன ஓர் இணைகரத்தின் வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட முனைப் புள்ளிகள் எனில், x இன் மதிப்பானது

(1) 6 (2) 5 (3) 4 (4) 3

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- x_1, x_2 என்பன x–அச்சின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைவுகள் எனில், அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொலைவு $x_2 - x_1$ ($x_2 > x_1$) ஆகும்.
- y_1, y_2 என்பன y அச்சின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளின் y ஆயத் தொலைவுகள் எனில், அவற்றிற்கு இடையே உள்ள தொலைவு $|y_1 - y_2|$ ஆகும்.
- (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ஆகும்.
- (x_1, y_1) மற்றும் ஆதிப்புள்ளி $(0, 0)$ இக்கு இடையே உள்ள தொலைவு $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ ஆகும்.
- $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
- $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை உட்புறமாக $m:n$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$
- $A(x_1, y_1), B\ (x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$
- ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையமும் அந்த முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைத்து உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையமும் ஒன்றே; வெவ்வேறானவை அல்ல.

செயல்பாடு

$A(1, 0)$, $B(-7, 2)$, $C(-3, 7)$ என்ற புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறித்து அவற்றை இணைத்து ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்கவும். $G(-3, 3)$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். புள்ளி A இலிருந்து G வழியாக ஒரு கோடு வரையவும். அதை நீட்டித்து BC இல் புள்ளி D இல் சந்திக்கும்படிச் செய்யவும். புள்ளி B இலிருந்து G வழியாக ஒரு கோடு வரையவும். அதை நீட்டித்து AC இல் புள்ளி E இல் சந்திக்கும்படிச் செய்யவும்.

BD, DC, CE மற்றும் EA என்ற தொலைவுகளைக் கண்டு அவற்றின் தொடர்புகளைப் பற்றிக் கூறுக.

தொலைவு வாய்ப்பாட்டை பயன்படுத்தி CG மற்றும் GF இவற்றின் தொலைவைக் காண்க. இங்கு, F என்பது AB இல் அமைந்த ஒரு புள்ளி $AG: GD$, $BG: GE$ மற்றும் $CG: GF$ என்பதைப் பற்றி உங்கள் கருத்தைக் கூறுக.

குறிப்பு: G என்பது முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம். AD, BE மற்றும் CF என்பன முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள்.

5 Cordinate TM.indd 234 12/12/2019 3:37:35 PM

இணையச் செயல்பாடு–1

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி – 1

தேடுபொறியில் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் உரலியைத் தட்டச்சு செய்க அல்லது துரித துலங்கள் குறியீட்டை ஸ்கேன் செய்க.

படி – 2

“IX Analytical Geometry” என்று GeoGebra பக்கத்தில் தோன்றும் . இப்பக்கத்தில் பல பணித்தாள்கள் காணப்படும். அவற்றில் தேவைப்படுவதைத் தேர்ந்தெடுத்து கொள்ளவும். எடுத்துகாட்டாக “Distance Formula” என்பதைத் தெரிவு செய்து கொள்ளவும்.

படி – 3

A மற்றும் B இன் ஒருங்கிணைப்புகளை மாற்ற x_1, x_2, y_1, y_2 என்ற நழுவல்களை நகர்த்தவும். இப்போது நீங்கள் A மற்றும் B யின் தொலைதூரத்தைக் கணக்கிடலாம்.

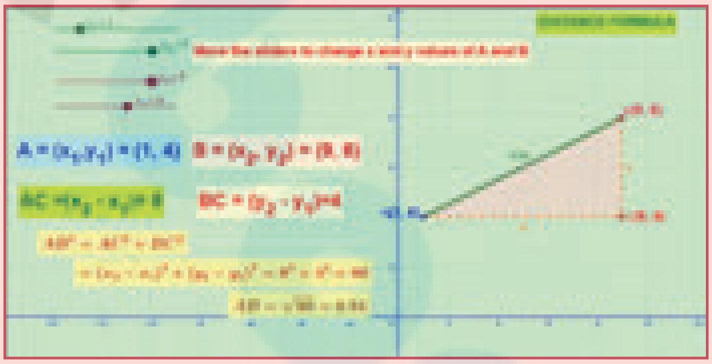
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

பகுப்பாய்வு வடிவியல்: https://ggbm.at/V9HfY4v8

B563_9_MAT_TM_T3

இணையச் செயல்பாடு–2

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, GeoGebra வின் “Co-ordinate Geometry” பக்கத்திற்குச் செல்க. Distance Formula மற்றும் Section Formula ஆகிய இரண்டு தலைப்புகளில் பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்

படி 2

புள்ளிகளையும் விகிதங்களையும் மாற்றுவதற்கு உரிய மதிப்பிற்கு நழுவலை நகர்த்தவும். கணக்குகளைச் செய்து விடைகளைச் சரி பார்க்கவும்.

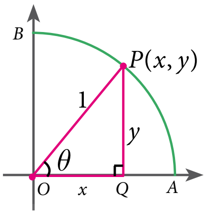
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

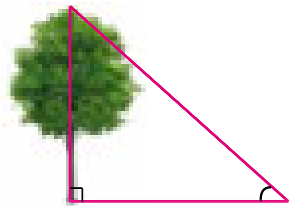
ஆயத் தொலை வடிவியல்: https://ggbm.at/sfszfe24 or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

5 Cordinate TM.indd 235 12/12/2019 3:37:35 PM

6

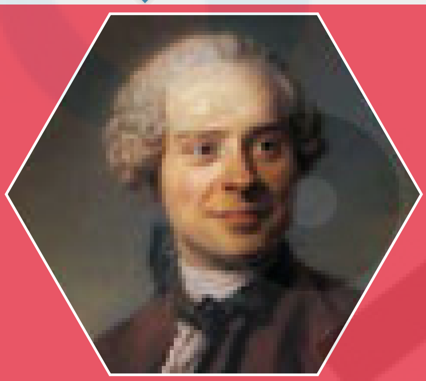




முக்கோணவியல்

உண்மையில் முக்கோணவியலைப் போல் கணிதத்தில் முக்கியமான இடத்தைப் பெற்றிருப்பது எதுவுமில்லை.

- ஜே.எஃப்.ஹெர்பர்ட்



லெனார்டு ஆய்லர்
(கி.பி. (பொ.ஆ.) 1707-1783)

ஆய்லரும்(Euler), நீயூட்டனைப் போலவே அவருடைய தலைமுறையில் சிறந்த கணிதமேதையாவார். அவர் கணிதத்தின் அனைத்து துறைகளையும் கற்றதோடு, தனது பார்வையை இழந்த பின்பும் கடின உழைப்பைத் தொடர்ந்தார். கணிதத்தின் பல துறைகளில், குறிப்பாக நுண்கணிதம் மற்றும் முக்கோணவியலில் ஆய்லர் தனது சிறந்த பங்களிப்பைச் செய்துள்ளார்.

வடிவியலில் பல தேற்றங்களுக்கு நிரூபணம் அளித்தவர்களில் முதலாமவர் இவரே.

கற்றல் விளைவுகள்

- பல்வேறு முக்கோணவியல் விகிதங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்புகளைப் புரிந்துகொள்ளச் செய்தல்.
- முக்கோணவியல் விகிதங்கள் மற்றும் அவற்றின் தலைகீழிகளின் மதிப்புகளை அடையாளம் காணுதல்.
- நிரப்புக் கோணங்களின் கருத்தைப் பயன்படுத்துதல்.
- முக்கோணவியல் அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்துவதைப் புரிந்துகொள்ளுதல்

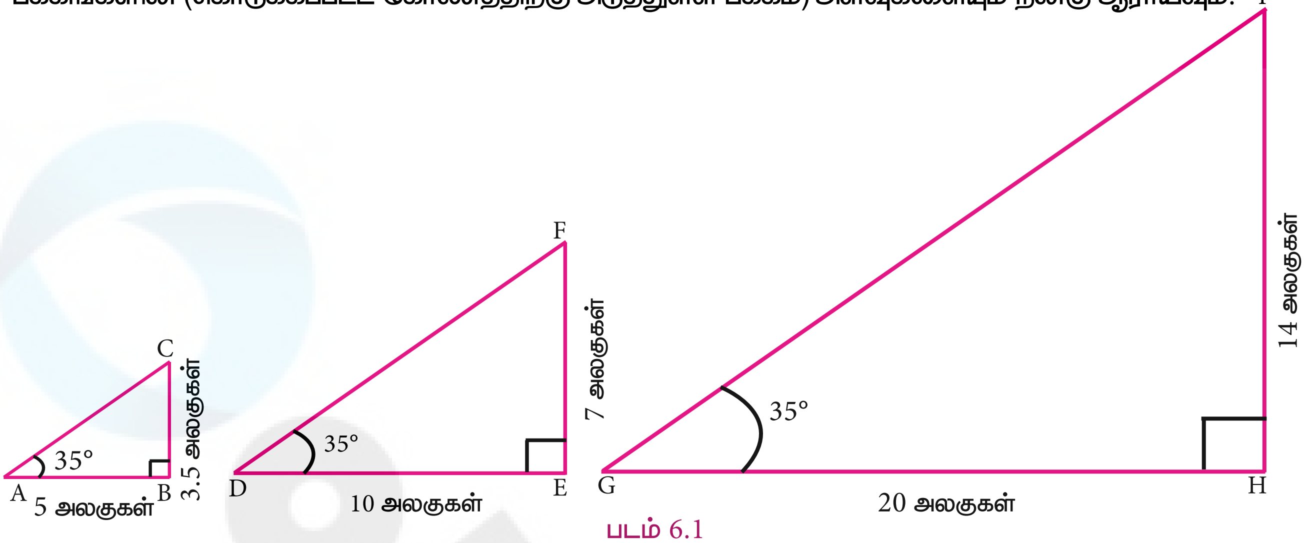
F7HHEZ

6.1 அறிமுகம்

முக்கோணவியல் என்பதின் ஆங்கிலச் சொல்லான **Trigonometry** என்பது கிரேக்கச் சொற்களான Trigonon-metron என்பவற்றிலிருந்து பெறப்பட்டுள்ளது. Trigonon-என்பதின் பொருள் முக்கோணம் என்பதாகும், மற்றும் metron – என்பதின் பொருள் அளவுகள் என்பதாகும். இது முக்கோணத்தின் கோண அளவுகள் மற்றும் அதன் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கு இடையில் உள்ள தொடர்புகளைப் பற்றி விவரிக்கும் கணிதத்தின் ஒரு பிரிவு ஆகும்.பொறியியல் வல்லுநர்கள், அறிவியல் அறிஞர்கள் மற்றும் நில அளவையாளர்களுக்கு முக்கியமானதொரு கருவியாக முக்கோணவியல் பயன்படுகிறது. இது கடற்பயணம் மற்றும் நிலநடுக்கம் சார்ந்த துறைகளிலும் பயன்படுகிறது.

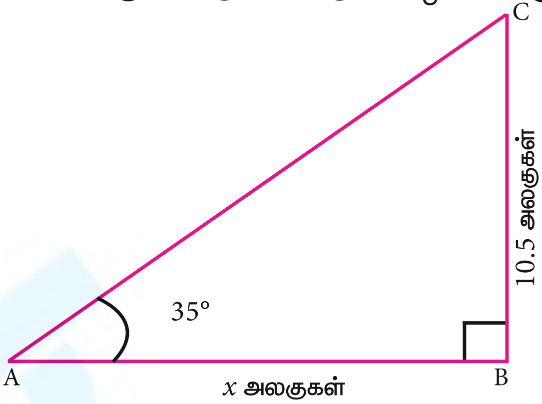
கீழ்க்காணும் மூன்று செங்கோண முக்கோணங்களை உற்று நோக்குங்கள். குறிப்பாக அவற்றின் அளவுகளை ஆராயுங்கள். மூன்று முக்கோணங்களிலும் கோண அளவுகள் ஒன்றாகவே உள்ளன. எதிர்ப்பக்கத்தின் (கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு எதிரே உள்ள பக்கம்) அளவுகளையும், அடுத்துள்ள

பக்கங்களின் (கொடுக்கப்பட்ட கோணத்திற்கு அடுத்துள்ள பக்கம்) அளவுகளையும் நன்கு ஆராயவும்.



படம் 6.1

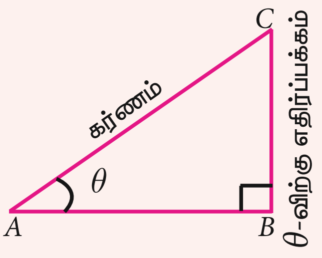
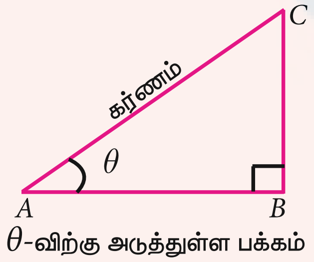
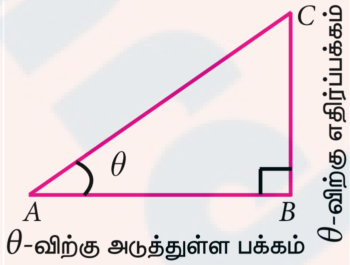
ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் எதிர்ப்பக்கம் மற்றும் அடுத்துள்ளப் பக்கங்களுக்கிடையேயான விகிதம் $\left(\dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}\right)$ என்ன என்று கூற இயலுமா? இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு செங்கோண முக்கோணத்திலும் இந்த விகிதம் 0.7; இந்த முடிவைப் பொறுத்துப் படம் 6.2 இல் x இன் மதிப்பு என்னவாக இருக்கும் ? அது 15 ஆக இருக்குமா?



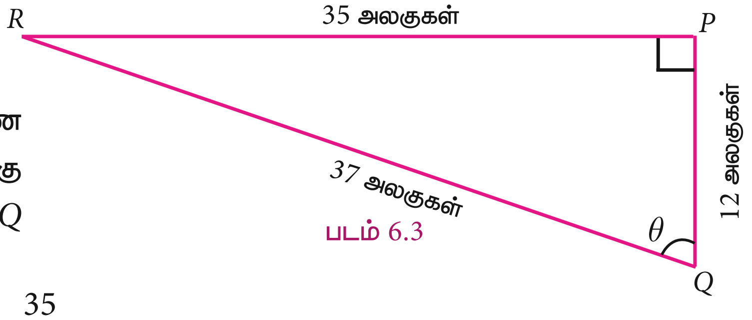
படம் 6.2

இதைப் போன்ற குறிப்பிடத்தக்க விகிதங்கள் அக்காலக் கணித அறிஞர்களை வியப்பில் ஆழ்த்தியதோடு மட்டுமல்லாமல், முக்கோணவியல் என்ற புதிய பாடம் உருவாவதற்கான வழிவகையையும் செய்தன.

முக்கோணவியலில் மூன்று அடிப்படை விகிதங்கள் உள்ளன. அம்மூன்று விகிதங்களும் செங்கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தை மற்றொரு பக்கத்தால் வகுக்கக் கிடைக்கும் விகிதங்களாகும். அவையாவன:

கோணத்தின் பெயர்	sine	cosine	tangent
சுருங்கிய வடிவம்	sin	cos	tan
ஒப்புமை அளவீடுகள்			
விகிதம்	$\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$

எடுத்துக்காட்டு 6.1 கீழ்க்காணும் படத்தில் உள்ள அளவுகளுக்கு θ வைப் பொறுத்து sine, cosine மற்றும் tangent விகிதங்களைக் கணக்கிடுக.



படம் 6.3

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள செங்கோண முக்கோணம் PQR இல் கோணம் θ விற்கு எதிர்ப்பக்கம் PR, அடுத்துள்ள பக்கம் PQ ஆகும்.

$$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PR}{QR} = \frac{35}{37}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PQ}{QR} = \frac{12}{37}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{PR}{PQ} = \frac{35}{12}$$

F7RIGH

முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்னங்களாகவே குறிப்பிடலாம். தேவைப்பட்டால் அவற்றைச் சுருக்கியும் எழுதலாம்.

குறிப்பு

முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் குறிப்பிடும்போது பக்க அளவுகளின் விகிதங்களாகக் குறிப்பிடுவதால் அவை அலகுகளற்ற எண்களாகும்.

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ போன்ற விகிதங்களை $(\sin)\times(\theta)$, $(\cos)\times(\theta)$, $(\tan)\times(\theta)$ எனத் தவறாக எடுத்துக் கொள்ளக்கூடாது.

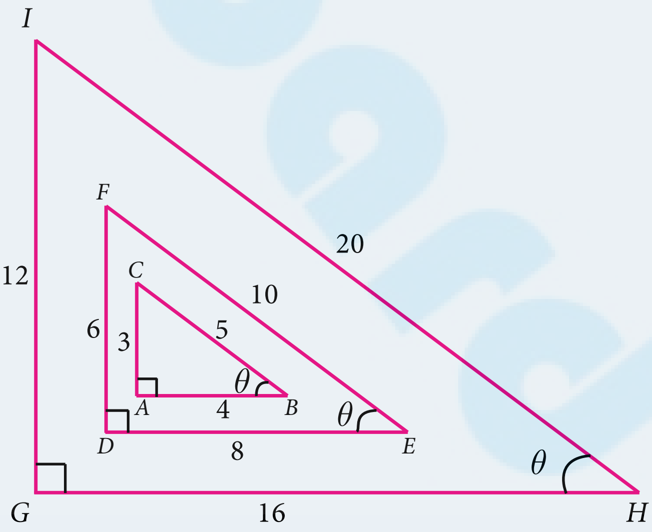
சிந்தனைக் களம்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணங்கள் ABC, DEF மற்றும் GHI இன் பக்க அளவுகள் 3-4-5, 6-8-10 மற்றும் 12-16-20.

இவை அனைத்தும் செங்கோண முக்கோணங்களா? விவாதிக்கவும்.

முனைகள் B, E மற்றும் H இல் அமையும் கோணங்களின் அளவுகள் சமமாக இருக்கும். (அவை ஒவ்வொன்றும் θ விற்குச் சமம்)

மேற்குறிப்பிடப்பட்டுள்ள விவரங்களைக் கொண்டு பின்வரும் அட்டவணையில் நிரப்பி, கிடைக்கும் விகிதங்களைப் பற்றிய கருத்துகளைக் கூறுக.



படம் 6.4

ΔABC இல்	ΔDEF இல்	ΔGHI இல்
$\sin\theta = \frac{3}{5}$	$\sin\theta = \frac{6}{10} = ?$	$\sin\theta = \frac{12}{20} = ?$
$\cos\theta = ?$	$\cos\theta = ?$	$\cos\theta = ?$
$\tan\theta = \frac{3}{4}$	$\tan\theta = ?$	$\tan\theta = ?$

தலைகீழ் விகிதங்கள் (Reciprocal ratios)

மூன்று முக்கோணவியல் விகிதங்களை நாம் sine, cosine மற்றும் tangent எனக் குறிப்பிட்டோம். இம்முக்கோணவியல் விகிதங்களின் தலைகீழ் விகிதங்கள் கணக்கீடுகளில் பெரிதும் பயனுள்ளவையாக இருக்கின்றன. அவற்றை நாம் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

முக்கோணவியல் அடிப்படை விகிதங்கள்	அவற்றின் தலைகீழிகள்	சுருங்கிய வடிவம்
$\sin\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\text{cosecant}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$	$\text{cosec}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$
$\cos\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\text{secant}\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$	$\sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$
$\tan\theta = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$	$\text{cotangent}\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$	$\cot\theta = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$

மேற்கண்ட விகிதங்களிலிருந்து கீழ்க்காணும் விகிதத் தொடர்புகளை நாம் அறியலாம்.

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

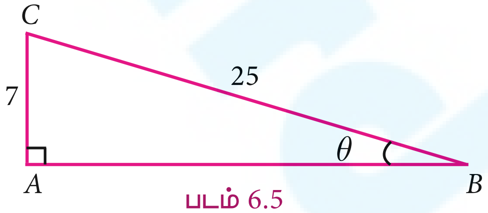
$(\sin\theta)\times(\text{cosec}\,\theta) = 1$. இதை நாம் $\sin\theta\cdot\text{cosec}\,\theta = 1$ என்று எழுதுவோம்.

$(\cos\theta)\times(\sec\theta) = 1$. இதை நாம் $\cos\theta.\sec\theta = 1$ என்று எழுதுவோம்.

$(\tan\theta)\times(\cot\theta) = 1$. இதை நாம் $\tan\theta\,.\,\cot\theta = 1$ என்று எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.2

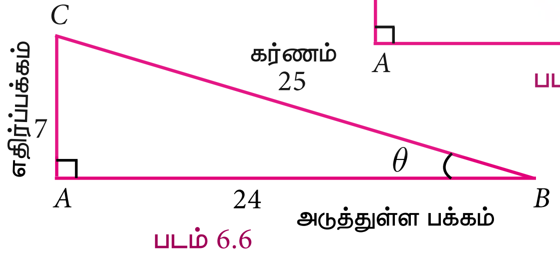
கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் θ -வைப் பொறுத்து 6 முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.



படம் 6.5

தீர்வு

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,



படம் 6.6

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$$
$$= \sqrt{(25)^2 - 7^2}$$
$$= \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$$

ஆறு முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பின்வருமாறு நாம் எழுதலாம்.

$\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \dfrac{7}{25}$ $\qquad$ $\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \dfrac{24}{25}$

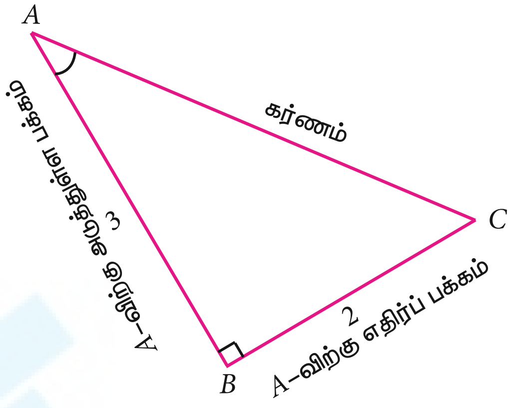
$\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \dfrac{7}{24}$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \dfrac{25}{7}$

$\sec\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \dfrac{25}{24}$ $\qquad$ $\cot\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \dfrac{24}{7}$

எடுத்துக்காட்டு 6.3 $\tan A = \dfrac{2}{3}$ எனில், மற்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்க.

தீர்வு

$$\tan A = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{2}{3}$$



படம் 6.7

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$AC = \sqrt{13}$$

$\sin A = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ $\qquad$ $\cos A = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$\operatorname{cosec} A = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ $\qquad$ $\sec A = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

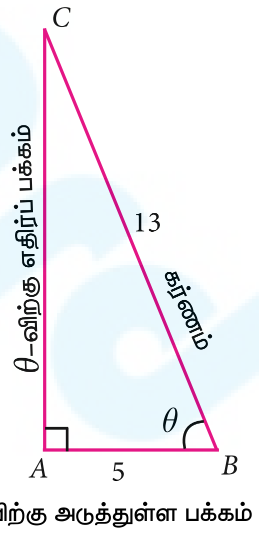
$\cot A = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}} = \dfrac{3}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 6.4 $\sec\theta = \dfrac{13}{5}$, எனில் $\dfrac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$BC = 13$ மற்றும் $AB = 5$ என்க.

$$\sec\theta = \frac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{BC}{AB} = \frac{13}{5}$$



படம் 6.8

பிதாகரஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$$
$$= \sqrt{13^2 - 5^2}$$
$$= \sqrt{169 - 25} \quad = \quad \sqrt{144} = 12$$

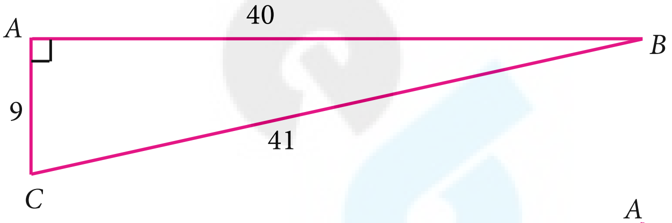
எனவே, $\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}$; $\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$

இடப்பக்கம் $= \frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = \frac{2\times\frac{12}{13} - 3\times\frac{5}{13}}{4\times\frac{12}{13} - 9\times\frac{5}{13}} = \frac{\frac{24-15}{13}}{\frac{48-45}{13}} = \frac{9}{3} = 3$ = வலப்பக்கம்

குறிப்பு : முனைப்புள்ளி C இல் கோணம் θ அமையுமாறு எடுத்துக்கொண்டும் மேற்கண்ட கணக்கை இதே வழியில் செய்யலாம்.

பயிற்சி 6.1

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், கோணம் B ஐப் பொறுத்து அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் காண்க.

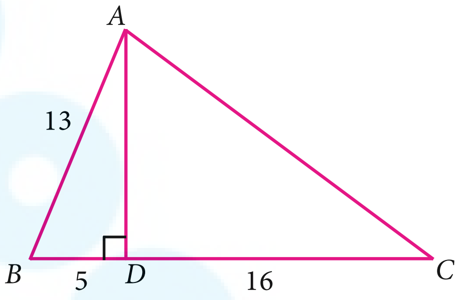


2. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில்,

   (i) $\sin B$ (ii) $\sec B$ (iii) $\cot B$

   (iv) $\cos C$ (v) $\tan C$ (vi) $\text{cosec}\, C$

   ஆகியவற்றைக் காண்க.



3. $2\cos\theta = \sqrt{3}$ எனில், θ–வின் அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களையும் காண்க.

4. $\cos A = \frac{3}{5}$ எனில் , $\frac{\sin A - \cos A}{2\tan A}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

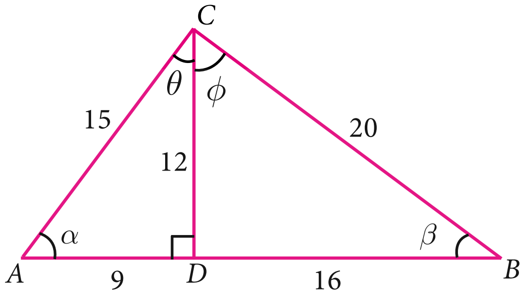
5. $\cos A = \frac{2x}{1+x^2}$ எனில், $\sin A$ மற்றும் $\tan A$ இன் மதிப்புகளை x இல் காண்க

6. $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனில், $b\sin\theta = a\cos\theta$ என நிறுவுக

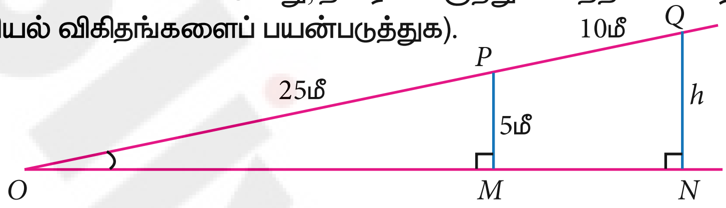
7. $3\cot A = 2$ எனில், $\frac{4\sin A - 3\cos A}{2\sin A + 3\cos A}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

8. $\cos\theta : \sin\theta = 1:2$ எனில், $\dfrac{8\cos\theta - 2\sin\theta}{4\cos\theta + 2\sin\theta}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

9. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் $\theta + \phi = 90°$ என மெய்பிக்க. இப்படத்தில் மேலும் இரு செங்கோண முக்கோணங்கள் உள்ளன என்பதை மெய்ப்பித்து, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ மற்றும் $\tan\phi$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும் காண்க.



10. ஒரு மாணவன் 'O' என்ற புள்ளியில் தரையில் நின்றுகொண்டு 'P' என்ற புள்ளியில் உள்ள பட்டத்தை $OP = 25$ மீ என்றவாறு காண்கிறான். Pஇலிருந்து மேலும் 10 மீ தொலைவு நகர்ந்து Q என்ற புள்ளியில் பட்டம் உள்ள போது, தரையிலிருந்து பட்டத்தின் உயரம் 'QN' ஐக் காண்க. (முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்துக).

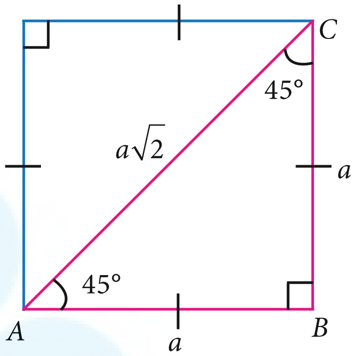


6.2 சில சிறப்புக் கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (Trigonometric Ratios of Some Special Angles)

சில குறிப்பிட்ட முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளை வடிவியல் முறையிலும் பெறலாம். இரு சிறப்பு வகை முக்கோணங்கள் இங்கே நமக்குப் பயன்படுகின்றன.

6.2.1 முக்கோணவியல் விகிதங்கள் – கோண அளவு 45° (Trigonometric ratios of 45°)

45°, 45° மற்றும் 90° கோண அளவுள்ள ஒரு முக்கோணம் ABC ஐப் படம் 6.9 இல் உள்ளவாறு எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 6.9

இது ஒரு சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தைப் பொறுத்து வெட்டப்பட்ட ஒரு சதுரத்தின் பாதி அளவு ஆகும். மேலும் இது ஒரு இரு சமபக்க முக்கோணம் என்பதைக் கவனத்தில் கொள்ளவும். (சதுரத்தின் பக்கங்கள் என்பதால் இம்முக்கோணத்தில் இரு பக்கங்கள் சம அளவானவையாக அதாவது a அலகுகள் இருக்கும்).

பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி மூலைவிட்டத்தின் நீளம் $a\sqrt{2}$ என்பதைச் சரிபார்க்கலாம்.

ABC என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து,

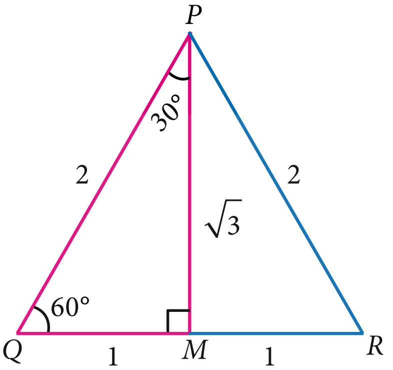
$$\sin 45° = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

இதன் தலைகீழ் விகிதங்களை இதிலிருந்து நாம் எளிதாக,
$\text{cosec } 45° = \sqrt{2}$;
$\sec 45° = \sqrt{2}$ மற்றும்
$\cot 45° = 1$ எனக் காணலாம்.

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

6.2.2 முக்கோணவியல் விகிதங்கள்–கோணங்கள் 30° மற்றும் 60° (Trigonometric Ratios of 30° and 60°)



படம் 6.10

பக்க அளவு 2 அலகுகள் கொண்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணம் PQR ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். $\angle P$ இன் கோண இரு சமவெட்டி வரைக. அது QR ஐ வெட்டும் புள்ளி M என்க.

$PQ = QR = RP = 2$ அலகுகள்.

$QM = MR = 1$ அலகு (ஏன்?)

PQ மற்றும் QM இன் மதிப்புகள் தெரியும் என்பதால், PM இன் மதிப்பைப் பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

இங்கு, $PM = \sqrt{3}$ அலகுகள் எனக் கிடைக்கும்.

தற்போது செங்கோண முக்கோணம் PQM இலிருந்து,

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{QM}{PM} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

> இதன் தலைகீழ் விகிதங்களை இதிலிருந்து நாம் எளிதாக $\operatorname{cosec} 30^\circ = 2, \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$ மற்றும் $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$ எனக் காணலாம்.

அதே முக்கோணத்தின் மற்றொரு கோணமான 60° ஐப் பொறுத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் காண்போம்.

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{PM}{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{QM}{PQ} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{PM}{QM} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

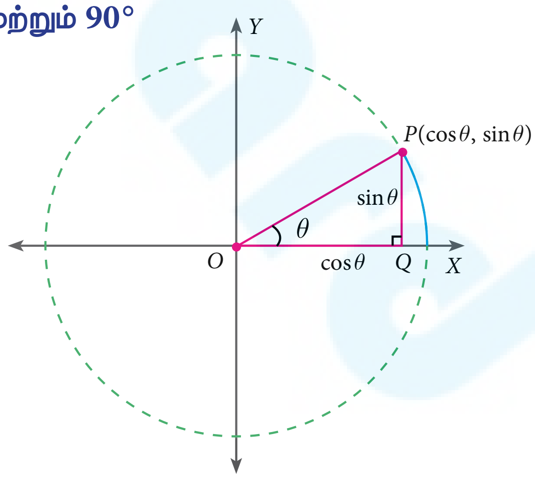
> இதன் தலைகீழ் விகிதங்களை இதிலிருந்து நாம் எளிதாக $\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \sec 60^\circ = 2$ மற்றும் $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ எனக் காணலாம்.

6.2.3 முக்கோணவியல் விகிதங்கள் – கோணங்கள் 0° மற்றும் 90° (Trigonometric Ratios of 0° and 90°)

முக்கோணவியல் விகிதங்கள் 0° மற்றும் 90° இன் மதிப்புகளைக் காண நாம் ஓரலகு வட்டத்தைப் பயன்படுத்திக்கொள்வோம்.

ஓரலகு வட்டம் என்பது ஆதிப்புள்ளியை மையமாகவும், ஆரம் 1 அலகும் கொண்ட ஒரு வட்டம் ஆகும்.

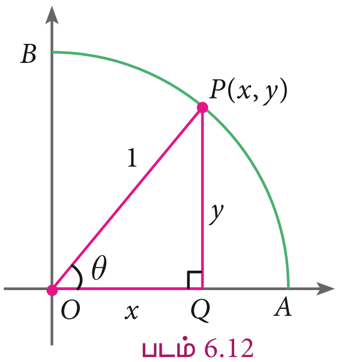
இதற்காக இங்கு 1 அலகு ஆரம் கொண்ட வட்டத்தை வரைகிறோம். ஏன்?



படம் 6.11

இவ்வட்டத்திற்குள் நாம் எடுத்துக்கொள்ளப்போகும் அனைத்து முக்கோணங்களுக்கும் கர்ணத்தின் அளவு 1 அலகாகவே இருப்பதால், கோணங்களையும், விகிதங்களையும் ஒப்பிடுவதற்கு மிக எளிதாக இருக்கும்.

நாம் மிகை மதிப்புகளை மட்டும் கணக்கிடுவதால், (தூரங்களின் அளவுகள் என்பதால்) அதற்குரிய முதற் காற்பகுதியை மட்டும் கணக்கில் எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 6.12

$P(x,y)$ என்பது ஓரலகு வட்டத்தின் மீது முதற் காற்பகுதியில் உள்ள ஒரு புள்ளி எனில், $\angle POQ = \theta$

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{1} = y \ ; \quad \cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{1} = x \ ; \quad \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

$\theta = 0°$ எனும்போது, OP ஆனது OA இன் மீது அமையும். இங்கு $A(1,0)$ என்பதால் $x = 1, \ y = 0$.

இதைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது,

$\sin 0° = 0$; $\operatorname{cosec} 0°$ = வரையறுக்கப்படவில்லை. (ஏன்?)

$\cos 0° = 1$; $\sec 0° = 1$

$\tan 0° = \frac{0}{1} = 0$; $\cot 0°$ = வரையறுக்கப்படவில்லை. (ஏன்?)

$\theta = 90°$ எனும்போது, OP ஆனது OB இன் மீது அமையும். இங்கு $B\ (0,1)$ என்பதால் $x = 0, y = 1$.

இதைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது,

$\sin 90° = 1$; $\operatorname{cosec} 90° = 1$

$\cos 90° = 0$; $\sec 90°$ = வரையறுக்கப்படவில்லை

$\tan 90° = \frac{1}{0}$ = வரையறுக்கப்படவில்லை ; $\cot 90° = 0$

இவ்வாறு பெறப்பட்ட அனைத்து முடிவுகளையும் அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

θ / முக்கோணவியல் விகிதங்கள்	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	வரையறுக்கப் படவில்லை
$\operatorname{cosec}\theta$	வரையறுக்கப் படவில்லை	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	வரையறுக்கப் படவில்லை
$\cot\theta$	வரையறுக்கப் படவில்லை	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

எடுத்துக்காட்டு 6.5 மதிப்பு காண்க. (i) $\sin 30° + \cos 30°$ (ii) $\tan 60° . \cot 60°$

(iii) $\dfrac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°}$ (iv) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$

தீர்வு

(i) $\sin 30° + \cos 30° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\tan 60° . \cot 60° = \sqrt{3} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$

(iii) $\dfrac{\tan 45°}{\tan 30° + \tan 60°} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{1}}$

$$= \frac{1}{\dfrac{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\dfrac{1+3}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(iv) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$$= \frac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

குறிப்பு

- $(\sin\theta)^2$ என்பதை $\sin^2\theta = (\sin\theta) \times (\sin\theta)$ என்போம்.
- $(\sin\theta)^2$ என்பதை $\sin\theta^2$ என எழுதக்கூடாது, ஏனெனில் இது $\sin(\theta\times\theta)$ எனப் பொருள்படும்.

சிந்தனைக் களம்

கீழ்க்கண்ட குழுக்களில் உள்ளவை போன்ற மூன்று எண்களைப் பித்தகோரியன் எண்கள் (அல்லது Pythagorean Triplets) என்பர். அவை மூன்றும் சேர்ந்து ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகளாக அமையும்.

(i) 3, 4, 5 (ii) 5, 12, 13 (iii) 7, 24, 25

மேற்குறிப்பிட்ட ஏதாவது ஒரு பித்தகோரியன் எண்கள் குழுவில் உள்ள மூன்று எண்களையும் பூச்சியமற்ற ஒரு மாறிலியால் பெருக்கவும். தற்போது கிடைக்கப் பெற்றுள்ள புதிய மூன்று எண்களும் பித்தகோரியன் எண்களா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.6 பின்வருவனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

(i) $(\cos 0° + \sin 45° + \sin 30°)(\sin 90° - \cos 45° + \cos 60°)$

(ii) $\tan^2 60° - 2\tan^2 45° - \cot^2 30° + 2\sin^2 30° + \dfrac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45°$

தீர்வு

(i) $(\cos 0° + \sin 45° + \sin 30°)(\sin 90° - \cos 45° + \cos 60°)$

$$= \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right]\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right]\left[\frac{2\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{3\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}}\right]\left[\frac{3\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{18 - 4}{4\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{14}{4 \times 2} = \frac{7}{4}$$

(ii) $\tan^2 60° - 2\tan^2 45° - \cot^2 30° + 2\sin^2 30° + \frac{3}{4}\operatorname{cosec}^2 45°$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2(1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 3 - 2 - 3 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= -2 + \frac{4}{2} = -2 + 2 = 0$$

குறிப்பு

- ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கோணங்கள் $45° : 45° : 90°$ என்ற அளவில் இருந்தால், அதன் பக்கங்கள் $1 : 1 : \sqrt{2}$.என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.
- இதைப் போலவே கோணங்கள் $30° : 60° : 90°$ என்ற விகிதத்தில் இருந்தால் அதன் பக்கங்கள் $1 : \sqrt{3} : 2$ என்ற விகிதத்தில் இருக்கும்.

(உங்கள் வடிவியல் கணித உபகரணப் பெட்டியில் இருக்கும் இரு மூலைமட்டக் கருவிகளே (*Set Squares*) மேற்கூறிய இரு முக்கோணங்களுக்கு மிகச் சிறந்த எடுத்துக்காட்டு ஆகும்.)

பயிற்சி 6.2

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க.

   (i) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$

   (ii) $1 + \tan^2 30° = \sec^2 30°$

   (iii) $\cos 90° = 1 - 2\sin^2 45° = 2\cos^2 45° - 1$

   (iv) $\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = \sin 90°$

2. கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

   (i) $\dfrac{\tan 45°}{\operatorname{cosec} 30°} + \dfrac{\sec 60°}{\cot 45°} - \dfrac{5\sin 90°}{2\cos 0°}$

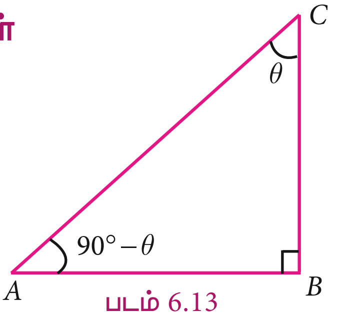
(ii) $(\sin 90° + \cos 60° + \cos 45°) \times (\sin 30° + \cos 0° - \cos 45°)$

(iii) $\sin^2 30° - 2\cos^3 60° + 3\tan^4 45°$

3. $A = 30°$ எனில், $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ என்பதைச் சரிப்பார்க்கவும்.

4. $x = 15°$ எனில், $8\sin 2x.\cos 4x.\sin 6x$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

6.3 நிரப்புக் கோணங்களுக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்கள் (Trigonometric Ratios for Complementary Angles)



படம் 6.13

இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90° எனில், அவை நிரப்புக் கோணங்கள் என்பதை நினைவுகூர்வோம். ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் உள்ள இரு குறுங்கோணங்களைப் பற்றி என்ன கூறலாம்?

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்திலுள்ள இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் 90°.எனவே செங்கோண முக்கோணத்தில் உள்ள இரு குறுங்கோணங்கள் எப்பொழுதுமே ஒன்றுக்கொன்று நிரப்புக் கோணங்கள் ஆகும்.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் 6.13 இல், முக்கோணம் ABC ஆனது B இல் செங்கோணத்தைத் தாங்கியுள்ளது. மேலும் $\angle C = \theta$ எனில், $\angle A = 90° - \theta$ ஆகும்.

கோணம் θ ஐப் பொறுத்து

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{AB}{AC} & \operatorname{cosec}\theta &= \frac{AC}{AB} \\ \cos\theta &= \frac{BC}{AC} & \sec\theta &= \frac{AC}{BC} \\ \tan\theta &= \frac{AB}{BC} & \cot\theta &= \frac{BC}{AB} \end{aligned}\right\} \ldots(1)$$

இதைப் போலவே கோணம் (90° – θ) ஐப் பொறுத்து,

$$\left.\begin{aligned} \sin(90°-\theta) &= \frac{BC}{AC} & \operatorname{cosec}(90°-\theta) &= \frac{AC}{BC} \\ \cos(90°-\theta) &= \frac{AB}{AC} & \sec(90°-\theta) &= \frac{AC}{AB} \\ \tan(90°-\theta) &= \frac{BC}{AB} & \cot(90°-\theta) &= \frac{AB}{BC} \end{aligned}\right\} \ldots(2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ ஒப்பிட,

$\sin\theta$	=	$\cos(90°-\theta)$	$\operatorname{cosec}\theta$	=	$\sec(90°-\theta)$
$\cos\theta$	=	$\sin(90°-\theta)$	$\sec\theta$	=	$\operatorname{cosec}(90°-\theta)$
$\tan\theta$	=	$\cot(90°-\theta)$	$\cot\theta$	=	$\tan(90°-\theta)$

எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.7

கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் கேட்கப்பட்டுள்ள முக்கோணவியல் விகிதங்களில் மாற்றிக் கூறுக. (i) $\sin 74°$இன் மதிப்பை cosine இல் (ii) $\tan 12°$ இன் மதிப்பை cotangent இல் (iii) $\operatorname{cosec} 39°$ இன் மதிப்பை secant இல்

தீர்வு

(i) $\sin 74^\circ = \sin(90^\circ - 16^\circ)$ (ஏனெனில், $90^\circ - 16^\circ = 74^\circ$)

வலப்பக்கமானது $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

எனவே, $\sin 74^\circ = \cos 16^\circ$

(ii) $\tan 12^\circ = \tan(90^\circ - 78^\circ)$ (ஏனெனில், , $12^\circ = 90^\circ - 78^\circ$)

வலப்பக்கமானது $\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

எனவே, $\tan 12^\circ = \cot 78^\circ$

(iii) $\operatorname{cosec} 39^\circ = \operatorname{cosec}(90^\circ - 51^\circ)$ (ஏனெனில், $39^\circ = 90^\circ - 51^\circ$)

வலப்பக்கமானது $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta$ என்ற வடிவில் உள்ளது.

எனவே, $\operatorname{cosec} 39^\circ = \sec 51^\circ$

எடுத்துக்காட்டு 6.8

மதிப்பிடுக. (i) $\dfrac{\sin 49^\circ}{\cos 41^\circ}$ (ii) $\dfrac{\sec 63^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ}$

தீர்வு

(i) $\dfrac{\sin 49^\circ}{\cos 41^\circ}$

$\sin 49^\circ = \sin(90^\circ - 41^\circ) = \cos 41^\circ$ ஏனெனில், $49^\circ + 41^\circ = 90^\circ$ (நிரப்புக் கோணங்கள்),

$\sin 49^\circ = \cos 41^\circ$ எனப் பிரதியிட நாம் பெறுவது, $\dfrac{\cos 41^\circ}{\cos 41^\circ} = 1$

(ii) $\dfrac{\sec 63^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ}$

$\sec 63^\circ = \sec(90^\circ - 27^\circ) = \operatorname{cosec} 27^\circ$, எனப் பிரதியிட,

(இங்கு, 63° மற்றும் 27° நிரப்புக் கோணங்கள்) நாம் பெறுவது,

$$\frac{\sec 63^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ} = \frac{\operatorname{cosec} 27^\circ}{\operatorname{cosec} 27^\circ} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 6.9

மதிப்புக் காண்க. (i) $\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

(ii) $\dfrac{\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

தீர்வு

(i) $\tan 7^\circ \tan 23^\circ \tan 60^\circ \tan 67^\circ \tan 83^\circ$

$= \tan 7^\circ \tan 83^\circ \tan 23^\circ \tan 67^\circ \tan 60^\circ$ (நிரப்புக் கோணங்களைக் குழுப்படுத்த)

$= \tan 7^\circ \tan(90^\circ - 7^\circ) \tan 23^\circ \tan(90^\circ - 23^\circ) \tan 60^\circ$

$= (\tan 7^\circ \cot 7^\circ)(\tan 23^\circ \cot 23^\circ) \tan 60^\circ$

$= (1) \times (1) \times \tan 60^\circ$

$= \tan 60^\circ \qquad = \sqrt{3}$

(ii) $\dfrac{\cos 35^\circ}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos 18^\circ}{\sin 72^\circ}$

$= \dfrac{\cos(90^\circ - 55^\circ)}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\sin(90^\circ - 78^\circ)}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\cos(90^\circ - 72^\circ)}{\sin 72^\circ}$

$= \dfrac{\sin 55^\circ}{\sin 55^\circ} + \dfrac{\cos 78^\circ}{\cos 78^\circ} - \dfrac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ}$

ஏனெனில்,
$\cos 35^\circ = \cos(90^\circ - 55^\circ)$
$\sin 12^\circ = \sin(90^\circ - 78^\circ)$
$\cos 18^\circ = \cos(90^\circ - 72^\circ)$

$= 1 + 1 - 1 = 1$

எடுத்துக்காட்டு 6.10

(i) $\operatorname{cosec} A = \sec 34^\circ$ எனில், A இன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $\tan B = \cot 47^\circ$ எனில், B இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

(i) $\operatorname{cosec} A = \sec(90^\circ - A)$ என நாம் அறிவோம்.

$\sec(90^\circ - A) = \sec(34^\circ)$

$90^\circ - A = 34^\circ$

$A = 90^\circ - 34^\circ$

$A = 56^\circ$

(ii) $\tan B = \cot(90^\circ - B)$ என நாம் அறிவோம்.

$\cot(90^\circ - B) = \cot 47^\circ$

$90^\circ - B = 47^\circ$

$B = 90^\circ - 47^\circ$

$B = 43^\circ$

பயிற்சி 6.3

1. கீழ்க்காண்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\left(\dfrac{\cos 47^\circ}{\sin 43^\circ}\right)^2 + \left(\dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}\right)^2 - 2\cos^2 45^\circ$

(ii) $\dfrac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} + \dfrac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ} + \dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ - \theta)} - 8\cos^2 60^\circ$

(iii) $\tan 15^\circ \tan 30^\circ \tan 45^\circ \tan 60^\circ \tan 75^\circ$

(iv) $\dfrac{\cot\theta}{\tan(90^\circ - \theta)} + \dfrac{\cos(90^\circ - \theta)\tan\theta\sec(90^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ - \theta)\cot(90^\circ - \theta)\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)}$

சிந்தனைக் களம்

(i) $\sin\theta$ இன் குறைந்தளவு மற்றும் அதிகளவு மதிப்பு எவ்வளவு?

(ii) $\cos\theta$ இன் குறைந்தளவு மற்றும் அதிகளவு மதிப்பு எவ்வளவு?

6.4 முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தும் முறை (Method of using Trigonometric Table)

0°, 30°, 45°, 60° மற்றும் 90° போன்ற முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளை நாம் கணக்கிடக் கற்றுக்கொண்டோம். ஆனால் சில சமயங்களில் அனைத்துக் குறுங்கோணங்களின் முக்கோணவியல் விகிதங்களின் மதிப்புகளையும் நாம் கணக்கிட வேண்டியுள்ளது. எனவே முக்கோணவியல் விகித அட்டவணையைப் பயன்படுத்த நாம் கற்றுக்கொள்வோம்.

இங்கு ஒரு பாகை (1°) என்பது 60 நிமிடங்களாகவும் $(60')$ மற்றும் ஒரு நிமிடம் $(1')$ என்பது 60 நொடிகளாகவும் $(60'')$ பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. எனவே, $1^\circ = 60'$ மற்றும் $1' = 60''$.

முக்கோணவியல் விகித அட்டவணையானது 0° முதல் 90° வரையான கோணங்களை $60'$ நிமிடத்தின் சம இடைவெளிகளாகப் பிரித்து, அவற்றின் மதிப்புகளை நான்கு தசம இடத் திருத்தமாகக் கொண்டுள்ளது. இந்த அட்டவணையானது மூன்று பகுதிகளைக் கொண்டது.

இடது ஓரமாக உள்ள நிரலானது 0° முதல் 90° வரை பாகை அளவுகளைக் கொண்டது. அதைத் தொடர்ந்து பத்து நிரல்கள் $0', 6', 12', 18', 24', 30', 36', 42', 48'$ மற்றும் $54'$ எனப் பத்துத் தலைப்புகளின் கீழ் நிமிடங்கள் வரிசையாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பொது வித்தியாசம் என்ற தலைப்பில் ஐந்து நிரல்கள் 1, 2, 3, 4 மற்றும் 5 என்ற மதிப்புகள் இடம்பெற்றுள்ளன.

மேலே குறிப்பிட்ட பத்து நிரலில் உள்ள நிமிட அளவுகளைத் தவிரப் பிற கோண அளவுகளுக்கு ஏற்றவாறு பொது வித்தியாசங்களை கூட்டியோ, கழித்தோ அதன் மதிப்புகளைப் பெறலாம். sine மற்றும் tangent விகிதங்களுக்குப் பொது வித்தியாசத்தைக் கூட்டியும் cosine விகிதங்களுக்குப் பொது வித்தியாசத்தைக் கழித்தும் கோண விகித மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கணக்கிடும் முறையைப் புரிந்துகொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.11

$\sin 64^\circ 34'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	$0'$	$6'$	$12'$	$18'$	$24'$	$30'$	$36'$	$42'$	$48'$	$54'$	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
64°						0.9026								5	

$64^\circ 34' = 64^\circ 30' + 4'$ என எழுதலாம்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\sin 64^\circ 30' = 0.9026$

பொது வித்தியாசம் $4' = 5$ (sine –ற்குப் பொது வித்தியாசத்தைக் கூட்டவும்)

$\sin 64^\circ 34' = 0.9031$

எடுத்துக்காட்டு 6.12

$\cos 19°59'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
19°										0.9403					5

$19°59' = 19°54' + 5'$ என எழுதலாம்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\cos 19°54' = 0.9403$

பொது வித்தியாசம் $5' =$ 5 (cosine –ற்குப் பொது வித்தியாசத்தைக் கழிக்கவும்)

$\cos 19°59' = 0.9398$

எடுத்துக்காட்டு 6.13

$\tan 70°13'$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
70°			2.7776								26				

$70°13' = 70°12' + 1'$ என எழுதலாம்.

அட்டவணையிலிருந்து, $\tan 70°12' = 2.7776$

பொது வித்தியாசம் $1' =$ 26 (tan –ற்குப் பொது வித்தியாசத்தைக் கூட்டவும்)

$\tan 70°13' = 2.7802$

எடுத்துக்காட்டு 6.14

மதிப்பு காண்க. (i) $\sin 38°36' + \tan 12°12'$ (ii) $\tan 60°25' - \cos 49°20'$

தீர்வு

(i) $\sin 38°36' + \tan 12°12'$

$\sin 38°36' = 0.6239$

$\tan 12°12' = 0.2162$

$\sin 38°36' + \tan 12°12' = 0.8401$

(ii) $\tan 60°25' - \cos 49°20'$

$\tan 60°25' = 1.7603 + 0.0012 = 1.7615$

$\cos 49°20' = 0.6521 - 0.0004 = 0.6517$

$\tan 60°25' - \cos 49°20' = 1.1098$

எடுத்துக்காட்டு 6.15

θ இன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\sin\theta = 0.9858$ (ii) $\cos\theta = 0.7656$

தீர்வு

(i) $\sin\theta = 0.9858 = 0.9857 + 0.0001$

அட்டவணையிலிருந்து, $0.9857 = 80°18'$

பொது வித்தியாசம் $1 = 2'$

$0.9858 = 80°20'$

$\sin\theta = 0.9858 = \sin 80°20'$

$\theta = 80°20'$

(iii) $\cos\theta = 0.7656 = 0.7660 - 0.0004$

அட்டவணையிலிருந்து, $0.7660 = 40°0'$

பொது வித்தியாசம் $4 = 2'$ (பொது வித்தியாசத்தைக் கழிக்கவும்)

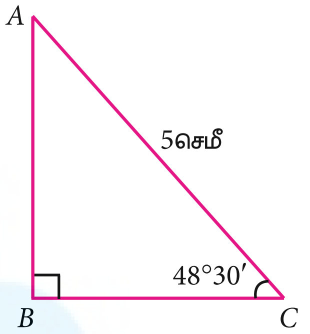
$0.7656 = 40°2'$

$\cos\theta = 0.7656 = \cos 40°2'$

$\theta = 40°2'$

எடுத்துக்காட்டு 6.16

கர்ணம் 5 செமீ மற்றும் ஒரு குறுங்கோணம் $48°30'$ கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.



படம் 6.14

தீர்வு

படத்திலிருந்து,

$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\sin 48°30' = \frac{AB}{5}$

$0.7490 = \frac{AB}{5}$

$5 \times 0.7490 = AB$

$AB = 3.7450$ செமீ

$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$

$\cos 48°30' = \frac{BC}{5}$

$0.6626 = \frac{BC}{5}$

$0.6626 \times 5 = BC$

$BC = 3.313$ செமீ

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}bh$

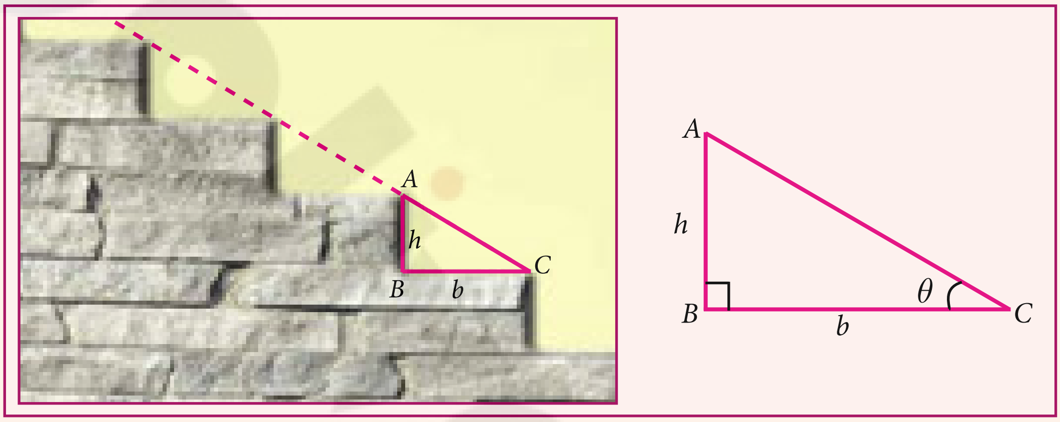
$$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 3.3130 \times 3.7450$$

$$= 1.6565 \times 3.7450 \quad = 6.2035925 \text{ செமீ}^2$$

செயல்பாடு

உங்கள் வீட்டின் படிகளைக் கவனியுங்கள். அவற்றில் ஒரு படியின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரங்களைக் கணக்கிடுக. அதைக் கீழ்க்காணும் படத்தில் குறித்துப் படியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.



(i) ஒரே உயரம் மற்றும் அகலங்களைக் கொண்ட வேறுபட்ட படிக்கட்டுகளின் ஏற்றக் கோணங்களை ஒப்பிடவும். மேலும் அவற்றை உற்று நோக்கி விவாதிக்கவும்.

(ii) சில நேரங்களில் வீட்டில் உள்ள சில படிகள் ஒரே உயரத்தில் இல்லாமல் இருக்கலாம். அது போல் ஒரே அகலமும் வெவ்வேறு உயரங்களும் கொண்ட படிகளின் ஏற்றக் கோணங்களையும் கணக்கிட்டு ஒப்பிட்டு விவாதிக்கவும்.

பயிற்சி 6.4

1. கீழ்க்காண்பனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

   (i) $\sin 49°$ (ii) $\cos 74°39'$ (iii) $\tan 54°26'$ (iv) $\sin 21°21'$ (v) $\cos 33°53'$ (vi) $\tan 70°17'$

2. θ இன் மதிப்பு காண்க.

   (i) $\sin\theta = 0.9975$ (ii) $\cos\theta = 0.6763$ (iii) $\tan\theta = 0.0720$

   (iv) $\cos\theta = 0.0410$ (v) $\tan\theta = 7.5958$

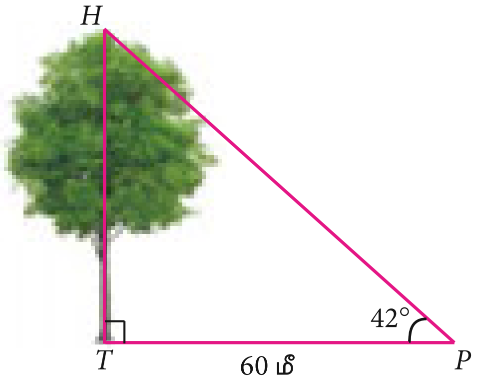
3. கீழ்க்காண்பனவற்றின் மதிப்பு காண்க.

   (i) $\sin 65°39' + \cos 24°57' + \tan 10°10'$ $\tan 70°58' + \cos 15°26' - \sin 84°59'$

4. கர்ணம் 10 செமீ மற்றும் ஒரு குறுங்கோண அளவு $24°24'$ கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க.

5. 5மீ நீளமுள்ள ஓர் ஏணியானது சுவற்றிலிருந்து 4மீ தொலைவில் அடிப்பாகம் தரையைத் தொடுமாறு சுவற்றின் மீது சாய்த்து வைக்கப்பட்டுள்ளது எனில், ஏணி தரைப்பகுதியுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் காண்க.

6. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், HT என்பது நேரான ஒரு மரத்தின் உயரத்தைக் குறிக்கிறது. மரத்தின் அடிப்பாகத்திலிருந்து 60 மீட்டர் தொலைவிலுள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து மரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் ($\angle P$) 42° எனில் மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.



பயிற்சி 6.5

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. $\sin 30° = x$ மற்றும் $\cos 60° = y$ எனில், $x^2 + y^2$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) $\sin 90°$ (4) $\cos 90°$

2. $\tan\theta = \cot 37°$ எனில், θ இன் மதிப்பு

(1) 37° (2) 53° (3) 90° (4) 1°

3. $\tan 72° \tan 18°$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 18° (4) 72°

4. $\frac{2\tan 30°}{1-\tan^2 30°}$ இன் மதிப்பு

(1) $\cos 60°$ (2) $\sin 60°$ (3) $\tan 60°$ (4) $\sin 30°$

5. $2\sin 2\theta = \sqrt{3}$ எனில், θ இன் மதிப்பு

(1) 90° (2) 30° (3) 45° (4) 60°

6. $3\sin 70° \sec 20° + 2\sin 49° \sec 51°$ இன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 3 (3) 5 (4) 6

7. $\frac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°}$ இன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 1 (3) 0 (4) $\frac{1}{2}$

8. $\operatorname{cosec}(70°+\theta) - \sec(20°-\theta) + \tan(65°+\theta) - \cot(25°-\theta)$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

9. $\tan 1° \tan 2° \tan 3° \ldots \tan 89°$ இன் மதிப்பு

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ மற்றும் $\cos\beta = \frac{1}{2}$ எனில், $\alpha + \beta$ இன் மதிப்பு

(1) 0° (2) 90° (3) 30° (4) 60°

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

$\sin\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\text{cosec}\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$
$\cos\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}}$	$\sec\theta = \dfrac{\text{கர்ணம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$
$\tan\theta = \dfrac{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}$	$\cot\theta = \dfrac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{எதிர்ப் பக்கம்}}$

- முக்கோணவியல் விகிதங்களின் தலைகீழிகள்

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- நிரப்புக் கோணங்களுக்கான முக்கோணவியல் விகிதங்கள்

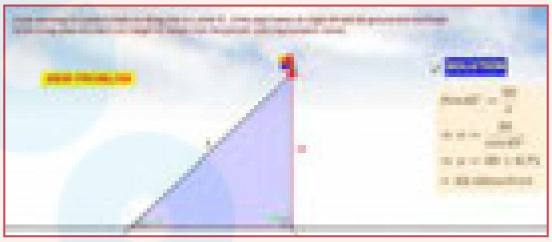
$$\sin\theta = \cos(90° - \theta) \qquad \text{cosec}\theta = \sec(90° - \theta)$$

$$\cos\theta = \sin(90° - \theta) \qquad \sec\theta = \text{cosec}(90° - \theta)$$

$$\tan\theta = \cot(90° - \theta) \qquad \cot\theta = \tan(90° - \theta)$$

இணையச் செயல்பாடு

செயல்பாட்டின் இறுதியில் கிடைக்கப்பெறுவது



படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, GeoGebra வின் "Trigonometry" பக்கத்திற்குச் செல்க. Trigonometric ratios, Complimentary angles மற்றும் Kite problem ஆகிய மூன்று தலைப்புகளில் பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

புள்ளிகளையும் விகிதங்களையும் மாற்றுவதற்கு உரிய மதிப்பிற்கு நழுவலை நகர்த்தவும். கணக்குகளைச் செய்து விடைகளைச் சரி பார்க்கவும்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

முக்கோணவியல் : https://ggbm.at/hkwnccr6 or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

NATURAL SINES

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0366	0.0384	0.0401	0.0419	0.0436	0.0454	0.0471	0.0488	0.0506	3	6	9	12	15
3	0.0523	0.0541	0.0558	0.0576	0.0593	0.0610	0.0628	0.0645	0.0663	0.0680	3	6	9	12	15
4	0.0698	0.0715	0.0732	0.0750	0.0767	0.0785	0.0802	0.0819	0.0837	0.0854	3	6	9	12	15
5	0.0872	0.0889	0.0906	0.0924	0.0941	0.0958	0.0976	0.0993	0.1011	0.1028	3	6	9	12	14
6	0.1045	0.1063	0.1080	0.1097	0.1115	0.1132	0.1149	0.1167	0.1184	0.1201	3	6	9	12	14
7	0.1219	0.1236	0.1253	0.1271	0.1288	0.1305	0.1323	0.1340	0.1357	0.1374	3	6	9	12	14
8	0.1392	0.1409	0.1426	0.1444	0.1461	0.1478	0.1495	0.1513	0.1530	0.1547	3	6	9	12	14
9	0.1564	0.1582	0.1599	0.1616	0.1633	0.1650	0.1668	0.1685	0.1702	0.1719	3	6	9	12	14
10	0.1736	0.1754	0.1771	0.1788	0.1805	0.1822	0.1840	0.1857	0.1874	0.1891	3	6	9	12	14
11	0.1908	0.1925	0.1942	0.1959	0.1977	0.1994	0.2011	0.2028	0.2045	0.2062	3	6	9	11	14
12	0.2079	0.2096	0.2113	0.2130	0.2147	0.2164	0.2181	0.2198	0.2215	0.2233	3	6	9	11	14
13	0.2250	0.2267	0.2284	0.2300	0.2317	0.2334	0.2351	0.2368	0.2385	0.2402	3	6	8	11	14
14	0.2419	0.2436	0.2453	0.2470	0.2487	0.2504	0.2521	0.2538	0.2554	0.2571	3	6	8	11	14
15	0.2588	0.2605	0.2622	0.2639	0.2656	0.2672	0.2689	0.2706	0.2723	0.2740	3	6	8	11	14
16	0.2756	0.2773	0.2790	0.2807	0.2823	0.2840	0.2857	0.2874	0.2890	0.2907	3	6	8	11	14
17	0.2924	0.2940	0.2957	0.2974	0.2990	0.3007	0.3024	0.3040	0.3057	0.3074	3	6	8	11	14
18	0.3090	0.3107	0.3123	0.3140	0.3156	0.3173	0.3190	0.3206	0.3223	0.3239	3	6	8	11	14
19	0.3256	0.3272	0.3289	0.3305	0.3322	0.3338	0.3355	0.3371	0.3387	0.3404	3	5	8	11	14
20	0.3420	0.3437	0.3453	0.3469	0.3486	0.3502	0.3518	0.3535	0.3551	0.3567	3	5	8	11	14
21	0.3584	0.3600	0.3616	0.3633	0.3649	0.3665	0.3681	0.3697	0.3714	0.3730	3	5	8	11	14
22	0.3746	0.3762	0.3778	0.3795	0.3811	0.3827	0.3843	0.3859	0.3875	0.3891	3	5	8	11	14
23	0.3907	0.3923	0.3939	0.3955	0.3971	0.3987	0.4003	0.4019	0.4035	0.4051	3	5	8	11	14
24	0.4067	0.4083	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4163	0.4179	0.4195	0.4210	3	5	8	11	13
25	0.4226	0.4242	0.4258	0.4274	0.4289	0.4305	0.4321	0.4337	0.4352	0.4368	3	5	8	11	13
26	0.4384	0.4399	0.4415	0.4431	0.4446	0.4462	0.4478	0.4493	0.4509	0.4524	3	5	8	10	13
27	0.4540	0.4555	0.4571	0.4586	0.4602	0.4617	0.4633	0.4648	0.4664	0.4679	3	5	8	10	13
28	0.4695	0.4710	0.4726	0.4741	0.4756	0.4772	0.4787	0.4802	0.4818	0.4833	3	5	8	10	13
29	0.4848	0.4863	0.4879	0.4894	0.4909	0.4924	0.4939	0.4955	0.4970	0.4985	3	5	8	10	13
30	0.5000	0.5015	0.5030	0.5045	0.5060	0.5075	0.5090	0.5105	0.5120	0.5135	3	5	8	10	13
31	0.5150	0.5165	0.5180	0.5195	0.5210	0.5225	0.5240	0.5255	0.5270	0.5284	2	5	7	10	12
32	0.5299	0.5314	0.5329	0.5344	0.5358	0.5373	0.5388	0.5402	0.5417	0.5432	2	5	7	10	12
33	0.5446	0.5461	0.5476	0.5490	0.5505	0.5519	0.5534	0.5548	0.5563	0.5577	2	5	7	10	12
34	0.5592	0.5606	0.5621	0.5635	0.5650	0.5664	0.5678	0.5693	0.5707	0.5721	2	5	7	10	12
35	0.5736	0.5750	0.5764	0.5779	0.5793	0.5807	0.5821	0.5835	0.5850	0.5864	2	5	7	10	12
36	0.5878	0.5892	0.5906	0.5920	0.5934	0.5948	0.5962	0.5976	0.5990	0.6004	2	5	7	9	12
37	0.6018	0.6032	0.6046	0.6060	0.6074	0.6088	0.6101	0.6115	0.6129	0.6143	2	5	7	9	12
38	0.6157	0.6170	0.6184	0.6198	0.6211	0.6225	0.6239	0.6252	0.6266	0.6280	2	5	7	9	11
39	0.6293	0.6307	0.6320	0.6334	0.6347	0.6361	0.6374	0.6388	0.6401	0.6414	2	4	7	9	11
40	0.6428	0.6441	0.6455	0.6468	0.6481	0.6494	0.6508	0.6521	0.6534	0.6547	2	4	7	9	11
41	0.6561	0.6574	0.6587	0.6600	0.6613	0.6626	0.6639	0.6652	0.6665	0.6678	2	4	7	9	11
42	0.6691	0.6704	0.6717	0.6730	0.6743	0.6756	0.6769	0.6782	0.6794	0.6807	2	4	6	9	11
43	0.6820	0.6833	0.6845	0.6858	0.6871	0.6884	0.6896	0.6909	0.6921	0.6934	2	4	6	8	11
44	0.6947	0.6959	0.6972	0.6984	0.6997	0.7009	0.7022	0.7034	0.7046	0.7059	2	4	6	8	10

NATURAL SINES

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7083	0.7096	0.7108	0.7120	0.7133	0.7145	0.7157	0.7169	0.7181	2	4	6	8	10
46	0.7193	0.7206	0.7218	0.7230	0.7242	0.7254	0.7266	0.7278	0.7290	0.7302	2	4	6	8	10
47	0.7314	0.7325	0.7337	0.7349	0.7361	0.7373	0.7385	0.7396	0.7408	0.7420	2	4	6	8	10
48	0.7431	0.7443	0.7455	0.7466	0.7478	0.7490	0.7501	0.7513	0.7524	0.7536	2	4	6	8	10
49	0.7547	0.7559	0.7570	0.7581	0.7593	0.7604	0.7615	0.7627	0.7638	0.7649	2	4	6	8	9
50	0.7660	0.7672	0.7683	0.7694	0.7705	0.7716	0.7727	0.7738	0.7749	0.7760	2	4	6	7	9
51	0.7771	0.7782	0.7793	0.7804	0.7815	0.7826	0.7837	0.7848	0.7859	0.7869	2	4	5	7	9
52	0.7880	0.7891	0.7902	0.7912	0.7923	0.7934	0.7944	0.7955	0.7965	0.7976	2	4	5	7	9
53	0.7986	0.7997	0.8007	0.8018	0.8028	0.8039	0.8049	0.8059	0.8070	0.8080	2	3	5	7	9
54	0.8090	0.8100	0.8111	0.8121	0.8131	0.8141	0.8151	0.8161	0.8171	0.8181	2	3	5	7	8
55	0.8192	0.8202	0.8211	0.8221	0.8231	0.8241	0.8251	0.8261	0.8271	0.8281	2	3	5	7	8
56	0.8290	0.8300	0.8310	0.8320	0.8329	0.8339	0.8348	0.8358	0.8368	0.8377	2	3	5	6	8
57	0.8387	0.8396	0.8406	0.8415	0.8425	0.8434	0.8443	0.8453	0.8462	0.8471	2	3	5	6	8
58	0.8480	0.8490	0.8499	0.8508	0.8517	0.8526	0.8536	0.8545	0.8554	0.8563	2	3	5	6	8
59	0.8572	0.8581	0.8590	0.8599	0.8607	0.8616	0.8625	0.8634	0.8643	0.8652	1	3	4	6	7
60	0.8660	0.8669	0.8678	0.8686	0.8695	0.8704	0.8712	0.8721	0.8729	0.8738	1	3	4	6	7
61	0.8746	0.8755	0.8763	0.8771	0.8780	0.8788	0.8796	0.8805	0.8813	0.8821	1	3	4	6	7
62	0.8829	0.8838	0.8846	0.8854	0.8862	0.8870	0.8878	0.8886	0.8894	0.8902	1	3	4	5	7
63	0.8910	0.8918	0.8926	0.8934	0.8942	0.8949	0.8957	0.8965	0.8973	0.8980	1	3	4	5	6
64	0.8988	0.8996	0.9003	0.9011	0.9018	0.9026	0.9033	0.9041	0.9048	0.9056	1	3	4	5	6
65	0.9063	0.9070	0.9078	0.9085	0.9092	0.9100	0.9107	0.9114	0.9121	0.9128	1	2	4	5	6
66	0.9135	0.9143	0.9150	0.9157	0.9164	0.9171	0.9178	0.9184	0.9191	0.9198	1	2	3	5	6
67	0.9205	0.9212	0.9219	0.9225	0.9232	0.9239	0.9245	0.9252	0.9259	0.9265	1	2	3	4	6
68	0.9272	0.9278	0.9285	0.9291	0.9298	0.9304	0.9311	0.9317	0.9323	0.9330	1	2	3	4	5
69	0.9336	0.9342	0.9348	0.9354	0.9361	0.9367	0.9373	0.9379	0.9385	0.9391	1	2	3	4	5
70	0.9397	0.9403	0.9409	0.9415	0.9421	0.9426	0.9432	0.9438	0.9444	0.9449	1	2	3	4	5
71	0.9455	0.9461	0.9466	0.9472	0.9478	0.9483	0.9489	0.9494	0.9500	0.9505	1	2	3	4	5
72	0.9511	0.9516	0.9521	0.9527	0.9532	0.9537	0.9542	0.9548	0.9553	0.9558	1	2	3	3	4
73	0.9563	0.9568	0.9573	0.9578	0.9583	0.9588	0.9593	0.9598	0.9603	0.9608	1	2	2	3	4
74	0.9613	0.9617	0.9622	0.9627	0.9632	0.9636	0.9641	0.9646	0.9650	0.9655	1	2	2	3	4
75	0.9659	0.9664	0.9668	0.9673	0.9677	0.9681	0.9686	0.9690	0.9694	0.9699	1	1	2	3	4
76	0.9703	0.9707	0.9711	0.9715	0.9720	0.9724	0.9728	0.9732	0.9736	0.9740	1	1	2	3	3
77	0.9744	0.9748	0.9751	0.9755	0.9759	0.9763	0.9767	0.9770	0.9774	0.9778	1	1	2	3	3
78	0.9781	0.9785	0.9789	0.9792	0.9796	0.9799	0.9803	0.9806	0.9810	0.9813	1	1	2	2	3
79	0.9816	0.9820	0.9823	0.9826	0.9829	0.9833	0.9836	0.9839	0.9842	0.9845	1	1	2	2	3
80	0.9848	0.9851	0.9854	0.9857	0.9860	0.9863	0.9866	0.9869	0.9871	0.9874	0	1	1	2	2
81	0.9877	0.9880	0.9882	0.9885	0.9888	0.9890	0.9893	0.9895	0.9898	0.9900	0	1	1	2	2
82	0.9903	0.9905	0.9907	0.9910	0.9912	0.9914	0.9917	0.9919	0.9921	0.9923	0	1	1	2	2
83	0.9925	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936	0.9938	0.9940	0.9942	0.9943	0	1	1	1	2
84	0.9945	0.9947	0.9949	0.9951	0.9952	0.9954	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0	1	1	1	2
85	0.9962	0.9963	0.9965	0.9966	0.9968	0.9969	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974	0	0	1	1	1
86	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9981	0.9982	0.9983	0.9984	0.9985	0	0	1	1	1
87	0.9986	0.9987	0.9988	0.9989	0.9990	0.9990	0.9991	0.9992	0.9993	0.9993	0	0	0	1	1
88	0.9994	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	0	0	0	0	0
89	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0	0	0	0	0

NATURAL COSINES

(பொது வித்தியாசம் பகுதியில் உள்ள எண்களைக் கழிக்க வேண்டும் கூட்டக் கூடாது)

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0	0	0	0	0
1	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0	0	0	0	0
2	0.9994	0.9993	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9990	0.9989	0.9988	0.9987	0	0	0	1	1
3	0.9986	0.9985	0.9984	0.9983	0.9982	0.9981	0.9980	0.9979	0.9978	0.9977	0	0	1	1	1
4	0.9976	0.9974	0.9973	0.9972	0.9971	0.9969	0.9968	0.9966	0.9965	0.9963	0	0	1	1	1
5	0.9962	0.9960	0.9959	0.9957	0.9956	0.9954	0.9952	0.9951	0.9949	0.9947	0	1	1	1	2
6	0.9945	0.9943	0.9942	0.9940	0.9938	0.9936	0.9934	0.9932	0.9930	0.9928	0	1	1	1	2
7	0.9925	0.9923	0.9921	0.9919	0.9917	0.9914	0.9912	0.9910	0.9907	0.9905	0	1	1	2	2
8	0.9903	0.9900	0.9898	0.9895	0.9893	0.9890	0.9888	0.9885	0.9882	0.9880	0	1	1	2	2
9	0.9877	0.9874	0.9871	0.9869	0.9866	0.9863	0.9860	0.9857	0.9854	0.9851	0	1	1	2	2
10	0.9848	0.9845	0.9842	0.9839	0.9836	0.9833	0.9829	0.9826	0.9823	0.9820	1	1	2	2	3
11	0.9816	0.9813	0.9810	0.9806	0.9803	0.9799	0.9796	0.9792	0.9789	0.9785	1	1	2	2	3
12	0.9781	0.9778	0.9774	0.9770	0.9767	0.9763	0.9759	0.9755	0.9751	0.9748	1	1	2	3	3
13	0.9744	0.9740	0.9736	0.9732	0.9728	0.9724	0.9720	0.9715	0.9711	0.9707	1	1	2	3	3
14	0.9703	0.9699	0.9694	0.9690	0.9686	0.9681	0.9677	0.9673	0.9668	0.9664	1	1	2	3	4
15	0.9659	0.9655	0.9650	0.9646	0.9641	0.9636	0.9632	0.9627	0.9622	0.9617	1	2	2	3	4
16	0.9613	0.9608	0.9603	0.9598	0.9593	0.9588	0.9583	0.9578	0.9573	0.9568	1	2	2	3	4
17	0.9563	0.9558	0.9553	0.9548	0.9542	0.9537	0.9532	0.9527	0.9521	0.9516	1	2	3	3	4
18	0.9511	0.9505	0.9500	0.9494	0.9489	0.9483	0.9478	0.9472	0.9466	0.9461	1	2	3	4	5
19	0.9455	0.9449	0.9444	0.9438	0.9432	0.9426	0.9421	0.9415	0.9409	0.9403	1	2	3	4	5
20	0.9397	0.9391	0.9385	0.9379	0.9373	0.9367	0.9361	0.9354	0.9348	0.9342	1	2	3	4	5
21	0.9336	0.9330	0.9323	0.9317	0.9311	0.9304	0.9298	0.9291	0.9285	0.9278	1	2	3	4	5
22	0.9272	0.9265	0.9259	0.9252	0.9245	0.9239	0.9232	0.9225	0.9219	0.9212	1	2	3	4	6
23	0.9205	0.9198	0.9191	0.9184	0.9178	0.9171	0.9164	0.9157	0.9150	0.9143	1	2	3	5	6
24	0.9135	0.9128	0.9121	0.9114	0.9107	0.9100	0.9092	0.9085	0.9078	0.9070	1	2	4	5	6
25	0.9063	0.9056	0.9048	0.9041	0.9033	0.9026	0.9018	0.9011	0.9003	0.8996	1	3	4	5	6
26	0.8988	0.8980	0.8973	0.8965	0.8957	0.8949	0.8942	0.8934	0.8926	0.8918	1	3	4	5	6
27	0.8910	0.8902	0.8894	0.8886	0.8878	0.8870	0.8862	0.8854	0.8846	0.8838	1	3	4	5	7
28	0.8829	0.8821	0.8813	0.8805	0.8796	0.8788	0.8780	0.8771	0.8763	0.8755	1	3	4	6	7
29	0.8746	0.8738	0.8729	0.8721	0.8712	0.8704	0.8695	0.8686	0.8678	0.8669	1	3	4	6	7
30	0.8660	0.8652	0.8643	0.8634	0.8625	0.8616	0.8607	0.8599	0.8590	0.8581	1	3	4	6	7
31	0.8572	0.8563	0.8554	0.8545	0.8536	0.8526	0.8517	0.8508	0.8499	0.8490	2	3	5	6	8
32	0.8480	0.8471	0.8462	0.8453	0.8443	0.8434	0.8425	0.8415	0.8406	0.8396	2	3	5	6	8
33	0.8387	0.8377	0.8368	0.8358	0.8348	0.8339	0.8329	0.8320	0.8310	0.8300	2	3	5	6	8
34	0.8290	0.8281	0.8271	0.8261	0.8251	0.8241	0.8231	0.8221	0.8211	0.8202	2	3	5	7	8
35	0.8192	0.8181	0.8171	0.8161	0.8151	0.8141	0.8131	0.8121	0.8111	0.8100	2	3	5	7	8
36	0.8090	0.8080	0.8070	0.8059	0.8049	0.8039	0.8028	0.8018	0.8007	0.7997	2	3	5	7	9
37	0.7986	0.7976	0.7965	0.7955	0.7944	0.7934	0.7923	0.7912	0.7902	0.7891	2	4	5	7	9
38	0.7880	0.7869	0.7859	0.7848	0.7837	0.7826	0.7815	0.7804	0.7793	0.7782	2	4	5	7	9
39	0.7771	0.7760	0.7749	0.7738	0.7727	0.7716	0.7705	0.7694	0.7683	0.7672	2	4	6	7	9
40	0.7660	0.7649	0.7638	0.7627	0.7615	0.7604	0.7593	0.7581	0.7570	0.7559	2	4	6	8	9
41	0.7547	0.7536	0.7524	0.7513	0.7501	0.7490	0.7478	0.7466	0.7455	0.7443	2	4	6	8	10
42	0.7431	0.7420	0.7408	0.7396	0.7385	0.7373	0.7361	0.7349	0.7337	0.7325	2	4	6	8	10
43	0.7314	0.7302	0.7290	0.7278	0.7266	0.7254	0.7242	0.7230	0.7218	0.7206	2	4	6	8	10
44	0.7193	0.7181	0.7169	0.7157	0.7145	0.7133	0.7120	0.7108	0.7096	0.7083	2	4	6	8	10

NATURAL COSINES

(பொது வித்தியாசம் பகுதியில் உள்ள எண்களைக் கழிக்க வேண்டும் கூட்டக் கூடாது)

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	0.7071	0.7059	0.7046	0.7034	0.7022	0.7009	0.6997	0.6984	0.6972	0.6959	2	4	6	8	10
46	0.6947	0.6934	0.6921	0.6909	0.6896	0.6884	0.6871	0.6858	0.6845	0.6833	2	4	6	8	11
47	0.6820	0.6807	0.6794	0.6782	0.6769	0.6756	0.6743	0.6730	0.6717	0.6704	2	4	6	9	11
48	0.6691	0.6678	0.6665	0.6652	0.6639	0.6626	0.6613	0.6600	0.6587	0.6574	2	4	7	9	11
49	0.6561	0.6547	0.6534	0.6521	0.6508	0.6494	0.6481	0.6468	0.6455	0.6441	2	4	7	9	11
50	0.6428	0.6414	0.6401	0.6388	0.6374	0.6361	0.6347	0.6334	0.6320	0.6307	2	4	7	9	11
51	0.6293	0.6280	0.6266	0.6252	0.6239	0.6225	0.6211	0.6198	0.6184	0.6170	2	5	7	9	11
52	0.6157	0.6143	0.6129	0.6115	0.6101	0.6088	0.6074	0.6060	0.6046	0.6032	2	5	7	9	12
53	0.6018	0.6004	0.5990	0.5976	0.5962	0.5948	0.5934	0.5920	0.5906	0.5892	2	5	7	9	12
54	0.5878	0.5864	0.5850	0.5835	0.5821	0.5807	0.5793	0.5779	0.5764	0.5750	2	5	7	9	12
55	0.5736	0.5721	0.5707	0.5693	0.5678	0.5664	0.5650	0.5635	0.5621	0.5606	2	5	7	10	12
56	0.5592	0.5577	0.5563	0.5548	0.5534	0.5519	0.5505	0.5490	0.5476	0.5461	2	5	7	10	12
57	0.5446	0.5432	0.5417	0.5402	0.5388	0.5373	0.5358	0.5344	0.5329	0.5314	2	5	7	10	12
58	0.5299	0.5284	0.5270	0.5255	0.5240	0.5225	0.5210	0.5195	0.5180	0.5165	2	5	7	10	12
59	0.5150	0.5135	0.5120	0.5105	0.5090	0.5075	0.5060	0.5045	0.5030	0.5015	3	5	8	10	13
60	0.5000	0.4985	0.4970	0.4955	0.4939	0.4924	0.4909	0.4894	0.4879	0.4863	3	5	8	10	13
61	0.4848	0.4833	0.4818	0.4802	0.4787	0.4772	0.4756	0.4741	0.4726	0.4710	3	5	8	10	13
62	0.4695	0.4679	0.4664	0.4648	0.4633	0.4617	0.4602	0.4586	0.4571	0.4555	3	5	8	10	13
63	0.4540	0.4524	0.4509	0.4493	0.4478	0.4462	0.4446	0.4431	0.4415	0.4399	3	5	8	10	13
64	0.4384	0.4368	0.4352	0.4337	0.4321	0.4305	0.4289	0.4274	0.4258	0.4242	3	5	8	11	13
65	0.4226	0.4210	0.4195	0.4179	0.4163	0.4147	0.4131	0.4115	0.4099	0.4083	3	5	8	11	13
66	0.4067	0.4051	0.4035	0.4019	0.4003	0.3987	0.3971	0.3955	0.3939	0.3923	3	5	8	11	14
67	0.3907	0.3891	0.3875	0.3859	0.3843	0.3827	0.3811	0.3795	0.3778	0.3762	3	5	8	11	14
68	0.3746	0.3730	0.3714	0.3697	0.3681	0.3665	0.3649	0.3633	0.3616	0.3600	3	5	8	11	14
69	0.3584	0.3567	0.3551	0.3535	0.3518	0.3502	0.3486	0.3469	0.3453	0.3437	3	5	8	11	14
70	0.3420	0.3404	0.3387	0.3371	0.3355	0.3338	0.3322	0.3305	0.3289	0.3272	3	5	8	11	14
71	0.3256	0.3239	0.3223	0.3206	0.3190	0.3173	0.3156	0.3140	0.3123	0.3107	3	6	8	11	14
72	0.3090	0.3074	0.3057	0.3040	0.3024	0.3007	0.2990	0.2974	0.2957	0.2940	3	6	8	11	14
73	0.2924	0.2907	0.2890	0.2874	0.2857	0.2840	0.2823	0.2807	0.2790	0.2773	3	6	8	11	14
74	0.2756	0.2740	0.2723	0.2706	0.2689	0.2672	0.2656	0.2639	0.2622	0.2605	3	6	8	11	14
75	0.2588	0.2571	0.2554	0.2538	0.2521	0.2504	0.2487	0.2470	0.2453	0.2436	3	6	8	11	14
76	0.2419	0.2402	0.2385	0.2368	0.2351	0.2334	0.2317	0.2300	0.2284	0.2267	3	6	8	11	14
77	0.2250	0.2233	0.2215	0.2198	0.2181	0.2164	0.2147	0.2130	0.2113	0.2096	3	6	9	11	14
78	0.2079	0.2062	0.2045	0.2028	0.2011	0.1994	0.1977	0.1959	0.1942	0.1925	3	6	9	11	14
79	0.1908	0.1891	0.1874	0.1857	0.1840	0.1822	0.1805	0.1788	0.1771	0.1754	3	6	9	11	14
80	0.1736	0.1719	0.1702	0.1685	0.1668	0.1650	0.1633	0.1616	0.1599	0.1582	3	6	9	12	14
81	0.1564	0.1547	0.1530	0.1513	0.1495	0.1478	0.1461	0.1444	0.1426	0.1409	3	6	9	12	14
82	0.1392	0.1374	0.1357	0.1340	0.1323	0.1305	0.1288	0.1271	0.1253	0.1236	3	6	9	12	14
83	0.1219	0.1201	0.1184	0.1167	0.1149	0.1132	0.1115	0.1097	0.1080	0.1063	3	6	9	12	14
84	0.1045	0.1028	0.1011	0.0993	0.0976	0.0958	0.0941	0.0924	0.0906	0.0889	3	6	9	12	14
85	0.0872	0.0854	0.0837	0.0819	0.0802	0.0785	0.0767	0.0750	0.0732	0.0715	3	6	9	12	15
86	0.0698	0.0680	0.0663	0.0645	0.0628	0.0610	0.0593	0.0576	0.0558	0.0541	3	6	9	12	15
87	0.0523	0.0506	0.0488	0.0471	0.0454	0.0436	0.0419	0.0401	0.0384	0.0366	3	6	9	12	15
88	0.0349	0.0332	0.0314	0.0297	0.0279	0.0262	0.0244	0.0227	0.0209	0.0192	3	6	9	12	15
89	0.0175	0.0157	0.0140	0.0122	0.0105	0.0087	0.0070	0.0052	0.0035	0.0017	3	6	9	12	15

NATURAL TANGENTS

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0017	0.0035	0.0052	0.0070	0.0087	0.0105	0.0122	0.0140	0.0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0.0192	0.0209	0.0227	0.0244	0.0262	0.0279	0.0297	0.0314	0.0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0.0367	0.0384	0.0402	0.0419	0.0437	0.0454	0.0472	0.0489	0.0507	3	6	9	12	15
3	0.0524	0.0542	0.0559	0.0577	0.0594	0.0612	0.0629	0.0647	0.0664	0.0682	3	6	9	12	15
4	0.0699	0.0717	0.0734	0.0752	0.0769	0.0787	0.0805	0.0822	0.0840	0.0857	3	6	9	12	15
5	0.0875	0.0892	0.0910	0.0928	0.0945	0.0963	0.0981	0.0998	0.1016	0.1033	3	6	9	12	15
6	0.1051	0.1069	0.1086	0.1104	0.1122	0.1139	0.1157	0.1175	0.1192	0.1210	3	6	9	12	15
7	0.1228	0.1246	0.1263	0.1281	0.1299	0.1317	0.1334	0.1352	0.1370	0.1388	3	6	9	12	15
8	0.1405	0.1423	0.1441	0.1459	0.1477	0.1495	0.1512	0.1530	0.1548	0.1566	3	6	9	12	15
9	0.1584	0.1602	0.1620	0.1638	0.1655	0.1673	0.1691	0.1709	0.1727	0.1745	3	6	9	12	15
10	0.1763	0.1781	0.1799	0.1817	0.1835	0.1853	0.1871	0.1890	0.1908	0.1926	3	6	9	12	15
11	0.1944	0.1962	0.1980	0.1998	0.2016	0.2035	0.2053	0.2071	0.2089	0.2107	3	6	9	12	15
12	0.2126	0.2144	0.2162	0.2180	0.2199	0.2217	0.2235	0.2254	0.2272	0.2290	3	6	9	12	15
13	0.2309	0.2327	0.2345	0.2364	0.2382	0.2401	0.2419	0.2438	0.2456	0.2475	3	6	9	12	15
14	0.2493	0.2512	0.2530	0.2549	0.2568	0.2586	0.2605	0.2623	0.2642	0.2661	3	6	9	12	16
15	0.2679	0.2698	0.2717	0.2736	0.2754	0.2773	0.2792	0.2811	0.2830	0.2849	3	6	9	13	16
16	0.2867	0.2886	0.2905	0.2924	0.2943	0.2962	0.2981	0.3000	0.3019	0.3038	3	6	9	13	16
17	0.3057	0.3076	0.3096	0.3115	0.3134	0.3153	0.3172	0.3191	0.3211	0.3230	3	6	10	13	16
18	0.3249	0.3269	0.3288	0.3307	0.3327	0.3346	0.3365	0.3385	0.3404	0.3424	3	6	10	13	16
19	0.3443	0.3463	0.3482	0.3502	0.3522	0.3541	0.3561	0.3581	0.3600	0.3620	3	7	10	13	16
20	0.3640	0.3659	0.3679	0.3699	0.3719	0.3739	0.3759	0.3779	0.3799	0.3819	3	7	10	13	17
21	0.3839	0.3859	0.3879	0.3899	0.3919	0.3939	0.3959	0.3979	0.4000	0.4020	3	7	10	13	17
22	0.4040	0.4061	0.4081	0.4101	0.4122	0.4142	0.4163	0.4183	0.4204	0.4224	3	7	10	14	17
23	0.4245	0.4265	0.4286	0.4307	0.4327	0.4348	0.4369	0.4390	0.4411	0.4431	3	7	10	14	17
24	0.4452	0.4473	0.4494	0.4515	0.4536	0.4557	0.4578	0.4599	0.4621	0.4642	4	7	11	14	18
25	0.4663	0.4684	0.4706	0.4727	0.4748	0.4770	0.4791	0.4813	0.4834	0.4856	4	7	11	14	18
26	0.4877	0.4899	0.4921	0.4942	0.4964	0.4986	0.5008	0.5029	0.5051	0.5073	4	7	11	15	18
27	0.5095	0.5117	0.5139	0.5161	0.5184	0.5206	0.5228	0.5250	0.5272	0.5295	4	7	11	15	18
28	0.5317	0.5340	0.5362	0.5384	0.5407	0.5430	0.5452	0.5475	0.5498	0.5520	4	8	11	15	19
29	0.5543	0.5566	0.5589	0.5612	0.5635	0.5658	0.5681	0.5704	0.5727	0.5750	4	8	12	15	19
30	0.5774	0.5797	0.5820	0.5844	0.5867	0.5890	0.5914	0.5938	0.5961	0.5985	4	8	12	16	20
31	0.6009	0.6032	0.6056	0.6080	0.6104	0.6128	0.6152	0.6176	0.6200	0.6224	4	8	12	16	20
32	0.6249	0.6273	0.6297	0.6322	0.6346	0.6371	0.6395	0.6420	0.6445	0.6469	4	8	12	16	20
33	0.6494	0.6519	0.6544	0.6569	0.6594	0.6619	0.6644	0.6669	0.6694	0.6720	4	8	13	17	21
34	0.6745	0.6771	0.6796	0.6822	0.6847	0.6873	0.6899	0.6924	0.6950	0.6976	4	9	13	17	21
35	0.7002	0.7028	0.7054	0.7080	0.7107	0.7133	0.7159	0.7186	0.7212	0.7239	4	9	13	18	22
36	0.7265	0.7292	0.7319	0.7346	0.7373	0.7400	0.7427	0.7454	0.7481	0.7508	5	9	14	18	23
37	0.7536	0.7563	0.7590	0.7618	0.7646	0.7673	0.7701	0.7729	0.7757	0.7785	5	9	14	18	23
38	0.7813	0.7841	0.7869	0.7898	0.7926	0.7954	0.7983	0.8012	0.8040	0.8069	5	9	14	19	24
39	0.8098	0.8127	0.8156	0.8185	0.8214	0.8243	0.8273	0.8302	0.8332	0.8361	5	10	15	20	24
40	0.8391	0.8421	0.8451	0.8481	0.8511	0.8541	0.8571	0.8601	0.8632	0.8662	5	10	15	20	25
41	0.8693	0.8724	0.8754	0.8785	0.8816	0.8847	0.8878	0.8910	0.8941	0.8972	5	10	16	21	26
42	0.9004	0.9036	0.9067	0.9099	0.9131	0.9163	0.9195	0.9228	0.9260	0.9293	5	11	16	21	27
43	0.9325	0.9358	0.9391	0.9424	0.9457	0.9490	0.9523	0.9556	0.9590	0.9623	6	11	17	22	28
44	0.9657	0.9691	0.9725	0.9759	0.9793	0.9827	0.9861	0.9896	0.9930	0.9965	6	11	17	23	29

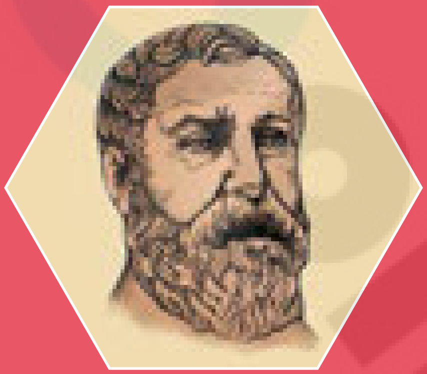
NATURAL TANGENTS

கோணம்	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	பொது வித்தியாசம்				
	0.0°	0.1°	0.2°	0.3°	0.4°	0.5°	0.6°	0.7°	0.8°	0.9°	1	2	3	4	5
45	1.0000	1.0035	1.0070	1.0105	1.0141	1.0176	1.0212	1.0247	1.0283	1.0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	1.0392	1.0428	1.0464	1.0501	1.0538	1.0575	1.0612	1.0649	1.0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	1.0761	1.0799	1.0837	1.0875	1.0913	1.0951	1.0990	1.1028	1.1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1.1145	1.1184	1.1224	1.1263	1.1303	1.1343	1.1383	1.1423	1.1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1.1544	1.1585	1.1626	1.1667	1.1708	1.1750	1.1792	1.1833	1.1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1.1960	1.2002	1.2045	1.2088	1.2131	1.2174	1.2218	1.2261	1.2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	1.2393	1.2437	1.2482	1.2527	1.2572	1.2617	1.2662	1.2708	1.2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	1.2846	1.2892	1.2938	1.2985	1.3032	1.3079	1.3127	1.3175	1.3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	1.3319	1.3367	1.3416	1.3465	1.3514	1.3564	1.3613	1.3663	1.3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	1.3814	1.3865	1.3916	1.3968	1.4019	1.4071	1.4124	1.4176	1.4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	1.4335	1.4388	1.4442	1.4496	1.4550	1.4605	1.4659	1.4715	1.4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	1.4882	1.4938	1.4994	1.5051	1.5108	1.5166	1.5224	1.5282	1.5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	1.5458	1.5517	1.5577	1.5637	1.5697	1.5757	1.5818	1.5880	1.5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	1.6066	1.6128	1.6191	1.6255	1.6319	1.6383	1.6447	1.6512	1.6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	1.6709	1.6775	1.6842	1.6909	1.6977	1.7045	1.7113	1.7182	1.7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	1.7391	1.7461	1.7532	1.7603	1.7675	1.7747	1.7820	1.7893	1.7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	1.8115	1.8190	1.8265	1.8341	1.8418	1.8495	1.8572	1.8650	1.8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	1.8887	1.8967	1.9047	1.9128	1.9210	1.9292	1.9375	1.9458	1.9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	1.9711	1.9797	1.9883	1.9970	2.0057	2.0145	2.0233	2.0323	2.0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	2.0594	2.0686	2.0778	2.0872	2.0965	2.1060	2.1155	2.1251	2.1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	2.1543	2.1642	2.1742	2.1842	2.1943	2.2045	2.2148	2.2251	2.2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2.2566	2.2673	2.2781	2.2889	2.2998	2.3109	2.3220	2.3332	2.3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	2.3673	2.3789	2.3906	2.4023	2.4142	2.4262	2.4383	2.4504	2.4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	2.4876	2.5002	2.5129	2.5257	2.5386	2.5517	2.5649	2.5782	2.5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	2.6187	2.6325	2.6464	2.6605	2.6746	2.6889	2.7034	2.7179	2.7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	2.7625	2.7776	2.7929	2.8083	2.8239	2.8397	2.8556	2.8716	2.8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	2.9208	2.9375	2.9544	2.9714	2.9887	3.0061	3.0237	3.0415	3.0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	3.0961	3.1146	3.1334	3.1524	3.1716	3.1910	3.2106	3.2305	3.2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	3.2914	3.3122	3.3332	3.3544	3.3759	3.3977	3.4197	3.4420	3.4646	36	72	108	144	180
74	3.4874	3.5105	3.5339	3.5576	3.5816	3.6059	3.6305	3.6554	3.6806	3.7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	3.7583	3.7848	3.8118	3.8391	3.8667	3.8947	3.9232	3.9520	3.9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	4.0408	4.0713	4.1022	4.1335	4.1653	4.1976	4.2303	4.2635	4.2972	53	107	160	213	267
77	4.3315	4.3662	4.4015	4.4373	4.4737	4.5107	4.5483	4.5864	4.6252	4.6646					
78	4.7046	4.7453	4.7867	4.8288	4.8716	4.9152	4.9594	5.0045	5.0504	5.0970					
79	5.1446	5.1929	5.2422	5.2924	5.3435	5.3955	5.4486	5.5026	5.5578	5.6140					
80	5.6713	5.7297	5.7894	5.8502	5.9124	5.9758	6.0405	6.1066	6.1742	6.2432					
81	6.3138	6.3859	6.4596	6.5350	6.6122	6.6912	6.7720	6.8548	6.9395	7.0264					
82	7.1154	7.2066	7.3002	7.3962	7.4947	7.5958	7.6996	7.8062	7.9158	8.0285					
83	8.1443	8.2636	8.3863	8.5126	8.6427	8.7769	8.9152	9.0579	9.2052	9.3572					
84	9.5144	9.6768	9.8448	10.0187	10.1988	10.3854	10.5789	10.7797	10.9882	11.2048					
85	11.4301	11.6645	11.9087	12.1632	12.4288	12.7062	12.9962	13.2996	13.6174	13.9507					
86	14.3007	14.6685	15.0557	15.4638	15.8945	16.3499	16.8319	17.3432	17.8863	18.4645					
87	19.0811	19.7403	20.4465	21.2049	22.0217	22.9038	23.8593	24.8978	26.0307	27.2715					
88	28.6363	30.1446	31.8205	33.6935	35.8006	38.1885	40.9174	44.0661	47.7395	52.0807					
89	57.2900	63.6567	71.6151	81.8470	95.4895	114.5887	143.2371	190.9842	286.4777	572.9572					

7

அளவியல்

மிக அழகிய தள உருவம் வட்டமாகும்; அதுபோல, மிக அழகிய திண்ம உருவம் கோளமாகும். - பிதாகரஸ்



ஹெரான்
(கி.பி(பொ.ஆ.) 10-75)

அலெக்ஸாண்டிரியாவைச் சேர்ந்த ஹெரான் (Heron) ஒரு கிரேக்கக் கணித மேதை ஆவார். இவர் கணிதம், இயந்திரவியல் மற்றும் இயற்பியல் தொடர்பான புத்தகங்களை எழுதியுள்ளார். இவரது மெட்ரிகா (Metrica) என்ற பிரபலமான புத்தகம் மூன்று தொகுதிகளைக் கொண்டுள்ளது. இந்தப் புத்தகமானது தள மற்றும் கன உருவங்களின் பரப்பு மற்றும் கன அளவுகளைக் கணக்கிடும் வழிமுறைகளை விளக்குகிறது. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்க அளவுகள் தரப்பட்டால் அதன் பரப்பினைக் கண்டறியும் சூத்திரத்தை ஹெரான் வருவித்துள்ளார்.

கற்றல் விளைவுகள்

- முக்கோணங்கள் மற்றும் நாற்கரங்களின் பரப்பை ஹெரான் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுதல்.
- கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு, பக்கப் பரப்பு மற்றும் கன அளவு ஆகியவற்றைக் காணல்.

F8AAJX

7.1 அறிமுகம்

பல்வேறு வகையான வடிவியல் உருவங்களின் பரப்பளவு மற்றும் கன அளவுகளைப் பற்றிப் பயிலக்கூடிய கணிதப் பிரிவு அளவியல் எனப்படுகிறது. விரிவாகக் கூறவேண்டுமெனில் இது அளவீட்டுச் செயல்முறைகள் பற்றியது ஆகும்.

அளவியலானது கட்டடக் கலை, மருத்துவம் மற்றும் கட்டுமானம் ஆகிய துறைகளில் பயன்படுகிறது. அளவியலைக் கற்பதன் மூலம் இரு பரிமாண உருவங்களின் சுற்றளவு மற்றும் பரப்பளவைக் காண்பதற்கான சூத்திரங்கள் பற்றி அறிய முடியும். மேலும் முப்பரிமாண உருவங்களின் புறப்பரப்பு மற்றும் கன அளவுகளைப் பற்றியும் அறிய முடியும். இந்தப் பகுதியில் நாம் முக்கோணங்களின் பரப்புக்கான ஹெரான் சூத்திரம், கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரங்களுக்கான புறப்பரப்பு மற்றும் கன அளவுகளைப் பற்றிக் கற்க இருக்கிறோம்.

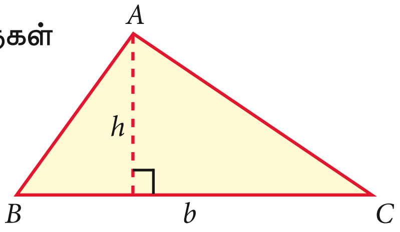
நாற்கரம், முக்கோணம் போன்ற மூடிய தள உருவத்தினுடைய எல்லையின் நீளத்தை எவ்வாறு அழைக்கிறோம்? எல்லைக்குள் அடைபட்ட பகுதியின் அளவை எவ்வாறு அழைக்கிறோம்?

பொதுவாக, முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடப்படுகிறது.

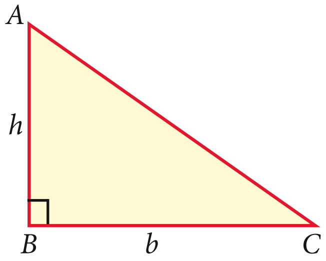
முக்கோணத்தின் பரப்பளவு = $\frac{1}{2}$ × அடிப்பக்கம் × உயரம் சதுர அலகுகள்

அதாவது, $A = \frac{1}{2} \times b \times h$ சதுர அலகுகள்

இங்கு, b மற்றும் h என்பன முறையே முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் மற்றும் உயரம் ஆகும்.



படம் 7.1



படம் 7.2

ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் மற்றும் உயரம் (அதாவது குத்துயரம்) கொடுக்கப்பட்டால், அதன் பரப்பளவை எவ்வாறு காண்பது என்பதை மேற்கண்ட சூத்திரத்திலிருந்து அறிய முடிகிறது.

7.2 ஹெரான் சூத்திரம் (Heron's Formula)

உயரம் தெரியாத ஆனால் மூன்று பக்க அளவுகளும் தெரிந்த ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவை எவ்வாறு காண்பது?

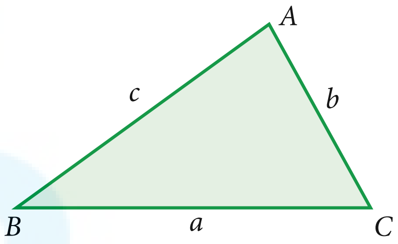
F8J6LK

இவ்வாறான, ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவை எவ்வாறு காண்பது என்பதற்கான சூத்திரத்தை ஹெரான் கொடுத்துள்ளார்.

a, b மற்றும் c என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்கள் எனில்,

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ச.அ.

இங்கே, $s = \frac{a+b+c}{2}$, 's' என்பது முக்கோணத்தின் அரைச் சுற்றளவு (semi-perimeter) அதாவது சுற்றளவில் பாதி ஆகும்.



படம் 7.3

குறிப்பு

இங்கு மூன்று பக்கங்களும் சமம் என நாம் எடுத்துக்கொண்டால், அதாவது $a=b=c$ எனில் ஹெரான் சூத்திரப்படி முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ சதுர அலகுகள் எனக் கிடைக்கிறது. இது ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.1

ஒரு முக்கோண வடிவ வயலின் பக்க நீளங்கள் 28 மீ, 15 மீ மற்றும் 41 மீ எனில் வயலின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக. மேலும் வயலைச் சமப்படுத்த ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 20 செலவாகும் எனில், வயலைச் சமப்படுத்த ஆகும் மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

$a = 28$ மீ, $b = 15$ மீ மற்றும் $c = 41$ மீ என்க.

இப்போது, $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{28+15+41}{2} = \frac{84}{2} = 42$ மீ

முக்கோண வயலின் பரப்பளவு $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{42(42-28)(42-15)(42-41)}$$

$$= \sqrt{42 \times 14 \times 27 \times 1}$$

$$= \sqrt{2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 1}$$

$$= 2 \times 3 \times 7 \times 3$$

$$= 126 \text{ ச.மீ}$$

1 ச.மீ வயலைச் சமப்படுத்த ஆகும் செலவு = ₹ 20

126 ச.மீ வயலைச் சமப்படுத்த ஆகும் செலவு $= 20 \times 126$ = ₹ 2520.

எடுத்துக்காட்டு 7.2

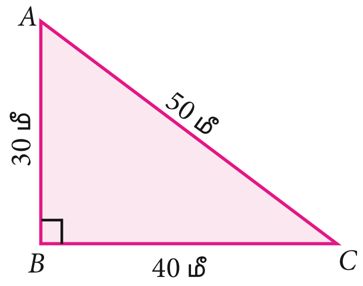
ஓர் இடத்தில் மூன்று வேறுபட்ட முக்கோண வடிவிலான வீட்டு மனைகள் விற்பனைக்கு உள்ளன. ஒவ்வொன்றும் 120 மீ சுற்றளவு கொண்டவை. அவை ஒவ்வொன்றின் பக்க நீளங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வீட்டு மனையின் வடிவம்	சுற்றளவு	பக்க நீளங்கள்
செங்கோண முக்கோணம்	120 மீ	30 மீ, 40 மீ, 50 மீ
குறுங்கோண முக்கோணம்	120 மீ	35 மீ, 40 மீ, 45 மீ
சமபக்க முக்கோணம்	120 மீ	40 மீ, 40 மீ, 40 மீ

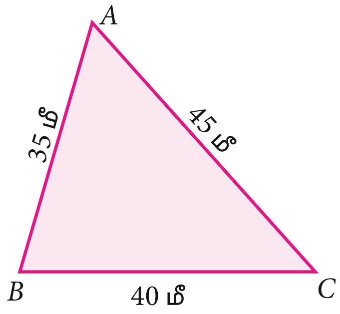
இதில் அதிக இடப்பரப்பு கொண்ட வீட்டு மனை எது என முடிவு செய்ய வாங்குபவருக்கு உதவி செய்க.

தீர்வு

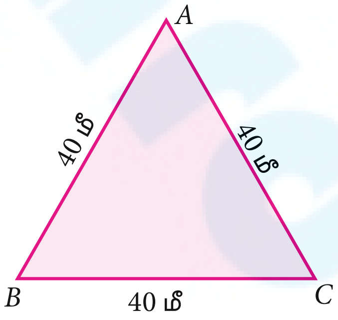
கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளவுகளைக் குறிக்கும் உதவிப்படம் வரையலாம்.



படம் 7.4



படம் 7.5



படம் 7.6

(i) படம் 7.4 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் அரைச் சுற்றளவு $s = \frac{30+40+50}{2} = 60$ மீ

படம் 7.5 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் அரைச் சுற்றளவு $s = \frac{35+40+45}{2} = 60$ மீ

படம் 7.6 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் அரைச் சுற்றளவு $s = \frac{40+40+40}{2} = 60$ மீ

இங்கு அனைத்து அரைச் சுற்றளவும் சமமாக உள்ளன என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

(ii) ஹெரான் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பு

படம் 7.4 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \sqrt{60(60-30)(60-40)(60-50)}$

$= \sqrt{60\times30\times20\times10}$

$= \sqrt{30\times2\times30\times2\times10\times10}$

$= 600$ மீ^{2}

படம் 7.5 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \sqrt{60(60-35)(60-40)(60-45)}$

$= \sqrt{60\times25\times20\times15}$

$= \sqrt{20\times3\times5\times5\times20\times3\times5}$

$= 300\sqrt{5}$ (ஏனெனில் $\sqrt{5} = 2.236$)

$= 670.8$ மீ^{2}

படம் 7.6 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \sqrt{60(60-40)(60-40)(60-40)}$

$= \sqrt{60\times20\times20\times20}$

$= \sqrt{3\times20\times20\times20\times20}$

$= 400\sqrt{3}$ (ஏனெனில் $\sqrt{3} = 1.732$)

$= 692.8$ மீ^{2}

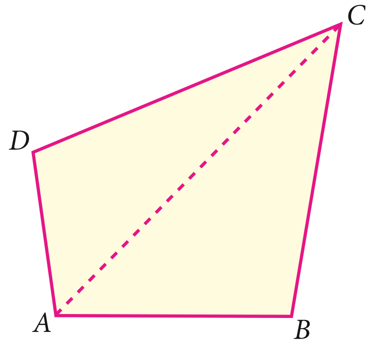
இங்கு சுற்றளவு சமமாக இருந்தபோதிலும், மூன்று முக்கோண வடிவிலான வீட்டு மனையின் பரப்பளவுகள் வெவ்வேறாக இருப்பதைக் காண முடிகிறது. இவற்றில் படம் 7.6 இல் உள்ள முக்கோணத்தின் பரப்பானது மற்றவற்றைவிட அதிகமாக உள்ளது. இவ்வடிவிலான வீட்டு மனை வாங்குவது அதிக இடப்பரப்பைத் தரும் என்பதால், வாங்குபவருக்கு இதனைப் பரிந்துரைக்கலாம்.

குறிப்பு

சமமான சுற்றளவுடைய எல்லா வகையான முக்கோணங்களிலும், சமபக்க முக்கோணமே அதிகமான பரப்பைக் கொண்டிருக்கும். இது தொடர்பான மீப்பெரு பரப்பளவுகளைப் பற்றி நாம் உயர் வகுப்புகளில் கற்க உள்ளோம்.

7.3 நாற்கரங்களின் பரப்புகளைக் காண்பதில் ஹெரான் சூத்திரத்தின் பயன்பாடு (Application of Heron's Formula in Finding Areas of Quadrilaterals)

நான்கு கோட்டுத் துண்டுகளால் அடைபடும் ஒரு தள உருவம் நாற்கரம் என அழைக்கப்படுகிறது.



படம் 7.7

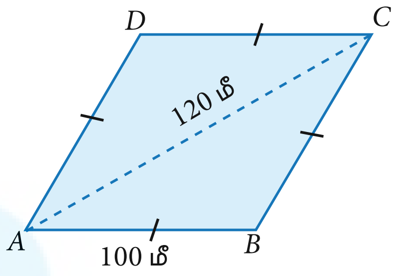
$ABCD$ என்பது ஒரு நாற்கரம் என்க. ஒரு நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண, அந்த நாற்கரத்தை இரண்டு முக்கோணப் பகுதிகளாகப் பிரித்து, ஹெரான் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி அந்த முக்கோணப் பகுதிகளின் பரப்பைக் காண வேண்டும்.

படம் 7.7 இலிருந்து,

நாற்கரம் $ABCD$ இன் பரப்பு = முக்கோணம் ABC இன் பரப்பு + முக்கோணம் ACD இன் பரப்பு.

எடுத்துக்காட்டு 7.3 விவசாயி ஒருவர் சாய்சதுர வடிவிலான நிலத்தை வைத்துள்ளார். அந்த நிலத்தின் சுற்றளவு 400மீ மற்றும் அதன் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் அளவு 120மீ ஆகும். இரண்டு வெவ்வேறு வகையான காய்கறிகளைப் பயிரிட அவர் நிலத்தை இரு சமபகுதிகளாகப் பிரிக்கிறார் எனில் அந்த முழு நிலத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு



படம் 7.8

$ABCD$ என்பது ஒரு சாய்சதுரம் என்க.

அதன் சுற்றளவு $= 4 \times$ பக்கம் $= 400$ மீ

ஆகவே சாய்சதுரத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் 100 மீ ஆகும்.

இங்கு, மூலைவிட்டம் AC = 120 மீ

ΔABC இல் $a = 100$ மீ, $b = 100$ மீ, $c = 120$ மீ எனில்,

அரைச் சுற்றளவு $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{100+100+120}{2} = 160$ மீ

$$\Delta ABC \text{ இன் பரப்பு } = \sqrt{160(160-100)(160-100)(160-120)}$$
$$= \sqrt{160 \times 60 \times 60 \times 40}$$
$$= \sqrt{40 \times 2 \times 2 \times 60 \times 60 \times 40}$$
$$= 40 \times 2 \times 60 = 4800 \text{ மீ}^2$$

ஆகவே, சாய்சதுர நிலம் $ABCD$ இன் பரப்பு $= 2 \times \Delta ABC$ இன் பரப்பு $= 2 \times 4800 = 9600$ மீ^{2}

பயிற்சி 7.1

1. ஹெரான் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் பக்க அளவுகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க
   (i) 10 செமீ, 24 செமீ, 26 செமீ (ii) 1.8 மீ, 8 மீ, 8.2 மீ

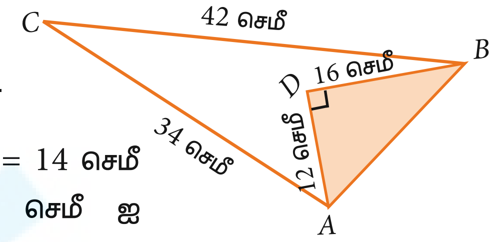
2. ஒரு முக்கோண வடிவ நிலத்தின் பக்கங்கள் முறையே 22 மீ, 120 மீ மற்றும் 122 மீ எனில் வயலின் பரப்பளவைக் கணக்கிடுக. மேலும் வயலைச் சமப்படுத்த ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 20 செலவாகும் எனில், வயலைச் சமப்படுத்த ஆகும் மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடுக.

3. ஒரு முக்கோண வடிவிலான மனையின் சுற்றளவு 600 மீ. அதன் பக்கங்கள் 5:12:13 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன எனில் அந்த மனையின் பரப்பளவைக் காண்க.

4. 180 செமீ சுற்றளவு கொண்ட ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

5. இரு சமபக்க முக்கோண வடிவிலுள்ள ஒரு விளம்பரப் பலகையின் சுற்றளவு 36 மீ மற்றும் அதன் ஒவ்வொரு சமபக்கத்தின் நீளம் 13 மீ ஆகும். அதற்கு வண்ணம் பூச ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 17.50 வீதம் ஆகும் செலவைக் காண்க.

6. படத்தில் நிழலிடப்படாத பகுதியின் பரப்பைக் காண்க.



7. $AB = 13$ செமீ, $BC = 12$ செமீ, $CD = 9$ செமீ, $AD = 14$ செமீ ஆகியவற்றைப் பக்கங்களாகவும் $BD = 15$ செமீ ஐ மூலைவிட்டமாகவும் கொண்ட நாற்கரம் $ABCD$ இன் பரப்பைக் காண்க.

8. ஒரு பூங்காவானது நாற்கர வடிவிலுள்ளது. அந்தப் பூங்காவின் பக்க அளவுகள் முறையே 15 மீ, 20 மீ, 26 மீ மற்றும் 17 மீ மற்றும் முதல் இரண்டு பக்கங்களுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் செங்கோணம் எனில் பூங்காவின் பரப்பைக் காண்க.

9. ஒரு நிலமானது சாய்சதுர வடிவில் உள்ளது. நிலத்தின் சுற்றளவு 160 மீ மற்றும் அதன் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் அளவு 48 மீ எனில் அந்த நிலத்தின் பரப்பைக் காண்க.

10. ஓர் இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்த பக்கங்களின் அளவுகள் 34 மீ, 20 மீ மற்றும் அதன் ஒரு மூலைவிட்டத்தின் அளவு 42 மீ எனில் அந்த இணைகரத்தின் பரப்பைக் காண்க.

7.4 கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரத்தின் புறப்பரப்பு (Surface Area of Cuboid and Cube)

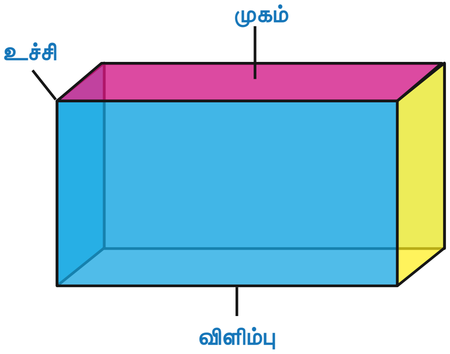
F8T2N8

முப்பரிமாண (3D) வடிவங்களைப் பற்றி ஆரம்ப வகுப்புகளில் கற்றிருக்கிறோம். முழுவதுமாக ஒரு தளத்தில் அமையாத வடிவங்கள் முப்பரிமாண வடிவங்கள் ஆகும். எந்தவொரு முப்பரிமாண வடிவமும் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் என்ற மூன்று பரிமாணங்களைக் கொண்டிருக்கும்.

7.4.1 கனச்செவ்வகம் மற்றும் அதன் புறப்பரப்பு (Cuboid and its Surface Area)

கனச்செவ்வகம் : ஒரு கனச்செவ்வகம் என்பது ஆறு செவ்வக வடிவிலான தளப்பகுதிகளால் அடைபடும் ஒரு மூடிய திண்ம உருவமாகும். தீப்பெட்டி, செங்கல், புத்தகம் என்பன கனச்செவ்வகத்திற்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

ஒரு கனச்செவ்வகமானது 6 முகங்கள், 12 விளிம்புகள் மற்றும் 8 உச்சிகளைக் கொண்டிருக்கும். பொதுவாக, கனச்செவ்வகமானது செவ்வக வடிவப் பெட்டியின் அமைப்பைக் கொண்டிருக்கும்.



படம் 7.9

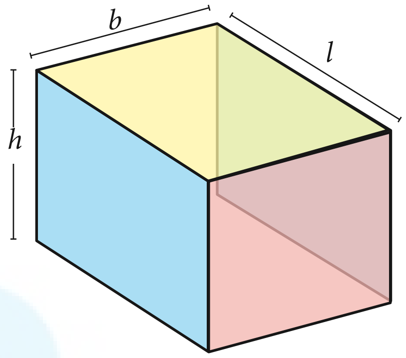
ஒரு கனச் செவ்வகத்தின் மொத்தப்பரப்பு அல்லது மொத்தப்புறப்பரப்பு (Total Surface Area–TSA) என்பது அந்தக் கனச்செவ்வகத்தை மூடியுள்ள அனைத்து முகங்களின் பரப்புகளின் கூடுதல் ஆகும். இதிலிருந்து கனச்செவ்வகத்தின் மேல் மற்றும் அடிப்பக்கங்களின் பரப்புகளை நீக்கும்பொழுது கிடைக்கும் பரப்பானது பக்கப்பரப்பு (Lateral Surface Area – LSA) எனப்படுகிறது.

படம் 7.10 இல் l, b மற்றும் h ஆகியன முறையே நீளம், அகலம் மற்றும் உயரத்தைக் குறிக்கின்றன.

(i) கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப்பரப்பு (TSA)

மேல் மற்றும் அடிப் பக்கங்களின் பரப்பு	$2 \times lb$
முன் மற்றும் பின்பக்கங்களின் பரப்பு	$2 \times bh$
இடது மற்றும் வலது பக்கங்களின் பரப்பு	$2 \times lh$

$= 2\ (lb + bh + lh)$ சதுர அலகுகள்.



படம் 7.10

(ii) கனச்செவ்வகத்தின் பக்கப்பரப்பு (LSA)

முன் மற்றும் பின்பக்கங்களின் பரப்பு	$2 \times bh$
இடது மற்றும் வலது பக்கங்களின் பரப்பு	$2 \times lh$

$= 2\ (l+b)h$ சதுர அலகுகள்.

அன்றாட வாழ்வியல் நிகழ்வுகளில் நாம் மொத்தப்பரப்பு (TSA) மற்றும் பக்கப்பரப்பு (LSA) ஆகிய கருத்துகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். வெவ்வேறு நீளம், அகலம் மற்றும் உயரத்தை உடைய கனச்செவ்வக வடிவிலான ஓர் அறையை எடுத்துக்கொள்வோம். அந்த அறையின் தரைத்தளம் மற்றும் மேற்கூரையைத் தவிர்த்துச் சுவர்களின் பரப்பு மட்டும் நமக்குத் தேவையெனில், பக்கப்பரப்பைக் (LSA) காண வேண்டும். நமக்கு அறையின் முழுப்புறப்பரப்பையும் காண வேண்டுமெனில் மொத்தப்பரப்பைக் (TSA) கணக்கிட வேண்டும்.

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b மற்றும் h எனில்

(i) மொத்தப்பரப்பு $= 2\,(lb + bh + lh)$ சதுர அலகுகள்.

(ii) பக்கப்பரப்பு $= 2\,(l+b)h$ சதுர அலகுகள்.

குறிப்பு

- ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் அடிப்பக்க மற்றும் மேற்பக்கப்பரப்புகளானது உயரத்தோடு தொடர்புடையதல்ல. அடிப்பக்க மற்றும் மேற்பக்கப்பரப்புகளின் கூடுதல் $2lb$ ஆகும். அதாவது, மொத்தப்பரப்பான $2(lb+bh+lh)$ இலிருந்து $2lb$ ஐ நீக்க நமக்குப் பக்கப்பரப்பு கிடைக்கும்.
- ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் புறப்பரப்பினைக் கணக்கிடும்பொழுது கொடுக்கப்பட்ட நீளம், அகலம் மற்றும் உயரத்தின் அளவுகள் ஒரே அலகுகளில் இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.4

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம் 7.5 மீ, அகலம் 3 மீ, உயரம் 5 மீ எனில் அதன் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு கனச் செவ்வகத்தின் நீளம் $(l) = 7.5$ மீ, அகலம் $(b) = 3$ மீ மற்றும் உயரம் $(h) = 5$ மீ.

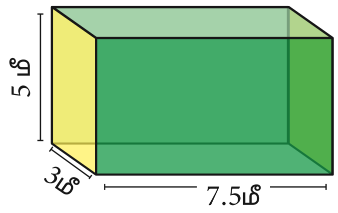
மொத்தப்பரப்பு $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2\left[(7.5\times 3) + (3\times 5) + (7.5\times 5)\right]$

$= 2(22.5 + 15 + 37.5)$

$= 2\times 75$

$= 150$ மீ^{2}



படம் 7.11

பக்கப்பரப்பு $= 2(l+b)\times h$

$= 2(7.5+3)\times 5$

$= 2\times 10.5\times 5$

$= 105$ மீ^{2}

எடுத்துக்காட்டு 7.5

ஓர் அறையின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 25 மீ, 15 மீ மற்றும் 5 மீ ஆகும். அறையின் தரை மற்றும் நான்கு சுவர்களையும் புதுப்பிக்க 1 சதுர மீட்டருக்கு ₹80 வீதம் செலவு ஆகும் எனில், மொத்தச் செலவைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு அறையின் நீளம் $(l) = 25$ மீ, அகலம் $(b) = 15$ மீ மற்றும் உயரம் $(h) = 5$ மீ என்க.

நான்கு சுவர்களின் பரப்பு = கனச்செவ்வகத்தின் பக்கப் பரப்பு

$= 2(l+b)\times h$

$= 2(25+15)\times 5$

$= 80\times 5 = 400$ ச.மீ

தரையின் பரப்பு $= l\times b$

$= 25\times 15$

$= 375$ ச.மீ

படம் 7.12

புதுப்பிக்க வேண்டிய பகுதியின் பரப்பு

= (நான்கு சுவர்களின் பரப்பு + தரையின் பரப்பு)

$= (400+375) = 775$ ச.மீ

1 சதுர மீட்டருக்கு ₹80 வீதம் அறையைப் புதுப்பிக்க ஆகும் மொத்தச் செலவு $= 80\times 775$

= ₹ 62,000

7.4.2 கனச்சதுரம் மற்றும் அதன் புறப்பரப்பு (Cube and its Surface Area)

கனச்சதுரம் (Cube): நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் ஆகிய அனைத்தும் சமமாக உள்ள ஒரு கனச்செவ்வகமே, கனச்சதுரம் ஆகும். அதாவது ஒரு கனச்சதுரமானது ஆறு சதுரப் பக்கங்களால் அடைபட்ட திண்மம் ஆகும். கனச்சதுரங்களுக்குச் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

பகடைகள்

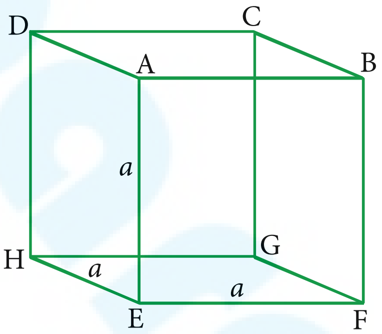
பனிக்கட்டிகள்

சர்க்கரைக் கட்டிகள்

படம் 7.13

கனச்செவ்வகத்தைப் போலவே, கனச்சதுரமும் 6 முகங்கள், 12 விளிம்புகள் மற்றும் 8 உச்சிகளைக் கொண்டிருக்கும்.

படம் 7.14 இல் உள்ளவாறு a அலகுகள் பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கனச்சதுரத்தைக் கருதுவோம். இப்பொழுது



படம் 7.14

கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு

$= (ABCD+EFGH+AEHD+BFGC+ABFE+CDHG)$

ஆகிய முகங்களின் பரப்புகளின் கூடுதல்

$= (a^2+a^2+a^2+a^2+a^2+a^2)$

$= 6a^2$ சதுர அலகுகள்

(iii) கனச்சதுரத்தின் பக்கப்பரப்பு

$= (AEHD+BFGC+ABFE+CDHG)$ ஆகிய முகங்களின் பரப்புகளின் கூடுதல்

$= (a^2 + a^2 + a^2 + a^2)$

$= 4a^2$ சதுர அலகுகள்

ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு a அலகுகள் எனில்,

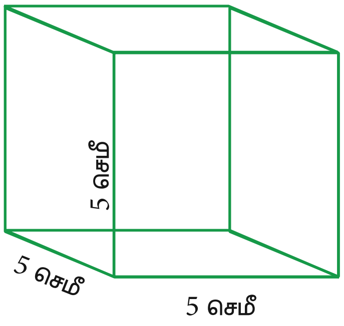
(i) மொத்தப்பரப்பு (TSA) = $6a^2$ சதுர அலகுகள்

(ii) பக்கப்பரப்பு (LSA) = $4a^2$ சதுர அலகுகள்

சிந்தனைக் களம்

இதனுடன் தொடர்புடைய கனச் செவ்வகத்தின் சூத்திரங்களைக் கொண்டுஇந்தச்சூத்திரங்களைப் பெற முடியுமா?

எடுத்துக்காட்டு 7.6 5 செமீ பக்க அளவு கொண்ட கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப்பரப்பைக் காண்க.



படம் 7.15

தீர்வு

கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு (a) = 5 செமீ

மொத்தப்பரப்பு $= 6a^2 = 6(5^2) = 150$ ச.செமீ

பக்கப்பரப்பு $= 4a^2 = 4(5^2) = 100$ ச.செமீ

எடுத்துக்காட்டு 7.7 ஒரு கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்புறப்பரப்பு 486 செமீ^{2} எனில் அதன் பக்கப் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு மொத்தப்புறப்பரப்பு = 486 செமீ^{2}

$6a^2 = 486 \Rightarrow a^2 = \frac{486}{6}, \quad a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$

கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு = 9 செமீ

கனச்சதுரத்தின் பக்கப்பரப்பு $= 4a^2 = 4 \times 9^2 = 4 \times 81 = 324$ செமீ^{2}

எடுத்துக்காட்டு 7.8 7 செமீ பக்க அளவுள்ள ஒரே மாதிரியான இரண்டு கனச்சதுரங்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று பக்கவாட்டில் இணைக்கப்படும்போது கிடைக்கும் புதிய கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப்பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு = 7 செமீ

புதிய கனச்செவ்வகத்தின் நீளம் (l) = 7+7 =14 செமீ

அகலம் (b) = 7 செமீ, உயரம் (h) = 7 செமீ

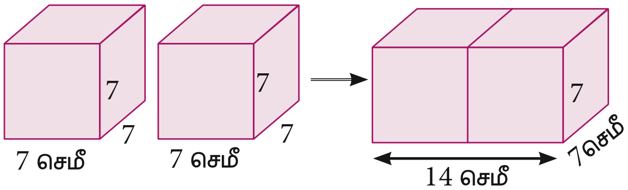
அதன் மொத்தப்பரப்பு $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2\left[(14\times7)+(7\times7)+(14\times7)\right]$

$= 2(98 + 49 + 98)$

$= 2\times245$

$= 490$ செமீ^{2}



படம் 7.16

பக்கப்பரப்பு $= 2(l + b)\times h$

$= 2(14 + 7)\times7$

$= 2\times21\times7$

$= 294$ செமீ^{2}

பயிற்சி 7.2

1. பின்வரும் அளவுகளைக் கொண்ட கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப் பரப்பைக் காண்க.
   (i) நீளம் = 20 செமீ, அகலம் = 15 செமீ மற்றும் உயரம் = 8 செமீ

2. ஒரு கனச்செவ்வக வடிவப் பெட்டியின் அளவுகளானது 6 மீ× 400 செமீ × 1.5 மீ ஆகும். அப்பெட்டியின் வெளிப்புறம் முழுவதும் வண்ணம் பூசுவதற்கு 1 சதுர மீட்டருக்கு ₹22 வீதம் ஆகும் எனில், மொத்தச் செலவைக் காண்க.

3. ஒரு கூடத்தின் அளவு 10 மீ × 9 மீ × 8 மீ என்றவாறு உள்ளது. அக்கூடத்தின் சுவர்கள் மற்றும் மேற்கூரைக்கு வெள்ளையடிக்க ஒரு சதுர மீட்டருக்கு₹8.50 வீதம் ஆகும் மொத்தச் செலவைக் காண்க.

4. கீழ்க்காணும் பக்க அளவைக் கொண்ட கனச்சதுரங்களின் மொத்தப்பரப்பு மற்றும் பக்கப்பரப்பைக் காண்க. (i) 8 மீ (ii) 21 செமீ (iii) 7.5 செமீ

5. (i) ஒரு கனச்சதுரத்தின் மொத்தப்பரப்பு 2400 செமீ^{2} எனில், அதன் பக்கப்பரப்பைக் காண்க.

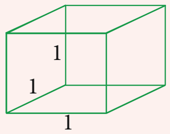
6. 6.5 மீ பக்க அளவுள்ள ஒரு கனச்சதுரக் கொள்கலனின் மேற்புறம் முழுவதும் வண்ணம் பூசப்படுகிறது. இதற்கு வண்ணம் பூச வேண்டிய பரப்பு மற்றும் 1 சதுர மீட்டருக்கு ₹24 வீதம் வண்ணம் பூச ஆகும் மொத்தச் செலவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

7. 4 செமீ பக்க அளவு உடைய ஒரே மாதிரியான மூன்று கனச்சதுரங்கள் ஒன்றோடு ஒன்று பக்கவாட்டில் இணைக்கப்படும்போது கிடைக்கும் புதிய கனச்செவ்வகத்தின் மொத்தப் பரப்பு மற்றும் பக்கப் பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

7.5 கனச்செவ்வகம் மற்றும் கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு (Volume of Cuboid and Cube)

F92XPV

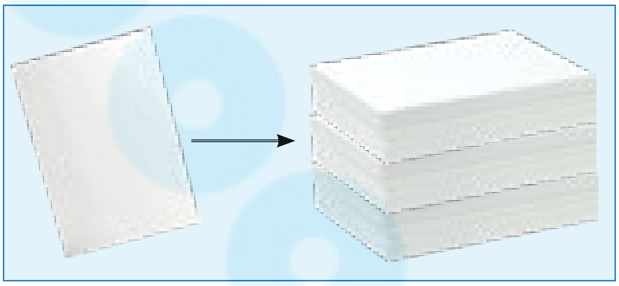
50 மிலி மற்றும் 100 மிலி அளவுள்ள பனிக்கூழ்களை (Ice cream) அனைவரும் சுவைத்து மகிழ்ந்திருப்போம். அப்படிப்பட்ட 100 மிலி பனிக் கூழ் குவளை (Ice cream cup) ஒன்றை எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது அந்தப் பனிக்கூழ் குவளையின் கொள்ளளவு அல்லது கனஅளவு 100 மிலி ஆகும். இப்படிப்பட்ட 100 மிலி அளவுள்ள எத்தனை குவளைகளைக் கொண்டு ஒரு கூசாவை (jug) நிரப்பலாம் எனக் கண்டறிக. இதில் பத்து 100 மிலி குவளைகளைக் கொண்டு ஒரு கூசாவை நிரப்ப முடியுமானால் அந்தக் கூசாவின் கொள்ளளவு அல்லது கன அளவு 1 லி ஆகும் (10×100 மிலி $=1000$ மிலி $=1$ லி). மேலும் இப்படிப்பட்ட எத்தனை கூசாக்களைக் கொண்டு ஒரு வாளியை நிரப்பலாம் எனச் சரிபார்க்கவும். இதுவே அந்த வாளியின் கொள்ளளவு அல்லது கனஅளவு ஆகும். இதேபோல் எந்தவொரு பொருளின் கன அளவையும் அல்லது கொள்ளளவையும் நம்மால் கணக்கிட இயலும்.

> **குறிப்பு**
>
> **ஓரலகு கனச்சதுரம்:**
>
> 1 அலகினைப் பக்க அளவாகக் கொண்ட கனச்சதுரம்
>
> 
>
>
> படம் 7.17

ஒரு முப்பரிமாண உருவம் புறவெளியில் எவ்வளவு இடத்தை அடைத்துக் கொள்கிறதோ, அதுவே அந்தப் பொருளின் கன அளவு ஆகும். கன சென்டிமீட்டர் (செமீ^{3}) மற்றும் கன மீட்டர் (மீ^{3}) என்பன கன அளவை அளக்க உதவும் சில அலகுகள் ஆகும்.

கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு என்பது அதன் அடிப்பக்கப்பரப்பு மற்றும் உயரத்தைப் பெருக்கக் கிடைப்பதாகும்.

இதை அன்றாட வாழ்க்கைச் சூழலில் உள்ள ஓர் எடுத்துக்காட்டு மூலம் எளிதாகப் புரிந்து கொள்ளலாம். நீங்கள் A4 தாள் கட்டுகளைப் பார்த்திருப்பீர்கள். அதில் ஒவ்வொரு தாளும் செவ்வக வடிவமுடையன. மேலும் lb பரப்புடையன. இதை ஒன்றின் மீது மற்றொன்றாக அடுக்கும்போது இது கனச்செவ்வக வடிவக் கட்டாக மாறுகிறது. இங்கு h முறை lb ஆனது கனச்செவ்வகத்தை உருவாக்குகிறது



படம். 7.18

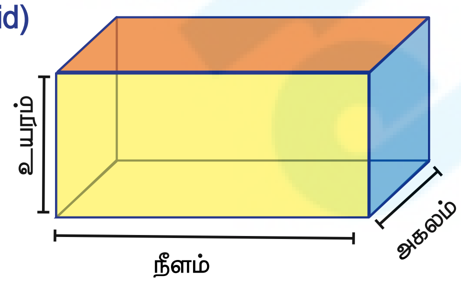
7.5.1 கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு (Volume of a Cuboid)

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b மற்றும் h அலகுகள் என்க. பிறகு,

கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு

V = (கனச்செவ்வகத்தின் அடிப்பரப்பு) $\times$ உயரம்

$= (l\times b)\times h = lbh$ கன அலகுகள்



படம் 7.19

குறிப்பு

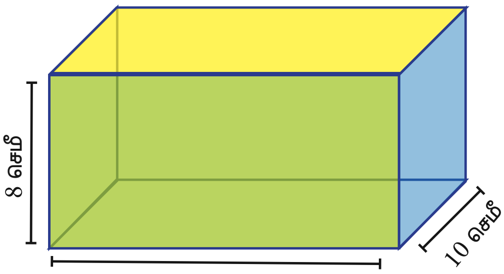
கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவைக் காணும்போது, நீளம், அகலம் மற்றும் உயரத்தின் அளவுகள் ஒரே அலகுகளில் இருக்க வேண்டும்

எடுத்துக்காட்டு 7.9

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 120 மிமீ, 10 செமீ மற்றும் 8 செமீ. இதே அளவுகள் கொண்ட 10 கனச்செவ்வகங்களின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு

இங்கு அகலம் மற்றும் உயரமானது சென்டி மீட்டரில் தரப்பட்டுள்ளன. ஆகையால் நீளத்தையும் சென்டி மீட்டரில் மாற்றலாம்.



படம் 7.20

இங்கு, l = 120 மிமீ $= \frac{120}{10} = 12$ செமீ, $b = 10$ செமீ, $h = 8$ செமீ

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு $= l \times b \times h$

$= 12 \times 10 \times 8$

$= 960$ செமீ^{3}

ஆகவே,10 கனச்செவ்வகங்களின் கன அளவு $= 10 \times 960$

$= 9600$ செமீ^{3}

எடுத்துக்காட்டு 7.10

ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரத்தின் விகிதம் 7:5:2 என்க. அதன் கனஅளவு 35840 செமீ^{3} எனில் அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

கனச்செவ்வகத்தின் பக்க அளவுகள் $l = 7x$, $b = 5x$ மற்றும் $h = 2x$ என்க.

இங்கு கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு

$= 35840$ செமீ^{3}

$l \times b \times h = 35840$

$(7x)(5x)(2x) = 35840$

$70x^3 = 35840$

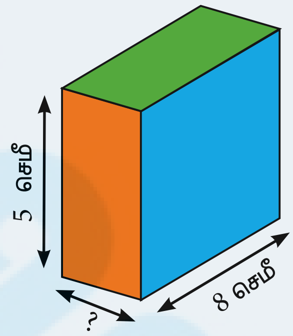
$x^3 = \frac{35840}{70}$

$x^3 = 512$

சிந்தனைக் களம்

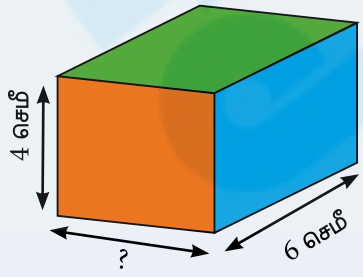
பின்வரும் ஒவ்வொரு கனச் செவ்வகமும் 120 செமீ^{3} கன அளவு உடையன எனில், ஒவ்வொன்றிலும் விடுபட்ட அளவினைக் காண்க

(i)



படம் 7.21

(ii)



படம் 7.22

$x = \sqrt[3]{8\times8\times8}$

$x = 8$ செமீ

கனச்செவ்வகத்தின் நீளம் $= 7x = 7\times8 = 56$ செமீ

கனச்செவ்வகத்தின் அகலம் $= 5x = 5\times8 = 40$ செமீ

கனச்செவ்வகத்தின் உயரம் $= 2x = 2\times8 = 16$ செமீ

எடுத்துக்காட்டு 7.11 ஒரு மீன் தொட்டியானது 3.8 மீ × 2.5 மீ × 1.6 மீ என்ற அளவுகளை உடையது. இந்தத் தொட்டியானது எத்தனை லிட்டர் தண்ணீர் கொள்ளும்?

தீர்வு

படம் 7.23

மீன் தொட்டியின் நீளம் l =3.8 மீ

மீன் தொட்டியின் அகலம் b =2.5 மீ

மீன் தொட்டியின் உயரம் h =1.6 மீ

மீன் தொட்டியின் கனஅளவு $= l\times b\times h$

$= 3.8\times2.5\times1.6$

$= 15.2$ மீ^{3}

$= 15.2\times1000$ லிட்டர்

$= 15200$ லிட்டர்

குறிப்பு

1 செமீ^{3} =1 மிலி, 1000 செமீ^{3} =1 லிட்டர், 1மீ^{3} =1000 லிட்டர்

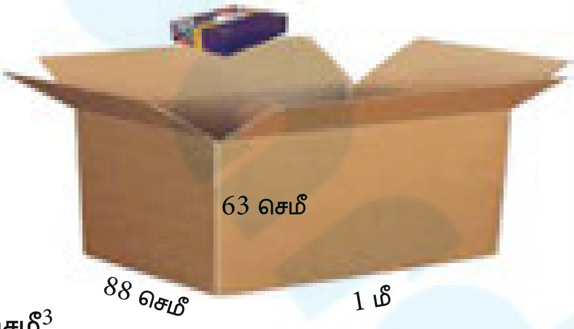
எடுத்துக்காட்டு 7.12 இனிப்புகள் வைக்கும் ஒரு பெட்டியானது 22 செமீ × 18 செமீ × 10 செமீ என்ற அளவில் உள்ளது. இதனை 1 மீ × 88 செமீ × 63 செமீ அளவுள்ள ஓர் அட்டைப் பெட்டியில் எத்தனை அடுக்கலாம்?

தீர்வு

இங்கு இனிப்புப் பெட்டியின் நீளம் (l) = 22செமீ, அகலம் (b) = 18செமீ, உயரம் (h) = 10செமீ.

ஓர் இனிப்புப் பெட்டியின் கன அளவு $= l\times b\times h$

$= 22\times18\times10$ செமீ^{3}



படம் 7.24

அட்டைப் பெட்டியின் நீளம் (l) = 1மீ= 100 செமீ,

அகலம் (b) = 88 செமீ, உயரம் (h) = 63 செமீ.

அட்டைப் பெட்டியின் கனஅளவு $= l\times b\times h$

$= 100\times88\times63$ செமீ^{3}

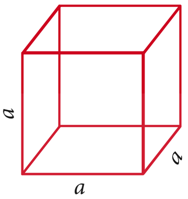
அட்டைப் பெட்டியில் அடுக்க இயலும் இனிப்புப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை

$= \dfrac{\text{அட்டைப் பெட்டியின் கனஅளவு}}{\text{இனிப்புப் பெட்டியின் கன அளவு}}$

$= \dfrac{100\times88\times63}{22\times18\times10} = 140$ பெட்டிகள்

7.5.2 கனச்சதுரத்தின் கன அளவு (Volume of a Cube)

'a' அலகு பக்க அளவு கொண்ட ஒரு கனச் சதுரத்தின் கன அளவைக் காண்பது எளிதானது. கனச் செவ்வகத்தின் கன அளவிற்கான சூத்திரத்தில் $l = b = h = a$ எனப் பிரதியிட, நமக்குக் கனச் சதுரத்தின் கன அளவானது a^3 கன அலகுகள் எனக் கிடைக்கிறது.



படம் 7.25

ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு 'a' அலகுகள் எனில், அதன் கன அளவு $(V) = a^3$ கன அலகுகள்.

குறிப்பு

எந்த இரு கனச்சதுரங்களுக்கும் கீழ்க்காணும் முடிவுகள் பொருந்தும்.

- புறப்பரப்புகளின் விகிதம் = (பக்கங்களின் விகிதம்)^2
- கன அளவுகளின் விகிதம் = (பக்கங்களின் விகிதம்)^3
- (புறப்பரப்புகளின் விகிதம்)^3 = (கன அளவுகளின் விகிதம்)^2

எடுத்துக்காட்டு 7.13 10 செமீ பக்க அளவுள்ள கனச்சதுரத்தின் கனஅளவைக் காண்க.

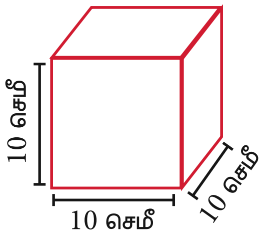
தீர்வு

இங்கு பக்க அளவு $a = 10$ செமீ

கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு $= a^3$

$= 10 \times 10 \times 10$

$= 1000$ செமீ^{3}



படம். 7.26

எடுத்துக்காட்டு 7.14 ஒரு கனச்சதுர வடிவ நீர்த் தொட்டியானது 64,000 லிட்டர் நீர் கொள்ளும் எனில், அந்தத் தொட்டியின் பக்கத்தின் நீளத்தை மீட்டரில் காண்க.

தீர்வு

நீர்த் தொட்டியின் பக்க அளவு a என்க.

இங்கு நீர்த் தொட்டியின் கன அளவு $= 64,000$ லிட்டர்

அதாவது, $a^3 = 64,000 = \frac{64000}{1000}$ [ஏனெனில்,1000 லிட்டர்=1மீ^{3}]

$a^3 = 64$ மீ^{3}

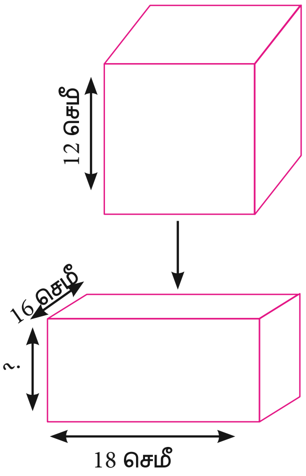
இப்பொழுது, $a = \sqrt[3]{64} = 4$ மீ

அந்த நீர்த் தொட்டியின் பக்கத்தின் நீளம் 4 மீட்டர் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.15 உலோகத்தால் ஆன ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு 12 செமீ. அதனை உருக்கி 18 செமீ நீளம் மற்றும் 16 செமீ அகலம் உள்ள ஒரு கனச்செவ்வகம் உருவாக்கப்படுகிறது. அந்தக் கனச்செவ்வகத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

கனச்சதுரம்	**கனச்செவ்வகம்**
பக்க அளவு $(a) = 12$ செமீ	நீளம் $(l) = 18$செமீ
	அகலம் $(b) = 16$செமீ
	உயரம் $(h) = ?$



படம் 7.27

இங்கு, கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு = கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு

$$l \times b \times h = a^3$$

$$18 \times 16 \times h = 12 \times 12 \times 12$$

$$h = \frac{12 \times 12 \times 12}{18 \times 16}$$

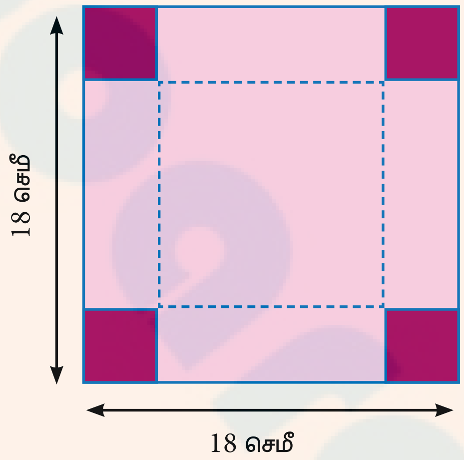
$$h = 6 \text{ செமீ}$$

எனவே, கனச்செவ்வகத்தின் உயரம் 6 செமீ ஆகும்.

செயல்பாடு

18 செமீ×18 செமீ அளவுள்ள ஒரு சதுர வடிவத்தாளை (Paper / Chart paper) எடுத்துக் கொள்ளவும். அதன் ஒவ்வொரு மூலையிலிருந்தும் ஒரே அளவுள்ள சதுரப் பகுதிகளை நீக்கவும். பிறகு தாளில் உள்ள மடிப்புகளை மடித்து ஒரு திறந்த கனச்செவ்வகப் பெட்டி செய்யவும். பிறகு ஒவ்வொரு கனச்செவ்வகப் பெட்டியின் அளவுகளையும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் குறிக்கவும். மேலும் ஒவ்வொரு பெட்டிக்கும் அதன் கன அளவினைக் கண்டுபிடித்து அட்டவணையை நிரப்பவும். ஒவ்வொரு முறையும் நீக்க வேண்டிய சதுரப் பகுதிகளின் பக்க அளவு அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மூலைகளில் நீக்கும் சதுரத்தின் பக்க அளவு	பெட்டியின் அளவுகள்			கன அளவு
	l	b	h	V
2 செமீ				
3 செமீ				
4 செமீ				
5 செமீ				



படம் 7.28

மேற்காணும் அட்டவணையை உற்றுநோக்கி, பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்:

(i) இங்கு கிடைக்கக்கூடிய மிகப் பெரிய கன அளவு என்ன?

(ii) இந்த மிகப் பெரிய கன அளவு கிடைக்க மூலைகளில் நீக்கப்பட வேண்டிய சதுரத்தின் பக்க அளவு என்ன?

பயிற்சி 7.3

1. கீழ்க்காணும் அளவுகளைக் கொண்ட கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவைக் காண்க.
   (i) நீளம் = 12 செமீ, அகலம் = 8 செமீ, உயரம் = 6 செமீ
   (ii) நீளம் = 60 மீ, அகலம் = 25 மீ, உயரம் = 1.5 மீ

2. ஒரு தீப்பெட்டியின் அளவுகள் 6 செமீ × 3.5 செமீ × 2.5 செமீ என உள்ளது. இதே அளவுகளை உடைய 12 தீப்பெட்டிகள் கொண்ட ஒரு கட்டின் கனஅளவைக் காண்க.

3. ஒரு சாக்லேட் பெட்டியின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே 5:4:3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது. அதன் கன அளவு 7500 செமீ^{3} எனில் அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

4. ஒரு குளத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் ஆழம் முறையே 20.5 மீ, 16 மீ மற்றும் 8 மீ எனில், அந்தக் குளத்தின் கொள்ளளவை லிட்டரில் காண்க.

5. ஒரு செங்கல்லின் அளவுகள் 24 செமீ× 12 செமீ × 8 செமீ ஆகும். 20 மீ நீளம், 48 செமீ அகலம் மற்றும் 6 மீ உயரமுள்ள ஒரு சுவர் எழுப்புவதற்கு இது போன்ற எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?

6. ஒரு கொள்கலனின் (container) கன அளவு 1440 மீ^{3}. அதன் நீளம் மற்றும் அகலம் முறையே 15 மீ மற்றும் 8 மீ எனில் அதன் உயரத்தைக் காண்க.

7. பின்வரும் பக்க அளவைக் கொண்ட கனச்சதுரத்தின் கனஅளவைக் காண்க.
   (i) 5 செமீ (ii) 3.5 மீ (iii) 21 செமீ

8. ஒரு கனச்சதுர வடிவிலான பால் தொட்டியானது 1,25,000 லிட்டர் கொள்ளளவைக் கொண்டுள்ளது. அத்தொட்டியின் பக்க நீளத்தை மீட்டரில் காண்க.

9. 15 செமீ பக்க அளவுள்ள ஓர் உலோகத்தால் ஆன கனச்சதுரமானது உருக்கப்பட்டு ஒரு கனச்செவ்வகமாக உருவாக்கப்படுகிறது. கனச்செவ்வகத்தின் நீளம் மற்றும் உயரம் முறையே 25 செமீ மற்றும் 9 செமீ எனில் அதன் அகலத்தைக் காண்க.

F9BTRI

பயிற்சி 7.4

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. 15 செமீ, 20 செமீ மற்றும் 25 செமீ பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் அரைச் சுற்றளவு
   (1) 60 செமீ (2) 45 செமீ (3) 30 செமீ (4) 15 செமீ

2. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகள் 3 செமீ, 4 செமீ மற்றும் 5 செமீ எனில் அதன் பரப்பளவு
   (1) 3 செமீ^{2} (2) 6 செமீ^{2} (3) 9 செமீ^{2} (4) 12 செமீ ^{2}

3. ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் சுற்றளவு 30 செமீ எனில், அதன் பரப்பளவு
   (1) $10\sqrt{3}$ செமீ^{2} (2) $12\sqrt{3}$ செமீ^{2} (3) $15\sqrt{3}$ செமீ^{2} (4) $25\sqrt{3}$ செமீ^{2}

4. 12 செமீ பக்க அளவுள்ள ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்கப்பரப்பு
   (1) 144 செமீ^{2} (2) 196 செமீ^{2} (3) 576 செமீ^{2} (4) 664 செமீ^{2}

5. ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்கப்பரப்பு 600 செமீ^{2} எனில், அதன் மொத்தப்பரப்பு

(1) 150 செமீ^{2} (2) 400 செமீ^{2} (3) 900 செமீ^{2} (4) 1350 செமீ^{2}

6. 10 செமீ $\times$ 6 செமீ $\times$ 5 செமீ அளவுள்ள ஒரு கனச்செவ்வகப் பெட்டியின் மொத்தப்பரப்பு

(1) 280 செமீ^{2} (2) 300 செமீ^{2} (3) 360 செமீ^{2} (4) 600 செமீ^{2}

7. இரு கனச்சதுரங்களின் பக்கங்களின் விகிதமானது 2:3 எனில் அதன் புறப்பரப்புகளின் விகிதங்கள்

(1) 4:6 (2) 4:9 (3) 6:9 (4) 16:36

8. ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் கன அளவு 660 செமீ^{3} மற்றும் அதன் அடிப்பரப்பு 33 செமீ^{2} எனில் அதன் உயரம்

(1) 10 செமீ (2) 12 செமீ (3) 20 செமீ (4) 22 செமீ

9. 10 மீ $\times$ 5 மீ $\times$ 1.5 மீ அளவுள்ள ஒரு நீர்த் தொட்டியின் கொள்ளளவு

(1) 75 லிட்டர் (2) 750 லிட்டர் (3) 7500 லிட்டர் (4) 75000 லிட்டர்

10. 5 மீ $\times$ 3 மீ $\times$ 2 மீ அளவுள்ள ஒரு சுவர் எழுப்ப, 50 செமீ $\times$ 30 செமீ $\times$ 20 செமீ அளவு கொண்ட செங்கற்கள் எத்தனை தேவை?

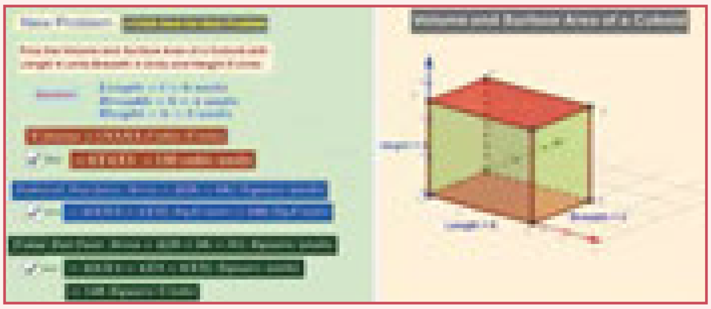
(1) 1000 (2) 2000 (3) 3000 (4) 5000

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- a, b மற்றும் c என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் பக்க அளவுகள் எனில் முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ சதுர அலகுகள். இங்கு $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.
- ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b மற்றும் h எனில்,
  - (i) மொத்தப்பரப்பு(TSA) $= 2(lb+bh+lh)$ சதுர அலகுகள்
  - (ii) பக்கப்பரப்பு (LSA) $= 2(l+b)h$ சதுர அலகுகள்
- ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு a அலகுகள் எனில் அதன்
  - (i) மொத்தப்பரப்பு (TSA) $= 6a^2$ சதுர அலகுகள்
  - (ii) பக்கப்பரப்பு(LSA) $= 4a^2$ சதுர அலகுகள்
- ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் நீளம், அகலம் மற்றும் உயரம் முறையே l, b மற்றும் h எனில், கனச் செவ்வகத்தின் கன அளவு $(V) = lbh$ கன அலகுகள்
- ஒரு கனச்சதுரத்தின் பக்க அளவு a அலகுகள் எனில், கனச்சதுரத்தின் கன அளவு $(V) = a^3$ கன அலகுகள்

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



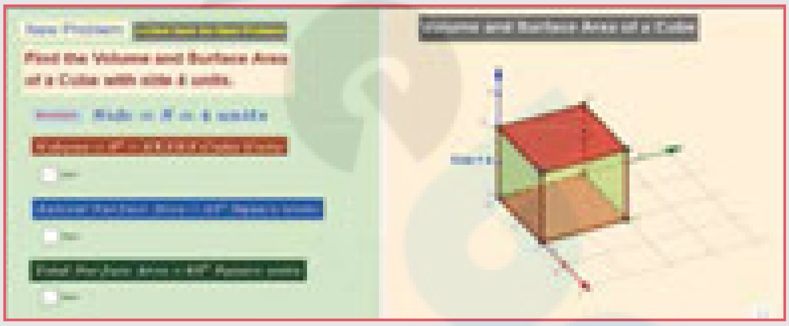
படி – 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி, GeoGebra வின் "Mensuration" பக்கத்திற்குச் செல்க. CUBE மற்றும் CUBOID ஆகிய இரண்டு தலைப்புகளில் பணித்தாள்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

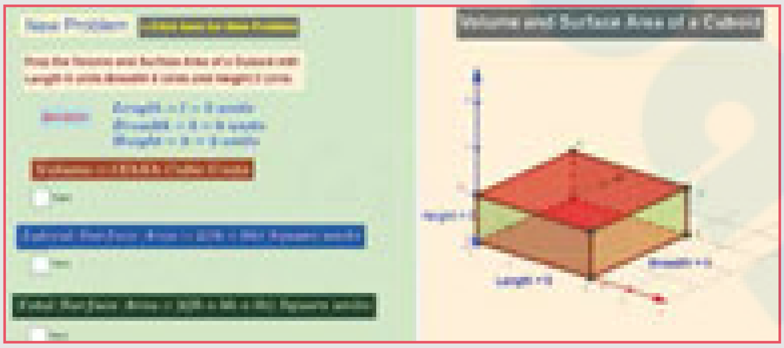
படி - 2

"New Problem" என்பதைச் சொடுக்கவும். அதில் Volume, Lateral surface மற்றும் Total surface area ஆகியவை கேட்கப்பட்டிருக்கும். கணக்குகளைச் செய்து பார்த்து, விடைகளைப் பொருத்தமான தேர்வுக்கட்டங்களைச் சொடுக்கி, சரி பார்க்கவும்.

படி 1



படி 2



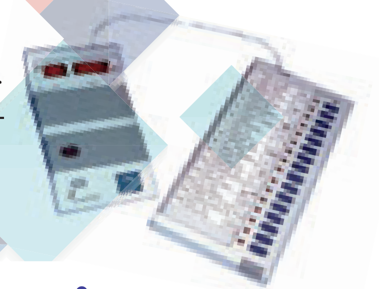
செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

அளவியல் : https://ggbm.at/czsby7ym or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

8

$$l+\frac{\left(\frac{N}{2}-m\right)}{f}\times c \qquad \bar{X}=\frac{\sum fx}{\sum f}$$



புள்ளியியல்

"புள்ளியியல் புரிதல் இல்லையெனில் ஒவ்வாக் கருத்துக்கள் மறைக்கப்பட்டுவிடும்" –ஆல்பர்ட் பெர்டில்சன்

சர் ரொனால்ட் ஆயில்மர் பிஷர்
(கிபி (பொஆ) 1890 - 1962)

சர் ரொனால்ட் ஆயில்மர் பிஷர் (Sir Ronald Aylmer Fisher) ஓர் ஆங்கிலேயப் புள்ளியியலாளர் மற்றும் உயிரியலாளர் ஆவார். மேலும் சோதனை வடிவமைப்பு மற்றும் நவீனப் புள்ளியியலின் தந்தை என அழைக்கப்படுகிறார். இவரது விவசாயம் சார்ந்த ஆராய்ச்சியானது பல்லாயிரக்கணக்கானவர்களைப் பட்டினியிலிருந்து காப்பாற்றியது. லின்னியன் சமுதாயத்தால் வழங்கப்படும், லண்டனின் பெருமைமிகு டார்வின்–வாலஸ் பதக்கமானது இவருக்கு 1958 இல் வழங்கப்பட்டது.

ALHDRS

கற்றல் விளைவுகள்

- சராசரியின் பல்வேறு வகைகளை நினைவுகூர்தல்.
- வகைப்படுத்தப்படாதத் தரவுகளின் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு ஆகியவற்றைக் காணும் வழிமுறைகளை நினைவுகூர்தல்.
- வகைப்படுத்தப்பட்டத் தரவுகளின் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு ஆகியவற்றைக் காணுதல்.

8.1 அறிமுகம்

முடிவுகளை எடுப்பதற்காகத் தரவுகளைத் திரட்டுதல், தொகுத்தல், ஆய்வு செய்தல் மற்றும் விளக்குதல் பற்றிய அறிவியலே புள்ளியியல் ஆகும். நாம் அன்றாடம் கடந்து செல்கின்ற பல்வேறு எண் மற்றும் தரம் சார்ந்த தரவுகள் நம் வாழ்வில் ஆழ்ந்த தாக்கத்தை ஏற்படுத்துகின்றன.

தரவுகளைத் தொகுத்தல் புள்ளியியலின் அடிப்படையாகும். இங்குத் தரவுகள் என்பது எண்ணியல் சார்ந்து திரட்டப்பட்ட உண்மைகள் ஆகும். நாம் அத்தரவுகளை, ஆய்வு செய்து முடிவுகளை எடுக்கின்றோம். அவ்வாறு முடிவுகளை எடுப்பதற்குப் புள்ளியியல் முறைகள் கருவியாகப் பயன்படுகின்றன.

8-Stats TM.indd 281 12/12/2019 3:22:20 PM

மட்டைப்பந்துச் செய்திகள்

குழு U19	போட்டிகள்	வெற்றி	தோல்வி	டிரா
இந்தியா	71	52	18	0/1
ஆஸ்திரேலியா	67	50	15	0/2
பாகிஸ்தான்	69	50	19	0/0
பங்களாதேஷ்	64	45	17	1/1
மேற்கிந்தியத் தீவுகள்	71	44	27	0/0
தென் ஆப்ரிக்கா	61	43	17	0/1
இங்கிலாந்து	69	40	28	0/1
இலங்கை	68	36	31	0/1
நியூசிலாந்து	66	30	35	0/1
ஜிம்பாப்வே	62	28	34	0/0
அயர்லாந்து	49	16	32	1/0
ஆப்கானிஸ்தான்	24	11	13	0/0
நமிபியா	47	9	37	1/0
கென்யா	17	5	12	0/0
கனடா	29	4	23	1/1
பப்புவா நியூ கினியா	41	3	38	0/0

வாடிக்கையாளர் மனநிறைவு கணக்கெடுப்பு

தமிழ்நாடு உணவகம்

உங்கள் மனநிறைவை எங்களுக்கு தெரிவியுங்கள்

- மிகச் சிறப்பு
- சிறப்பு
- பரவாயில்லை
- சரியில்லை
- மிக மோசம்

இந்திய

மொத்த உள்நாட்டு உற்பத்தி முன்கணிப்பு – 2018

ஐ.நா.	7.2%
ஜஎம்எப்	7.4%
உலக வங்கி	7.3%
மோர்கன் ஸ்டேன்லி	7.5%
மூடிஸ்	7.6%
எச்எஸ்பிசி	7%
பேங்க் ஆப் அமெரிக்கா	7.2%
மெரில் லின்ச்	7.5%
கோல்ட்மேன் சேக்	8%

8.2 தரவுகளைத் திரட்டுதல் (Collection of Data)

நாம் நேரடியாகத் திரட்டிய தரவுகள் முதல்நிலைத் தரவுகள் ஆகும். ஒருவரிடம் நேரடியாகக் கேட்டு (தொலைபேசி, மின்னஞ்சல், தனிப்பட்ட முறையில்) ஆய்வுகளை நடத்துவது போன்ற பல்வேறு வழிமுறைகளைப் பயன்படுத்தி முதல்நிலைத் தரவுகளைத் திரட்டுகிறோம்.

மற்றவர்கள் திரட்டிய தரவுகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விவரங்கள் இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, அரசு வெளியிட்ட தரவுகள், ஆய்வு முடிவுகளிலிருந்து பெறப்பட்ட அறிக்கைகள் போன்றவை ஆகும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

முதல்நிலைத் தரவுகளை கண்டுபிடி

(i) நுகர்வோர் கருத்துக் கேட்பு
(ii) மருத்துவ ஆராய்ச்சி அறிக்கைகள்
(iii) பொருளாதார முன்னெச்சரிக்கைகள்
(iv) பள்ளித் தேர்வு முடிவுகள்
(v) தேர்தல் முடிவுகள்
(vi) சந்தை விவரங்கள்
(vii) விற்பனை முன்கணிப்பு
(viii) விலை நிர்ணய பட்டியல்

8.2.1 உண்மைகளை வரிசைப்படுத்துதல் (Getting the Facts Sorted Out)

தொடக்க நிலையில் நாம் திரட்டும் தரவுகள் செம்மையானதாக இருக்காது. அதனால் அவை செப்பனிடப்படாத தரவுகள் எனப்படும். நம்மால் பகுப்பாய்வு செய்ய இயலாத நிலையில் இந்த விவரங்கள் இருப்பதால் இவை அதிகம் பயன்படுவதில்லை.

செயல்பாடு 1

தரவுகளைக் கொண்ட படங்கள், அட்டவணைகள், எண்கள் போன்றவற்றை உள்ளடக்கிய செருகேடு (Album) ஒன்றினை உருவாக்குக. இவை அன்றாட வாழ்வியலுடன் எவ்வாறு தொடர்பு கொண்டுள்ளது என்பதனை விவரிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு தேர்வில் 50 மாணவர்கள் பெற்ற கணித மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளன:

61	60	44	49	31	60	79	62	39	51	67	65	43	54	51	42
52	43	46	40	60	63	72	46	34	55	76	55	30	67	44	57
62	50	65	58	25	35	54	59	43	46	58	58	56	59	59	45
42	44														

8-Stats TM.indd 282 12/12/2019 3:22:21 PM

இந்தப் புள்ளி விவரங்களிலிருந்து, ஐந்து அதிகமான மதிப்பெண்களை நீங்கள் கண்டுபிடிப்பது எளிமையான பணியா? அதை இந்தத் தகவலில் தேட வேண்டும். மேலும் மூன்றாவது அதிகமான மதிப்பெண் எது எனக் காண்பது இன்னும் கடினமானது. ஒருவேளை 56–க்கும் குறைவாக மதிப்பெண் பெற்றவர்கள் எத்தனை பேர் என நீங்கள் அறிய விரும்பினால், இன்னும் சற்றுக் கூடுதலாக நேரம் எடுக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்களை முறைப்படுத்தி எழுதினால் நம் வேலை எளிமையாக இருக்கும்.

சிறுசிறு கடினங்களுக்குப் பிறகு அதிகமான மதிப்பெண் 79 எனவும், குறைந்த மதிப்பெண் 25 எனவும், நாம் அறிய முடிகிறது. இந்த மதிப்பெண்களை நமக்கு ஏற்றவாறு பிரிவுகளாகப் பிரித்து, ஒவ்வொரு மதிப்பெண்ணையும் குறிப்பிட்ட அந்தப் பிரிவில் எழுதலாம். அவற்றை எப்படி எழுதலாம் என்பதற்கான மாதிரியை உற்று நோக்குக.

பிரிவு இடைவெளி	மதிப்பெண்
25-30	30,25
31-35	31,34,35
36-40	39,40
41-45	44,43,42,43,44,43,45,42,44
46-50	49,46,46,50,46
51-55	51,54,51,52,55,55,54
56-60	60, 60,60,57,58,59,58,58,56,59,59
61-65	61,62,65,63,62,65
66-70	67,67
71-75	72
76-80	79,76

மேற்கூறிய வினாக்களுக்கு அட்டவணையிலிருந்து எளிதாக விடையளிக்க இயலுமா?

“56-ஐ விடக் குறைவான மதிப்பெண்கள் பெற்றவர்கள் எத்தனை பேர்?” என்ற வினாவிற்கு விடை காண, அனைத்து மதிப்பெண்களையும் ஆராயத் தேவையில்லை. உங்களுக்குத் தேவை "எத்தனை?" என்பதற்கான பதில் மட்டுமே. இவ்வாறான, வினாக்களுக்குப் பதிலளிக்க, இந்த அட்டவணையில், ஒவ்வொரு பிரிவிலும் இருப்போர் எத்தனை பேர் எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிட்டாலே போதுமானது. மேற்கண்ட அட்டவணையை மேலும் பயனுள்ளதாக்க அடுத்துள்ளவாறு எளிமையாக வரிசைப்படுத்தலாம்.

பிரிவு இடைவெளி	உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
25-30	2
31-35	3
36-40	2
41-45	9
46-50	5
51-55	7
56-60	11
61-65	6
66-70	2
71-75	1
76-80	2

இந்த அட்டவணையானது ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன என்பதை நமக்குத் தருகிறது. ஒவ்வொரு பிரிவுக்கும் எதிரே உள்ள எண், அந்தப் பிரிவுக்கு உட்பட்ட உறுப்புகள் எத்தனை இடம் பெற்றுள்ளன என்பதைக் குறிக்கிறது. இந்த எண் அந்தப் பிரிவின் நிகழ்வெண் எனப்படுகிறது. இந்த அட்டவணை நிகழ்வெண் அட்டவணை என அழைக்கப்படுகிறது.

8-Stats TM.indd 283 12/12/2019 3:22:21 PM

நிகழ்வெண்ணைக் கணக்கிட நாம் நேர்க்கோட்டுக் குறிகளைப் பயன்படுத்துகிறோம். (இந்தக் கலத்தில், குறிப்பிட்ட பிரிவுக்கு எதிராக நேரடியாக மதிப்பெண்ணை எழுதாமல், அதற்குப் பதிலாக ஒரு நேர்க்கோட்டுக் குறி இடுகிறோம்.) எடுத்துக்காட்டாக 31-35 என்ற பிரிவுக்கு எதிரில் நேரடியாக மதிப்பெண்களான 31,34,35 என எழுதாமல் ||| எனக் குறியிடுகிறோம். அப்படியானால் 56-60 என்ற பிரிவுக்கு ||||||||||| என்று எழுத வேண்டுமே! இந்தக் குழப்பத்தைத் தவிர்க்க ஒவ்வோர் ஐந்தாவது நேர்க்கோட்டுக் குறியையும், அதற்கு முன்னர் குறிப்பிட்ட நான்கு நேர்க்கோட்டுக் குறிகளுக்குக் குறுக்காக 𝍸 என்றவாறு குறிப்பிடுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, 11 என்பதைக் காட்ட நாம் 𝍸 𝍸 | என எழுதுகிறோம். இவ்வாறு எழுதினால் மேலே கண்ட விளக்கப்படத்திற்கான நிகழ்வெண் அட்டவணை கீழ்க்கண்டவாறு அமையும்.

பிரிவு இடைவெளி	நேர்க்கோட்டுக் குறிகள்	நிகழ்வெண்
25-30	||	2
31-35	|||	3
36-40	||	2
41-45	𝍸 ||||	9
46-50	𝍸	5
51-55	𝍸 ||	7
56-60	𝍸 𝍸 |	11
61-65	𝍸 |	6
66-70	||	2
71-75	|	1
76-80	||	2
	மொத்தம்	**50**

குறிப்பு

ஏதாவது ஒரு பிரிவினை எடுத்துக்கொள்க. 56-60 என எடுத்துக்கொண்டால், 56 என்பது பிரிவின் கீழ் எல்லை எனவும், 60 என்பது பிரிவின் மேல் எல்லை எனவும் கூறப்படும்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

நிகழ்வெண் பட்டியல் தயாரிக்க.

23	44	12	11	45	55	79	20
52	37	77	97	82	56	28	71
62	58	69	24	12	99	55	78
21	39	80	65	54	44	59	65
17	28	65	35	55	68	84	97
80	46	30	49	50	61	59	33
11	57						

8.3 மையப்போக்கு அளவைகள் (Measures of Central Tendency)

அன்றாட வாழ்வில் நம்மிடம் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தகவலுக்கான அளவைக் குறிப்பிடுவது அவசியமாகிறது. ஓர் ஆராய்ச்சியாளர் தமது ஆய்வில், மக்கள் சராசரியாக நாளொன்றுக்கு மூன்று மணி நேரம் தொலைக்காட்சித் தொடர்களைப் பார்க்கின்றார்கள் எனக் குறிப்பிட்டிருந்தால், ஒவ்வொருவரும் மூன்று மணி நேரம் பார்க்கின்றார்கள் என்று பொருள் அல்ல. சிலர் அதிக நேரம் பார்க்கலாம், சிலர் குறைவான நேரம் பார்க்கலாம். 'தொலைக்காட்சித் தொடரைப் பார்த்தல்' என்ற செயலுக்குக் கொடுக்கப்பட்ட தகவலில், ஏற்றுக் கொள்ளப்பட்ட அளவு சராசரி ஆகும்.

சராசரி என்பது ஒரு பெரிய அளவிலான தகவலை ஒரு குறிப்பிட்ட தனி மதிப்பிற்குச் சுருக்கிக் காட்டுகிறது. மேலும் அந்தத் தனிமதிப்பை ஒட்டி உண்மையான தகவலில் சில வேறுபாடுகள் உள்ளன என்பதையும் சுட்டிக் காட்டுகிறது.

சராசரி என்ற கருத்தைப் பொறுத்தளவில் ஒரு சராசரி மனிதனின் பார்வையிலிருந்து ஒரு கணிதவியலாளரின் பார்வை சற்று வேறுபட்டது. சராசரிக்கான மூன்று வகைப்பட்ட வரையறைகள்

8-Stats TM.indd 284 12/12/2019 3:22:21 PM

உள்ளன. அவை, கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியன ஆகும். இவை ஒவ்வொன்றும் வேறுபட்ட வழிமுறைகளிலிருந்து பெறப்படுகின்றன. இந்த மூன்றையும் ஒரே தகவலில் பயன்படுத்தினால் கூட, மூன்றும் பெரும்பாலும் வெவ்வேறான சராசரி மதிப்புகளையே தரும். இந்த மூன்று சராசரி அளவுகளிலும் கொடுக்கப்பட்ட தகவல்களில் எதைக் குறிக்கின்றன என்பதையும், கணக்கீட்டில் எது மிகச்சரியாக இருக்கும் என்பதையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுவது நமக்குத் தேவையாகும்.

8.4 கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean)

8.4.1 கூட்டுச் சராசரி – செப்பனிடப்படாத தரவுகள் (Arithmetic Mean-Raw Data)

எல்லாவகையான சராசரிகளிலும், பொதுவாகக் கொடுக்கப்பட்ட தகவலின் கூட்டுச்சராசரியே பயன்படுத்தப்படுகிறது. இது கொடுக்கப்பட்ட அனைத்து மதிப்புகளின் கூடுதலை, மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துப் பெறப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு $(T20)$ மட்டைப் பந்தாட்ட வீரர் விளையாடிய 8 ஆட்டங்களில் எடுத்த ஓட்டங்கள் 25, 32, 36, 38, 45,41,35 மற்றும் 36 என எடுத்துக்கொண்டால், அவரின் சராசரியை,

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{25+32+36+38+45+41+35+36}{8} = \frac{288}{8} = 36$$ எனக் கணக்கிடலாம்.

இதையே $x_1, x_2, x_{3,} \ldots, x_n$ என்ற n மதிப்புகள் எனில் அவற்றின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{X}$ ஐக் (X bar எனப் படிக்க வேண்டும்) கீழ்க்கண்டவாறு நாம்எழுதலாம்.

$$\bar{X} = \frac{\text{அனைத்து மதிப்புகளின் கூடுதல்}}{\text{மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

இவ்வாய்ப்பட்டை நாம் இவ்வாறாக எழுதலாம்:

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$

குறிப்பு

எந்த மதிப்பை நாம் ஊகச்சராசரியாகத் தேர்ந்தெடுக்கிறோம் என்பது ஒரு பொருட்டல்ல. அந்த ஊகச்சராசரி நம் கணக்கீட்டை எளிமைப்படுத்தவேண்டும். ஊகச்சராசரியாகத் தேர்ந்தெடுக்கும் எண் பெரும்பாலான மதிப்புகளுக்கு அருகாமையில் இருப்பின் நன்று. மேலும் அவ்வெண் கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலில்தான் இருக்கவேண்டும் என்ற அவசியமில்லை.

ஊகச் சராசரி முறை (Assumed Mean method)

சில நேரங்களில், நம் கணக்கீட்டை எளிமையாகச் செய்வதற்கு ஒரு தோராயமான மதிப்பைச் சராசரியாகக் கணித்துக் கணக்கைச் செய்திருப்போம். அந்தத் தோராயமான மதிப்பை நாம் ஊகச்சராசரி என அழைக்கலாம். உதாரணமாக, முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் உள்ள மட்டைப்பந்தாட்ட வீரர் எடுத்த ஓட்டங்களின் எண்ணிக்கையில் 38 என்ற மதிப்பை நாம் ஊகச்சராசரியாக எடுத்துக்கொள்வோம். பிறகு ஊகச்சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்பும் எவ்வளவு வேறுபடுகிறது என்பதைப் பட்டியலிடுவோம்.

$25-38 = -13,\ \ 32-38 = -6,\ \ 36-38 = -2,\ \ 38-38 = 0,$

$45-38 = 7,\ \ 41-38 = 3,\ \ 35-38 = -3,\ \ 36-38 = -2$

8-Stats TM.indd 285 12/12/2019 3:22:22 PM

வேறுபாடுகளின் சராசரி $= \frac{-13-6-2+0+7+3-3-2}{8} = \frac{-16}{8} = -2$

இப்பொழுது ஊகச்சராசரியுடன் வேறுபாடுகளின் சராசரியைக் கூட்ட நமக்குச் சரியான சராசரி கிடைக்கும்.

எனவே, சரியான சராசரி = ஊகச்சராசரி + வேறுபாடுகளின் சராசரி = 38 – 2 = 36 .

பெரிய மதிப்பிலான எண்களுக்குச் சராசரி காண இந்த ஊகச்சராசரி முறை பயனுள்ளதாக இருக்கும்.

8.4.2 சராசரி – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல் (Mean-Ungrouped Frequency Distribution)

பள்ளி விளையாட்டு நிகழ்வில் பங்குகொண்ட 12 மாணவர்களின் உயரங்களை (சென்டி மீட்டரில்) எடுத்துக்கொள்வோம்.

140, 142, 150, 150, 140, 148, 140, 147, 145, 140, 147, 145.

இத்தரவுகளின் சராசரி உயரத்தை எவ்வாறு காண்பது?

இதற்குப் பல வழிகள் உள்ளன.

(i) அனைத்து மதிப்புகளையும் கூட்டி அதனை எண்ணிக்கையால் வகுத்துப் பெறலாம்.

$$\frac{140+142+150+150+140+148+140+147+145+140+147+145}{12} = \frac{1734}{12} = 144.5$$

(ii) ஊகச்சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தியும் பெறலாம். இங்கு 141 என்ற மதிப்பை ஊகச்சராசரியாக எடுத்துக்கொண்டு பின்வருமாறு சராசரி காணலாம்.

$$= 141 + \frac{(-1)+(1)+(9)+(9)+(-1)+(7)+(-1)+(6)+(4)+(-1)+(6)+(4)}{12}$$

$$= 141 + \frac{-4+46}{12} = 141 + \frac{42}{12} = 141 + 3.5 = 144.5$$

(iii) இம்மூன்றாவது முறையானது வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவலுக்குச் சராசரி காணும் முறையை விளக்குகிறது. இங்கு 140 என்ற மதிப்பு 4 முறை வந்துள்ளது. எனவே 140 இன் நிகழ்வெண் 4. 142 என்ற மதிப்பு 1 முறை வந்துள்ளது. எனவே 142 இன் நிகழ்வெண் 1. இதைப் போன்றே மற்ற மதிப்புகளுக்கும் காணும் போது, நமக்கு பின்வரும் நிகழ்வெண் பட்டியல் கிடைக்கின்றது.

உயரங்கள் (செ.மீ இல்)	140	142	150	148	145	147
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	1	2	1	2	2

இங்கு 140, 4 முறை இருப்பதைக் காணலாம். அதன் மொத்தம் $140 \times 4 = 560$

இங்கு 142, 1 முறை இருப்பதைக் காணலாம். அதன் மொத்தம் $142 \times 1 = 142$

இங்கு 150, 2 முறை இருப்பதைக் காணலாம். அதன் மொத்தம் $150 \times 2 = 300$.

8-Stats TM.indd 286 12/12/2019 3:22:23 PM

இதைப்போலவே மற்ற மதிப்புகளையும் காணவேண்டும்.

இத்தரவுகளைக் பின்வருமாறு பட்டியலிடலாம்.

உயரம் (x)	நிகழ்வெண் (f)	fx
140	4	560
142	1	142
150	2	300
148	1	148
145	2	290
147	2	294
	12	1734

$$\text{கூட்டுச்சராசரி} = \frac{\text{உறுப்புகளின் கூடுதல்}}{\text{உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$= \frac{1734}{12} = 144.5 \text{ செ.மீ.}$$

இம்முறையை அனைத்துத் தரவுகளுக்கும் பொதுமைப்படுத்தலாம். இது ஒரு வாய்ப்பாடாகவும் உருவாகிறது. $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ என்ற n விவரங்களின் நிகழ்வெண்கள் முறையே $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ எனில், சராசரி ஆனது பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$\bar{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

குறிப்பு

ஒவ்வொரு படிநிலையிலும் உள்ள அனைத்துக் குறியீடுகளும் எதனைக் குறிக்கின்றன என்பதன் பொருளுணர்ந்து அதனை முழுமையாகப் புரிந்து படிக்க வேண்டும்

மேற்காணும் முறையை ஊகச்சராசரி முறையுடன் இணைத்துப் பயன்படுத்த இயலுமா? இதோ அதை நோக்கிய ஒரு முயற்சி!

(iv) ஊகச்சராசரி 145 என்க. இப்பொழுது கீழ்க்காணும் அட்டவணையைத் தயார் செய்வோம்

உயரம் (x)	$d =$ ஊகச்சராசரியிலிருந்து விலக்கம்	நிகழ்வெண் (f)	fd
140	140 – 145 = – 5	4	–20
142	142– 145 = – 3	1	–3
150	150 – 145 = + 5	2	+10
148	148 – 145 = + 3	1	+ 3
145 (ஊகச்சராசரி)	145 – 145 = 0	2	0
147	147 – 145 = + 2	2	+ 4
மொத்தம்		$\sum f = 12$	$\sum fd = -23 + 17 = -6$

8-Stats TM.indd 287 12/12/2019 3:22:24 PM

கூட்டுச் சராசரி = ஊகச்சராசரி + விலக்கங்களின் கூடுதல்களின் சராசரி

$$= A + \frac{\sum fd}{\sum f} = 145 + \left(\frac{-6}{12}\right) = 145.0 - 0.5 = 144.5$$

பெரிய மதிப்பிலான எண்களுக்குச் சராசரி காண இந்த ஊகச்சராசரி முறை உதவியாக இருக்கும்.

8.4.3 சராசரி – வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல் (Mean-Grouped Frequency Distribution)

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளைப் பிரிவு இடைவெளிகளாகவும் மற்றும் அதிர்வெண் பட்டியலாகவும் வகைப்படுத்தி கீழ்க்கண்டவாறு நிகழ்வெண் பட்டியலை உருவாக்கலாம்

வயது (ஆண்டுகளில்)	10-20	20-30	30 – 40	40 – 50	50 - 60
வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை	80	120	50	22	8

மேற்கண்ட பட்டியலானது பல்வேறு வயதுடைய வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கையைக் காட்டுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, 120 வாடிக்கையாளர்கள் 20 முதல் 30 வயதுக்குட்பட்டவர்களாக இருக்கிறார்கள். (வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் அட்டவணை தயாரிக்கும் போது தனிப்பட்ட தரவுகள் மறைந்து போகும்) இப்போது ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் பிரதிநிதியாகச் செயல்பட ஒரு மதிப்பு தேவைப்படுகின்றது. இது அந்தப் பிரிவின் மைய மதிப்பாகும்.

மையப்புள்ளி (அ) பிரிவுப் புள்ளியானது கீழ்க்காணும் வாய்ப்பாடு மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது..

பிரிவின் மையப்புள்ளி $= \frac{UCL + LCL}{2}$ இங்கு UCL – என்பது பிரிவின் மேல் எல்லை, LCL – என்பது பிரிவின் கீழ் எல்லை ஆகும்.

தொகுக்கப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரியைக் கீழ்க்காணும் முறைகளில் ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம்:

(i) நேரடி முறை (ii) ஊகச் சராசரி முறை (iii) படிவிலக்க முறை

நேரடி முறை (Direct Method)

நேரடி முறையைப் பயன்படுத்தும் போது, சராசரி காண்பதற்கான வாய்ப்பாடு $\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f}$

இங்கு x என்பது பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளி மற்றும் f என்பது அந்தப் பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண் ஆகும்.

நேரடி முறையில் சராசரி காண்பதற்கான படிகள் :

(i) ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மையப்புள்ளியைக் கண்டுபிடித்து அதை x எனக் குறிக்கவும்.

8-Stats TM.indd 288 12/12/2019 3:22:28 PM

(ii) இம் மையப்புள்ளிகளை அதற்குரிய பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண்ணோடு பெருக்கி, அப்பெருக்கல் பலனின் கூடுதல் fx ஐக் காணவும்.

(iii) $\sum fx$ ஐக் நிகழ்வெண்களின் $\sum f$ ஆல் வகுக்க, சராசரி கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.1 ஒரு குடியிருப்பில் வாழும் மக்களின் எண்ணிக்கை வயதின் அடிப்படையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. குடியிருப்பில் வாழும் மக்களின் சராசரி வயதைக் காண்க.

வயது	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
மக்களின் எண்ணிக்கை	2	6	9	7	4	2

தீர்வு

வயது	மக்களின் எண்ணிக்கை (f)	மைய மதிப்பு (x)	fx
0-10	2	5	10
10-20	6	15	90
20-30	9	25	225
30-40	7	35	245
40-50	4	45	180
50-60	2	55	110
	$\sum f = 30$		$\sum fx = 860$

$$\text{சராசரி} = \bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{860}{30} = 28.67$$

குடியிருப்பில் வாழும் மக்களின் சராசரி வயது = 28.67.

ஊகச் சராசரி முறை (Assumed Mean Method)

வகைப்படுத்தப்பட்ட தரவுகளின் கூட்டுச் சராசரியை நேரடி முறையின் மூலம் விரைவாகக் காண்பதைப் பற்றிப் பார்த்தோம்.கொடுக்கப்பட்ட தரவுகள் அதிக எண்ணிக்கையில் இருக்கும்போது தரவுகளையும் அதற்கான நிகழ்வெண்களையும் பெருக்கி மற்றும் அதனைக் கூட்டி மதிப்பு காண்பது கடினமாக இருப்பதோடு மட்டுமல்லாமல் தவறுகள் ஏற்படவும் அதிக நேரம் எடுத்துக்கொள்ளக் கூடியதாகவும் இருக்கும். இம்மாதிரியான வகைப்படுத்தப்பட்ட தரவுகளுக்கு ஊகச் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்திக் கூட்டுச்சராசரி காணலாம்.

8-Stats TM.indd 289 12/12/2019 3:22:29 PM

ஊகச் சராசரி முறையில் சராசரி காண்பதற்கான படிகள் :

1. தரவுகளில் ஏதாவது ஒரு மதிப்பை ஊகச் சராசரி (A) என எடுத்துக்கொள்வோம்.அந்த மதிப்பானது மைய மதிப்பாக இருந்தால் சிறப்பானதாக இருக்கும்

2. ஒவ்வொரு பிரிவிற்கும் விலக்கம் $d = x - A$ ஐக் காண்க.

3. விலக்கத்தினை அந்தந்தப் பிரிவு இடைவெளியின் நிகழ்வெண் f-உடன் பெருக்கி, பின்பு $\sum fd$ ஐக் காண்க.

4. $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$ என்ற வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்துக.

எடுத்துக்காட்டு 8.2 கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்குச் சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு	100-120	120-140	140-160	160-180	180-200	200-220	220-240
நிகழ்வெண்	10	8	4	4	3	1	2

தீர்வு

ஊகச் சராசரி $A = 170$

பிரிவு	நிகழ்வெண் f	மையமதிப்பு x	$d = x - A$ $d = x - 170$	fd
100-120	10	110	–60	–600
120-140	8	130	–40	–320
140-160	4	150	–20	–80
160-180	4	170	0	0
180-200	3	190	20	60
200-220	1	210	40	40
220-240	2	230	60	120
	$\sum f = 32$			$\sum fd = -780$

சராசரி $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$

$= 170 + \left(\frac{-780}{32}\right)$

$\bar{X} = 170 - 24.375$

$= 145.625$

படிவிலக்க முறை (Step Deviation Method)

இம்முறையில், கணக்கிடுவதை எளிமைப்படுத்துவதற்காக விலக்கம் $d = x - A$–ஐ இடைவெளியின் நீளம் c ஆல் வகுத்து (அதாவது $\frac{x-A}{c}$) பின்பு c ஆல் பெருக்கி சராசரி காணும் வாய்ப்பாடு பின்வருமாறு பெறப்படுகின்றது:

$$\bar{X} = A + \left[\frac{\sum fd}{\sum f} \times c\right], \text{ இங்கு } d = \frac{x-A}{c}.$$

8-Stats TM.indd 290 12/12/2019 3:22:29 PM

எடுத்துக்காட்டு 8.3 கீழ்க்காணும் பரவலிற்கு, படிவிலக்க முறையில், சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
நிகழ்வெண் (f)	10	20	14	16	18	22

தீர்வு:

ஊகச் சராசரி $A = 28$, பிரிவு நீளம் $c = 8$

பிரிவு இடைவெளி	மையப்புள்ளி x	நிகழ்வெண் f	$d = \frac{x-A}{c}$	fd
0-8	4	10	–3	–30
8-16	12	20	–2	–40
16-24	20	14	–1	–14
24-32	28	16	0	0
32-40	36	18	1	18
40-48	44	22	2	44
		$\sum f = 100$		$\sum fd = -22$

சராசரி $\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \times c$

$= 28 + \left(\frac{-22}{100}\right) \times 8$

$= 28 - 1.76 = 26.24$

குறிப்பு

- x_i மற்றும் f_i –ன் மதிப்பு சிறியதாக இருக்கும் போது நேரடி முறையே சிறந்தது.
- x_i மற்றும் f_i –ன் மதிப்பு பெரியதாக இருக்கும் போது ஊகச் சராசரி அல்லது படிவிலக்க முறையைப் பயன்படுத்தலாம்
- பிரிவு இடைவெளிகள் சமமில்லாமல் இருக்கும் போதும், அது எண் மதிப்பில் பெரியதாக இருக்கும் போதும் படிவிலக்க முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

8.4.4 கூட்டுச்சராசரியின் சிறப்புப் பண்பு (A special property of the Arithmetic Mean)

1. சராசரியிலிருந்து, அனைத்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் கூடுதல் பூச்சியம் ஆகும்.

   $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ என்ற n புள்ளிவிவரங்களின் கூட்டுச்சராசரி $\bar{X}$ எனில்

   $(x_1 - \bar{X}) + (x_2 - \bar{X}) + (x_3 - \bar{X}) + \ldots + (x_n - \bar{X}) = 0$. எனவே $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{X}) = 0$

2. தரவிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் ஒரு மாறா மதிப்பு k ஐ கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ முறையே அதன் சராசரியும் மாறா மதிப்பு k அளவு கூடும் அல்லது குறையும்.

3. தரவிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் ஒரு மாறா மதிப்பு k, $k \neq 0$ ஆல் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ முறையே அதன் சராசரியும் மாறா மதிப்பு k ஆல் பெருக்கப்படும் அல்லது வகுக்கப்படும்.

8-Stats TM.indd 291 12/12/2019 3:22:30 PM

எடுத்துக்காட்டு 8.4 கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்குக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து, விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை காண்க. 21, 30, 22, 16, 24, 28, 18, 17

தீர்வு

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{n} = \frac{21+30+22+16+24+28+18+17}{8} = \frac{176}{8} = 22$$

கூட்டுச்சராசரி $\bar{X}$ லிருந்து x_i இன் விலக்கம் $x_i - \bar{X}$, $i = 1, 2, \ldots 8$ ஆகும்.

விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$= (21-22)+(30-22)+(22-22)+(16-22)+(24-22)+(28-22)+(18-22)+(17-22)$

$= 16-16 = 0.$ அல்லது $\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{X}) = 0$

எனவே, சராசரியிலிருந்து அனைத்து உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம் என அறியப்படுகின்றது.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

10 தரவுகளின் சராசரி 48 ஒவ்வொரு தரவுடனும் 7 ஐக் கழித்தால் கிடைக்கும் புதிய தரவுகளின் சராசரியைக் காண்க

எடுத்துக்காட்டு 8.5 6 தரவுகளின் சராசரி 45, ஒவ்வொரு தரவுடன் 4 ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் சராசரியைக் காண்க

தீர்வு

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ என்ற தரவுகளின்

சராசரி $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{6} = 45$ என்க.

ஒவ்வொரு தரவுடன் 4 ஐக் கூட்டினால் கிடைக்கும் புதிய சராசரி,

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x+4)}{6}$$

$$= \frac{(x_1+4)+(x_2+4)+x_3+4)+(x_4+4)+(x_6+4)}{6}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i + 24}{6} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} + 4$$

$$\bar{X} = 45 + 4 = 49.$$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

- 12 தரவுகளின் சராசரி 20 ஒவ்வொரு தரவையும் 6 ஆல் பெருக்க கிடைக்கும் புதிய தரவுகளின் சராசரியைக் காண்க.
- 30 தரவுகளின் சராசரி 16 ஒவ்வொரு தரவையும் 4 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் புதிய தரவுகளின் சராசரியைக் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 8.6 7 தரவுகளின் சராசரி 30 என்க ஒவ்வோர் எண்ணையும் 3 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் புதிய சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு

X என்பது $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ என்ற 7 தரவுகள் அடங்கியது எனில்

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = 30 \text{ அல்லது } \sum_{i=1}^{7} x_i = 210$$

ஒவ்வோர் எண்ணையும் 3 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் புதிய சராசரி

$$\frac{\sum_{i=1}^{7} \frac{x_i}{3}}{7} = \frac{\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{3} + \frac{x_5}{3} + \frac{x_6}{3} + \frac{x_7}{3}\right)}{7}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{21} = \frac{210}{21} = 10$$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

நான்கு எண்கள் மதிப்புகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொரு எண்ணையும் விடுத்துக் கிடைக்கும் மற்ற மூன்று எண்களின் கூட்டுச்சராசரிகள் முறையே 45, 60, 65 அல்லது 70 எனில், அந்த நான்கு எண்களின் கூட்டுச்சராசரியைக் காண்க.

மாற்று முறை

Y என்பது X இன் ஒவ்வோர் எண்ணையும் 3 ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் மதிப்பு எனில்

$$\bar{Y} = \frac{\bar{X}}{3} = \frac{30}{3} = 10.$$

எடுத்துக்காட்டு 8.7

25 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 78.4. இங்கு 96 என்ற மதிப்பானது 69 எனத் தவறுதலாக எடுக்கப்பட்டது கண்டறியப்பட்டது எனில், மதிப்பெண்களுக்கான சரியான சராசரியைக் காண்க.

தீர்வு

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் சராசரி முறையே $n = 25, \bar{X} = 78.4$

தவறான $\sum x = \bar{X} \times n = 78.4 \times 25 = 1960$

சரியான Σx = தவறான Σx – தவறான மதிப்பெண் + சரியான மதிப்பெண்

$$= 1960 - 69 + 96 = 1987$$

$$\text{சரியான } \bar{X} = \frac{\text{சரியான } \sum x}{n} = \frac{1987}{25} = 79.48$$

8-Stats TM.indd 293 12/12/2019 3:22:32 PM

பயிற்சி 8.1

1. ஓர் இடத்தின் ஒரு வாரக் குளிர்கால வெப்பநிலை $26°c, 24°c, 28°c, 31°c, 30°c, 26°c, 24°c$ எனக் கண்டறியப்பட்டது. அந்த இடத்தின் அவ்வாரத்திற்கான சராசரி வெப்பநிலையைக் காண்க.

2. ஒரு குடும்பத்தில் உள்ள 4 நபர்களின் எடைகளின் சராசரி 60கி.கி. அவர்களில் மூவரின் எடைகள் 56கி.கி, 68கி.கி, மற்றும் 72கி.கி எனில் நான்காமவரின் எடையைக் காண்க.

3. ஒரு வகுப்பில் கணித அலகுத் தேர்வில், 10 மாணவர்கள் 75 மதிப்பெண், 12 மாணவர்கள் 60 மதிப்பெண், 8 மாணவர்கள் 40 மதிப்பெண் மற்றும் 3 மாணவர்கள்30 மதிப்பெண் பெற்றனர் எனில் மொத்தத்தில் சராசரி மதிப்பெண் என்ன?

4. ஓர் அறிவியல் ஆய்வகத்தில் 6 புற்றுநோய் பாதிக்கப்பட்ட எலிகளுக்கு இயற்கை மருந்துகளை 10 நாட்கள் கொடுத்து ஆய்வுகளை மேற்கொண்டு அதன் பிறகு அவற்றின் புற்றுநோய்க் கட்டிகளின் அளவுகள் பட்டியலிடப்பட்டுள்ளது.

மதிப்பெண்கள்	1	2	3	4	5	6
புற்று நோய்க் கட்டிகளின் அளவு(மி.மீ^{3})	145	148	142	141	139	140

புற்றுநோய்க்கட்டிகளின் சராசரி அளவைக் காண்க.

5. கீழ்க்காணும் பரவலின் சராசரி 20.2 , எனில் p யின் மதிப்பைக் காண்க

மதிப்பெண்கள்	10	15	20	25	30
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	8	p	10	6

6. வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் எடை வகுப்பறை பதிவேட்டிற்காக எடுக்கப்பட்டது. அவ்வகுப்பின் சராசரி எடையை நேரடி முறையின் மூலம் காண்க.

எடை(கி.கி)	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	11	19	14	0	2

7. கீழ்க்காணும் பரவலின் சராசரியை ஊகச் சராசரி முறையில் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
நிகழ்வெண்	5	7	15	28	8

8. கீழ்க்காணும் பரவலின் சராசரியைப் படி விலக்க முறையில் காண்க.

வயது	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44
ஆட்களின் எண்ணிக்கை	4	20	38	24	10	9

8-Stats TM.indd 294 12/12/2019 3:22:33 PM

8.5 இடைநிலை அளவு (Median)

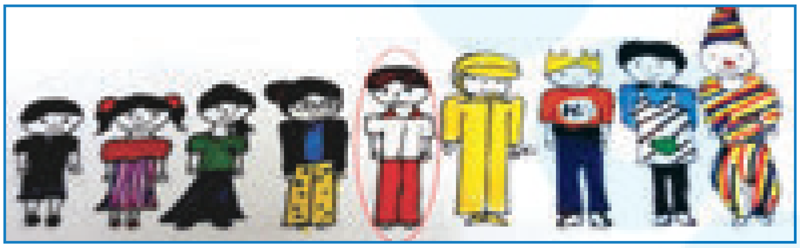
தரவுகளில் அதிக மதிப்புடைய தரவின் மதிப்பைக் குறைத்து, குறை மதிப்புடைய தரவின் மதிப்பை அதிகரித்துச் சரிசமமாகச் சமநிலைப்படுத்தும் தனித்துவமான மையமதிப்பு கூட்டுச் சராசரி ஆகும். ஓர் அலுவலகத்தில் பணிபுரியும் நான்கு பேரின் வருமானங்கள் முறையே ₹5000, ₹6000, ₹7000 மற்றும் ₹8000 என எடுத்துக்கொண்டால் அவர்களின் சராசரி வருமானம் $=\frac{5000+6000+7000+8000}{4}$ = ₹6500ஆகும். இப்போது ஐந்தாவதாக ஒருவர் ₹ 29000 மாத வருமானத்தில் இக்குழுவில் சேர்ந்தால், இந்த ஐந்து நபர்களின் சராசரி வருமானம் $=\frac{5000+6000+7000+8000+29000}{5}=\frac{55000}{5}$ = ₹11000 ஆகும். இத்தரவுகளிலிருந்து குழுவில் உள்ள ஒவ்வொருவரின் சராசரி வருமானம் ₹11000 எனக் கூற இயலுமா? இது தவறாக அமைந்து விடாதா?இங்கே உள்ள சிக்கல் என்னவெனில் மிக உயர்ந்த மதிப்பானது சராசரியைப் பாதிக்கிறது. மேலும் அது சராசரியை பொதுவான மைய மதிப்பிலிருந்து விலக்கிச் செல்கிறது. இது போன்ற நிகழ்வில் நாம் மாறுபட்ட சராசரி வகையைத் தேர்ந்தெடுப்பது அவசியமாகிறது.

இடைநிலை அளவு

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு வகுப்பில் உள்ள 9 மாணவர்களின் உயரங்கள் முறையே 122 செ.மீ, 138 செ.மீ, 124 செ.மீ, 125 செ.மீ, 135 செ.மீ, 141 செ.மீ, 138 செ.மீ, 140 செ.மீ, 141 செ.மீ, 147 செ.மீ, மற்றும் 161 செ.மீ. என எடுத்துக்கொள்வோம்.

(i) வழக்கமான கணக்கீட்டில் சராசரி 137செ.மீ ஆகும்.

(ii) அந்த உயரங்களை ஏறு வரிசையில் 122 செ.மீ, 125 செ.மீ, 125 செ.மீ, 135 செ.மீ, 138 செ.மீ, 140 செ.மீ, 141 செ.மீ, 147 செ.மீ, 160 செ.மீ என எழுதும்போது 138 செ.மீ என்ற மதிப்பானது இருபுறமும் சம அளவிலான எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பதைக் காணலாம். அந்த மதிப்பை அவ்வுயரங்களின் இடைநிலை அளவு என்கிறோம்.



(iii) ஒரு தரவுத்தொகுப்பில் 11உறுப்புகள் ஒரு வரிசையில் அமைந்து இருந்தால், அதன் 6 வது உறுப்பு இடைநிலை அளவு ஆகும். ஏனெனில் அவ்வுறுப்பு தான் மையத்தில் உள்ளது. தரவுத்தொகுப்பில் 101உறுப்புகள் இருந்தால் 51–வது உறுப்பு இடைநிலை அளவு ஆகும்.

ஒரு தரவுத்தொகுப்பில் ஒற்றை எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருந்தால், மையமதிப்பை எளிதாகக் காணலாம். பொதுவாக ஒரு தரவுத்தொகுப்பில் ஒற்றை எண்ணிக்கையில் n உறுப்புகள் இருந்தால் , அதன் இடைநிலை அளவு $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ஆவது உறுப்பு ஆகும்.

8-Stats TM.indd 295 12/12/2019 3:22:34 PM

(iv) ஒரு புள்ளி விவரத்தொகுப்பில் 6 உறுப்புகள் இருந்தால் எவ்வாறு இடைநிலை அளவு காண்பது? புள்ளி விவரத்தொகுப்பின் மையத்தில் உள்ள இரண்டு உறுப்புகளின் சராசரி இடைநிலை அளவு ஆகும் (3.5–வது உறுப்பு எனக் குறிப்பிடலாமா?).

ஒரு தரவுத்தொகுப்பில் 100 உறுப்புகள் இருந்தால் 50.5–வது உறுப்பு இடைநிலை அளவு ஆகும்.

ஒரு தரவுத்தொகுப்பில் இரட்டை எண்ணிக்கையில் n உறுப்புகள் இருந்தால், அதன் இடைநிலை அளவு $\left(\frac{n}{2}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ -ஆவது உறுப்புகளின் சராசரி ஆகும்.

ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைக்கப்பட்ட தரவுகளை இரண்டு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் மைய மதிப்பு இடைநிலை அளவு ஆகும். இது ஒரு நிலையான சராசரி (positional average) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.8 ஒரு மட்டைப் பந்தாட்டத்தில் 11 வீரர்கள் எடுத்த ஓட்டங்கள் முறையே 7, 21, 45, 12, 56, 35, 25, 0, 58, 66, 29 எனில், அவற்றின் இடைநிலை அளவு காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட எண்களை ஏறு வரிசையில் பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

0, 7, 12, 21, 25, 29, 35, 45, 56, 58, 66

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை= 11 (ஓர் ஒற்றைப்படை எண்)

இடைநிலை அளவு $= \left(\frac{11+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு

$= \left(\frac{12}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு = 6 ஆவது உறுப்பு = 29

எடுத்துக்காட்டு 8.9 10,17,16,21,13,18,12,10,19,22, என்ற வகைப்படுத்தப்படாத தரவுகளின் இடைநிலை அளவு காண்க

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட எண்களை ஏறு வரிசையில் பின்வருமாறு எழுதுவோம்: 10,10,12,13,16,17,18,19,21,22.

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை = 10 (ஓர் இரட்டைப்படை எண்)

இடைநிலை அளவு = $\left(\frac{10}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு மற்றும் $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ ஆவது உறுப்புகளின் சராசரி

= 5 ஆவது உறுப்பு மற்றும் 6 ஆவது உறுப்புகளின் சராசரி

$= \frac{16+17}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$

எடுத்துக்காட்டு 8.10 கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில், ஒரு வகுப்பில் கணிதம் மற்றும் அறிவியல் தேர்வினை எழுதிய 12 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள்.

8-Stats TM.indd 296 12/12/2019 3:22:35 PM

கணித மதிப்பெண்	52	55	32	30	60	44	28	25	50	75	33	62
அறிவியல் மதிப்பெண்	54	42	48	49	27	25	24	19	28	58	42	69

எந்தப் பாடத்தில் மாணவர்கள் அதிக மதிப்பெண் பெற்றுள்ளனர்?

தீர்வு மதிப்பெண்களை ஏறு வரிசையில் எழுதவும்.

கணித மதிப்பெண்	25	28	30	32	33	44	50	52	55	60	62	75
அறிவியல் மதிப்பெண்	19	24	25	27	28	42	42	48	49	54	58	69

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை 12 எனவே 6 வது மற்றும் 7 வது மதிப்பெண் பெற்ற மாணவர்களின் மதிப்பெண் சராசரி இடைநிலை அளவு ஆகும்.

கணிதப் பாடத்தின் இடைநிலை அளவு $= \dfrac{44+50}{2} = 47$

அறிவியல் பாடத்தின் இடைநிலை அளவு $= \dfrac{42+42}{2} = 42$

எனவே, கணிதப் பாடத்தின் மதிப்பெண் அறிவியல் பாடத்தைக் காட்டிலும் சிறந்தது என முடிவு செய்யலாம்.

8.5.1 இடைநிலை அளவு – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல் (Median-Ungrouped Frequency Distribution)

(i) கொடுக்கப்பட்ட எண்களை ஏறு அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதவும்.

(ii) குவிவு நிகழ்வெண் பரவலைக் கணக்கிடவும். N மொத்த நிகழ்வெண்.

(iii) N–என்பது ஒரு ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால், இடைநிலை அளவு $=\left(\dfrac{N+1}{2}\right)$ ஆவது உறுப்பு.

(iv) N- என்பது ஒரு இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் இடைநிலை அளவு

$$= \left(\frac{\left(\frac{N}{2}\right) \text{ஆவது உறுப்பு} + \left(\frac{N}{2}+1\right)\text{ஆவது உறுப்பு}}{2}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 8.11 இடைநிலை அளவு காண்க

உயரம்(செ.மீ)	160	150	152	161	156	154	155
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	12	8	4	4	3	3	7

8-Stats TM.indd 297 12/12/2019 3:22:35 PM

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்ட தரவுகளை ஏறு வரிசையில் பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

உயரம்(செ.மீ)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	குவிவு நிகழ்வெண்
150	8	8
152	4	12
154	3	15
155	7	22
156	3	25
160	12	37
161	4	41

இங்கு $N = 41$

இடைநிலை அளவு $= \left(\frac{N+1}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பு $= \left(\frac{41+1}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பு $= 21$ ஆவது மதிப்பு.

41 மாணவர்களின் உயரங்களை ஏறுவரிசையில் வரிசைப்படுத்தினால் 21ஆவது மாணவரின் உயரம் மைய மதிப்பாக இருக்கும். இவரின் இருபுறமும் 20 பேர் உள்ளனர். எனவே நாம் 21ஆவது மாணவரின் உயரத்தைக் காண்பது அவசியமாகிறது. 15 மாணவர்கள் (குவிவு நிகழ்வெண் பார்க்கவும்) 154 செ.மீ உயரத்திற்குச் சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ உள்ளனர். 22 மாணவர்கள் (குவிவு நிகழ்வெண் பார்க்கவும்) 155 செ.மீ உயரத்திற்குச் சமமாகவோ அல்லது உயரமாகவோ உள்ளனர். இதிலிருந்து 21ஆவது மாணவரின் உயரம் 155 செ.மீ என்பதை அறியலாம்.

இடைநிலை அளவு = 155 செ.மீ

8.5.2 இடைநிலை அளவு – வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல் (Median - Grouped Frequency Distribution)

வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலை அளவின் கணக்கீடு கீழ்க்காணும் படிகளைக் கொண்டது.

படிகள்

(i) குவிவு நிகழ்வெண் பரவலைக் கணக்கிடவும்.

(ii) N என்பது நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் எனில், $\frac{N}{2}$ இன் மதிப்பைக் காண்க

(iii) குவிவு நிகழ்வெண் $\frac{N}{2}$ ஐ உறுப்பாகக் கொண்டிருக்கும் பிரிவு இடைவெளி, இடைநிலை அளவு பிரிவு என்று அழைக்கப்படும்.

(iv) இடைநிலை அளவு $= l + \dfrac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$ என்ற வாய்ப்பாட்டைப் பயன்படுத்திக் காணலாம்.

இங்கு $l =$ இடைநிலை அளவு பிரிவின் கீழ்எல்லை

8-Stats TM.indd 298 12/12/2019 3:22:35 PM

f = இடைநிலை அளவு பிரிவின் நிகழ்வெண்

c = இடைநிலை அளவு பிரிவின் நீளம்

N = நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் $\left(\sum f\right)$

m = இடைநிலை அளவுப் பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண்ணுக்கு உடனடியான முந்தைய குவிவு நிகழ்வெண்

எடுத்துக்காட்டு 8.12 கொடுக்கப்பட்டுள்ள 200 குடும்பங்களின் வாராந்திரச் செலவுக் குறிப்புகளின் இடைநிலை அளவு காண்க.

வாராந்திரச் செலவு (₹)	0-1000	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	28	46	54	42	30

தீர்வு

வாராந்திரச் செலவு (₹)	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	குவிவு நிகழ்வெண்
0-1000	28	28
1000-2000	46	74
2000-3000	54	128
3000-4000	42	170
4000-5000	30	200
	N=200	

இடைநிலை அளவு $= \left(\frac{N}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பு $= \left(\frac{200}{2}\right)$ ஆவது மதிப்பு

= 100 ஆவது மதிப்பு

இடைநிலைப் பிரிவு = 2000 – 3000

$\frac{N}{2} = 100 \quad l = 2000$

$m = 74, \; c = 1000, \; f = 54$

இடைநிலை அளவு $= l + \dfrac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$

$= 2000 + \left(\frac{100-74}{54}\right) \times 1000$

$= 2000 + \left(\frac{26}{54}\right) \times 1000 = 2000 + 481.5$

$= 2481.5$

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

1. முதல் நான்கு முழு எண்களின் இடைநிலை அளவு ______.
2. முதல் நான்கு முழு எண்களுடன் நான்கு என்ற எண்ணைச் சேர்க்கும் போது இடைநிலை அளவு காண்க.
3. இரு இடைநிலை அளவுகளுக் கிடையே உள்ள வேறுபாடு___.

8-Stats TM.indd 299 12/12/2019 3:22:39 PM

எடுத்துக்காட்டு 8.13 கீழ்க்காணும் தரவுகளின் இடைநிலை அளவு 24 எனில், x இன் மதிப்பைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
நிகழ்வெண்	6	24	x	16	9

தீர்வு

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண் (f)	குவிவு நிகழ்வெண்
0-10	6	6
10-20	24	30
20-30	x	$30 + x$
30-40	16	$46 + x$
40-50	9	$55 + x$
	$N = 55 + x$	

இடைநிலை அளவு 24 எனில் இடைநிலைப் பிரிவு $20 - 30$

$l = 20 \quad N = 55 + x, \ m = 30, \ c = 10, \ f = x$

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

$$24 = 20 + \frac{\left(\frac{55 + x}{2} - 30\right)}{x} \times 10$$

$$4 = \frac{5x - 25}{x} \quad \text{(எளிமையாக்கிய பிறகு)}$$

$$4x = 5x - 25$$

$$5x - 4x = 25$$

$$x = 25$$

பயிற்சி 8.2

1. கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு இடைநிலை அளவு காண்க 47, 53, 62, 71, 83, 21, 43, 47, 41.
2. கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு இடைநிலை அளவு காண்க 36, 44, 86, 31, 37, 44, 86, 35, 60, 51
3. ஏறு வரிசையில் அமைக்கப்பட்ட 11, 12, 14, 18, x+2, x+4, 30, 32, 35, 41 என்ற தரவுகளின் இடைநிலை அளவு 24 எனில் x இன் மதிப்பைக் காண்க.

AH69TF

8-Stats TM.indd 300 12/12/2019 3:22:39 PM

4. ஓர் ஆராய்ச்சியாளர் 13 எலிகளின் உணவு தேடும் பழக்கத்தை மைதா மாவைக் கொண்டு ஆராய்ச்சி செய்து அவை உணவு தேட எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தை 31,33,63,33,28,29,33, 27,27,34,35,28,32 எனப் பட்டியலிட்டுள்ளார். எலிகள் உணவு தேட எடுத்துக்கொள்ளும் நேரத்தின் இடைநிலை அளவு காண்க.

5. ஒரு வகுப்பில் தொகுத்தறி மதிப்பீட்டில் மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களுக்கு இடைநிலை அளவு காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	2	7	15	10	11	5

6. ஐந்து மிகைமுழுக்களின் சராசரியானது அதன் இடைநிலை அளவைப்போல் இருமடங்கு. அதில் நான்கு முழுக்கள் 3, 4, 6, 9 மற்றும் அதன் இடைநிலை அளவு 6 எனில் ஐந்தாவது முழுவைக் காண்க.

8.6 முகடு

மூன்று வேட்பாளர்கள் பெற்ற வாக்குகள் பற்றிய தரவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

வேட்பாளர் திரு	பெற்ற வாக்குகள்
X	4, 12, 006
Y	9, 87, 991
Z	7, 11, 973
மொத்தம்	21, 11, 970

எந்த வேட்பாளர் வெற்றி பெற்றவராக அறிவிக்கப்படுவார்? கண்டிப்பாக மிக அதிக எண்ணிக்கையிலான வாக்குகளைப் பெற்ற திரு. Y அவர்கள்தான். ஆனால் அவருக்கு எதிரான வாக்குகளின் மொத்த எண்ணிக்கை அதிகம். ஆனாலும் இங்கு அவர்தான் வெற்றி பெற்ற வேட்பாளராகிறார். ஏனெனில் இங்கு தேர்வு என்பது போட்டியாளர்களில் யார் அதிக வாக்குகள் பெற்றவர் என்பதைப் பொருத்து அமைகிறது.

ஒரு நிறுவனம் ஒரு பள்ளியின் 9 ஆம் வகுப்பில் உள்ள 100 மாணவர்களுக்கு விளையாட்டுக் காலணிகளை அளிக்க விரும்புகிறது. அந்த வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களின் காலணிகளின் அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

காலணிகளின் அளவு	5	6	7	8	9	10
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	10	12	27	31	19	1

அந்த நிறுவனம் எந்த அளவுடைய காலணிகளை அதிக எண்ணிக்கையில் வாங்க வேண்டும்?

8-Stats TM.indd 301 12/12/2019 3:22:40 PM

மேற்கண்ட இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து சராசரி மற்றும் இடைநிலை அளவு காண்பது இந்தச் சூழ்நிலைக்குப் பொருத்தமற்றதாக இருக்கும் என்று அறியலாம். இதுபோன்ற நிகழ்வில் நமக்கு வேறு வகையான ஒரு சராசரி தேவைப்படுகிறது. அதன் பெயர் முகடு ஆகும்.

அதிகமுறை இடம் பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பே முகடு ஆகும்.

சராசரியைப் பற்றிய காணொலிகளை வலையொளித் தளத்தில் தேடும்போது அதிகமாகப் பார்க்கப்பட்ட ஒரு காணொலியைப் பார்க்க நேரிடும். இந்த இடத்தில் முகடு என்ற கருத்து பயன்படுத்தப்படுகிறது.

8.6.1 முகடு – செப்பனிடப்படாதத் தரவு (Mode - Raw Data)

அதிக முறை இடம் பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பே முகடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.14 ஓர் அரிசி ஆலையில் உள்ள ஏழு தொழிலாளிகளின் நாள்கூலித் தரவுகள் முறையே ₹ 500, ₹ 600, ₹ 600, ₹ 800, ₹ 800, ₹ 800 மற்றும் ₹ 1000. நாள்கூலித் தரவுகளின் முகடு காண்க.

தீர்வு

இத்தரவில் ₹ 800 அதிகமான(மூன்று) முறை இடம் பெற்று, மற்றவை இரண்டு அல்லது ஒருமுறை இடம்பெற்றிருப்பதால், முகடு ₹ 800 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.15 பின்வரும் எண்களுக்கு முகடு காண்க 17, 18, 20, 20, 21, 21, 22, 22

தீர்வு

இத்தரவில் 20, 21, 22 என்ற எண்கள் ஒவ்வொன்றும் இருமுறை இடம்பெறுவதால், இத்தரவுகளுக்கு 20, 21, 22 ஆகிய மூன்று முகடுகள் உள்ளன.

குறிப்பு

- ஒரே ஒரு முகடு உள்ள பரவல் ஒற்றை முகட்டுப் பரவல் எனப்படும்.
- இரண்டு முகடுகள் உள்ள பரவல் இரட்டை முகட்டுப் பரவல் எனப்படும்.
- மூன்று முகடுகள் உள்ள பரவல் மும்முகட்டுப் பரவல் எனப்படும்.
- மூன்று முகடுகளுக்கு மேல் உள்ள பரவல் பன்முகட்டுப் பரவல் எனப்படும்.

8.6.2 முகடு – வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவல் (Mode for Ungrouped Frequency Distribution)

வகைப்படுத்தப்படாத நிகழ்வெண் பரவலில் மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணைப் பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பு முகடு எனப்படும்

8-Stats TM.indd 302 12/12/2019 3:22:40 PM

எடுத்துக்காட்டு 8.16 ஓர் எண் தொகுப்பானது ஐந்து 4 களையும், நான்கு 5 களையும், ஒன்பது 6 களையும், ஆறு 9 களையும் கொண்டுள்ளது. எனில் முகடு காண்க.

தீர்வு

எண் தொகுப்பின் அளவு	4	5	6	9
நிகழ்வெண்	5	4	9	6

கொடுக்கப்பட்ட தரவில், மிகப்பெரிய நிகழ்வெண் 9 ஐப் பெற்றிருக்கும் அளவு 6. எனவே முகடு 6 ஆகும்.

8.6.3 முகடு–வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல் (Mode–Grouped Frequency Distribution)

வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலில், உறுப்புகளின் சரியான மதிப்பு தெரியாது என்பதால் முகட்டின் சரியான மதிப்பைக் காண்பது மிகக் கடினமானது. எனினும், பிரிவு இடைவெளிகளின் நீளம் சமமானதாக உள்ள போது முகட்டின் தோராய மதிப்பைக் கீழ்வரும் வாய்ப்பாட்டின் மூலம் காணலாம்.

$$\text{முகடு} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$$

இங்கு மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணைப் பெற்றுள்ள பிரிவை முகட்டுப் பிரிவு என்று அழைப்போம்.

l – முகட்டுப் பிரிவின் கீழ் எல்லை

f – முகட்டுப் பிரிவின் நிகழ்வெண்

f_1 – முகட்டுப் பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்கு முந்தைய நிகழ்வெண்

f_2 – முகட்டுப் பிரிவின் நிகழ்வெண்ணுக்குப் பிந்தைய நிகழ்வெண்

எடுத்துக்காட்டு 8.17 கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு முகடு காண்க.

மதிப்பெண்கள்	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	7	10	16	32	24

தீர்வு

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
0.5-5.5	7
5.5-10.5	10
10.5-15.5	16
15.5-20.5	32
20.5-25.5	24

குறிப்பு

தொடர்ச்சியில்லாத பிரிவு இடைவெளியைத் தொடர்ச்சியான பிரிவு இடைவெளியாக மாற்றுவதற்கு ஒவ்வொரு இடைவெளியின் கீழ் எல்லையிலிருந்து 0.5 ஐக் கழிக்க வேண்டும் மற்றும் மேல் எல்லையுடன் 0.5ஐக் கூட்ட வேண்டும்.

முகட்டுப் பிரிவு 16-20 (ஏனெனில் இப்பிரிவு மிகப்பெரிய நிகழ்வெண்ணை பெற்றிருக்கிறது.).

8-Stats TM.indd 303 12/12/2019 3:22:40 PM

$l = 15.5, f = 32, f_1 = 16, f_2 = 24, c = 20.5 - 15.5 = 5$

$$\text{முகடு} = l + \left(\frac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$$

$$= 15.5 + \left(\frac{32 - 16}{64 - 16 - 24}\right) \times 5$$

$$= 15.5 + \left(\frac{16}{24}\right) \times 5 = 15.5 + 3.33 = 18.83.$$

8.6.4 சராசரி , இடைநிலை அளவு, முகடு இவற்றிலிருந்து பெறப்பட்ட உறவு (An Empirical Relationship Between Mean, Median and Mode).

நிகழ்வெண்கள் சீராகப் பரவி இருக்கும்போது ஏற்கனவே அறிந்த மூன்று வகையான சராசரிகளுக்கும் இடையே ஒருவகைத் தொடர்பு ஏற்படும்.

முகடு $\simeq$ 3 இடைநிலை அளவு $-$ 2 சராசரி

எடுத்துக்காட்டு 8.18 ஒரு பரவலின் சராசரி மற்றும் முகடு முறையே 66 மற்றும் 60 ஆகும். இடைநிலை அளவு காண்க.

தீர்வு

சராசரி = 66 முகடு = 60

முகடு $\simeq$ 3 இடைநிலை அளவு – 2 சராசரி

60 $\simeq$ 3 இடைநிலை அளவு – 2(66)

3 இடைநிலை அளவு $\simeq$ 60 +132

இடைநிலை அளவு $\simeq \frac{192}{3} \simeq 64$

பயிற்சி 8.3

1. 10 தொழிலாளர்களின் மாத வருமானங்கள் முறையே:
   5000, 7000, 5000, 7000, 8000, 7000, 7000, 8000, 7000, 5000
   எனில் சராசரி, இடைநிலை அளவு,முகடு காண்க.
2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளுக்கு முகடு காண்க: 3.1, 3.2, 3.3, 2.1, 1.3 , 3.3 , 3.1
3. 11, 15, 17, x+1,19, x–2, 3 என்ற தரவுகளின் சராசரி 14 எனில், x இன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் x இன் மதிப்பைக் கொண்டு தரவுகளின் முகடு காண்க.
4. விளையாட்டுக் கால்சட்டைகளுக்கான தேவைப்பட்டியல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது:

அளவு	38	39	40	41	42	43	44	45
எண்ணிக்கை	36	15	37	13	26	8	6	2

   எந்த அளவு கால்சட்டைக்கு அதிகத் தேவை உள்ளது?

5. தரவுகளின் முகடு காண்க

மதிப்பெண்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	22	38	46	34	20

6. தரவுகளின் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு காண்க

எடை	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	4	8	10	14	8	6

பயிற்சி 8.4

AHP1WQ

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. மையப்புள்ளி m , தொடர் நிகழ்வெண் பரவலின் ஒரு பிரிவின் மேல் எல்லை 'b'எனில், அதன் கீழ் எல்லை.
   (1) $2m - b$ (2) $2m+b$ (3) $m-b$ (4) $m-2b$.
2. ஏழு மதிப்புகளின் சராசரி 81. அவற்றில் ஒரு மதிப்பு நீக்கப்படும் போது மற்ற மதிப்புகளின் சராசரி 78 ஆக அமைகிறது, எனில் நீக்கப்பட்ட மதிப்பு எவ்வளவு
   (1) 101 (2) 100 (3) 99 (4) 98.
3. ஒரு தரவில் அதிகமுறை இடம் பெற்றுள்ள உறுப்பின் மதிப்பு.
   (1) நிகழ்வெண் (2) வீச்சு (3) முகடு (4) இடைநிலை அளவு..
4. பின்வரும் எண் தொகுதிகளில் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஒரே மதிப்பாக அமையும் தொகுதி எது?
   (1) 2,2,2,4 (2) 1,3,3,3,5 (3) 1,1,2,5,6 (4) 1,1,2,1,5.
5. சராசரியிலிருந்து, அனைத்து n உறுப்புகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை
   (1) 0 (2) n-1 (3) n (4) n+1.
6. a, b, c, d மற்றும் e இன் சராசரி 28. a, c மற்றும் e இன் சராசரி 24, எனில் b மற்றும் d இன் சராசரி
   (1) 24 (2) 36 (3) 26 (4) 34
7. x, x+2, x+4, x+6, x+8, என்ற தரவின் சராசரி 11 எனில் முதல் மூன்று தரவுகளின் கூட்டுச்சராசரி
   (1) 9 (2)11 (3) 13 (4) 15.
8. 5,9,x,17 மற்றும் 21 இன் சராசரியானது 13 எனில், x இன் மதிப்பு
   (1) 9 (2) 13 (3) 17 (4) 21.
9. முதல் 11 இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி
   (1) 26 (2) 46 (3) 48 (4) 52.
10. ஓர் எண் தொகுப்பின் சராசரி $\overline{X}$. எண் தொகுப்பின் ஒவ்வொரு மதிப்பும் z என்ற எண்ணால் பெருக்கப்படும் போது அதன் சராசரி
    (1) $\overline{X}+z$ (2) $\overline{X}-z$ (3) $z\,\overline{X}$ (4) $\overline{X}$

செயல்திட்டம்

1. 20 வெவ்வேறு தரையில் வாழும் விலங்குகளின் அதிகபட்ச வேகத்தின் நிகழ்வெண் பட்டியலைத் தயாரிக்க. சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு காண்க. விடைகளை ஒப்பிடுக.
2. ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் விவரம் பற்றிய பதிவேட்டிலிருந்து
   (i) சராசரி வயதினைக் காண்க. (பிரிவு இடைவெளியைப் பயன்படுத்தி)
   (ii) சராசரி உயரத்தினைக் காண்க. (பிரிவு இடைவெளியைப் பயன்படுத்தி)

8-Stats TM.indd 305 12/12/2019 3:22:42 PM

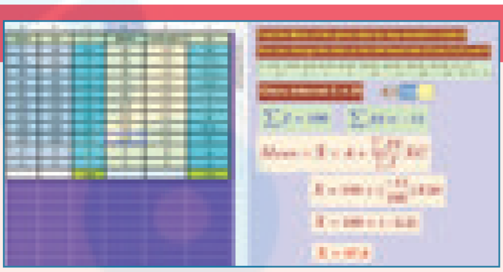
நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- ஒரு குறிப்பிட்ட நோக்கத்திற்காகத் திரட்டப்பட்ட உண்மைகள் மற்றும் எண் மதிப்புகளை **தரவுகள்** என்கிறோம்.
- நேரடியாகக் கள ஆய்வு செய்து தரவுகளைச் சேகரிப்பது **முதல் நிலைத் தரவுகள்** என்கிறோம். பிற மூலங்களிலிருந்து திரட்டிய தரவுகளைப் பயன்படுத்துதல் **இரண்டாம் நிலைத் தரவுகள்** ஆகும்.
- தொடக்க நிலையில் பெறப்பட்ட தரவுகள் **செப்பனிடப்படாதத் தரவுகள்** ஆகும்
- நடுப்புள்ளி $= \dfrac{UCL + LCL}{2}$ (UCL – பிரிவின் மேல் எல்லை, LCL – பிரிவின் கீழ் எல்லை)
- பிரிவு இடைவெளியின் அளவு = UCL – LCL
- தொகுக்கப்பட்டத் தரவுகளின் சராசரி

நேரடி முறை	ஊகச் சராசரி முறை	படிவிலக்க முறை
$\overline{X} = \dfrac{\sum fx}{\sum f}$	$\overline{X} = A + \dfrac{\sum fd}{\sum f}$	$\overline{X} = A + \left[\dfrac{\sum fd}{\sum f} \times c\right]$

- ஒரு பிரிவின் குவிவு நிகழ்வெண் என்பது அந்தப் பிரிவு வரை உள்ள அனைத்துப் பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் ஆகும்.
- வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் இடைநிலை அளவு $= l + \dfrac{\left(\dfrac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$
- வகைப்படுத்தப்பட்ட நிகழ்வெண் பரவலின் முகடு $= l + \left(\dfrac{f - f_1}{2f - f_1 - f_2}\right) \times c$

இணையச் செயல்பாடு



இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்

படி 1

கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்தில் "Mean by step deviation method" என்னும் பணித்தாளிற்குச் செல்க.

இப்பணித்தாளில் 5.5 எடுத்துக்காட்டுக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். படிகளை உற்றுநோக்குக. விரிதாளின் (spread sheet) இடப்பக்கத்தில் உள்ள "From", "To" and "Frequency f" இல் புதிய தரவுகளை உள்ளீடு செய்து வினாக்களை மாற்ற முடியும். அதன் பின் வலப்பக்கத்தில் விடைகளைச் சரி பார்க்கவும்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி : படிவிலக்க முறையில், சராசரி காணுதல்

https://ggbm.at/NWcKTRtA or scan the QR code

B563_9_MAT_TM_T3

8-Stats TM.indd 306 12/12/2019 3:22:45 PM

9 நிகழ்தகவு

நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு என்பது நல்லறிவைக் கணக்கீடாகச் சுருக்குவதேயன்றி வேறொன்றுமில்லை - பியரி சைமன் லாப்லாஸ்

ரிச்சர்ட் வான் மைசஸ்
(கி.பி. (பொ.ஆ.) 1883-1953)

நிகழ்தகவிற்கான பண்பை, பட்டறி அல்லது புள்ளியியல் அணுகுமுறையை ஆர்.எப். பிசர் (R.F.Fisher) மற்றும் ஆர். வான் மைசஸ் (R.Von.Mises) ஆகியோர் விரிவாக்கம் செய்தனர். ஆர். வான் மைசஸ் என்பவரால் கூறுவெளி என்ற கருத்து அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. இக்கருத்து, அளவீட்டுக் கொள்கையை அடிப்படையாகக்கொண்டு நிகழ்தகவியல் என்ற கணிதக் கருத்தியலை உண்டாக்க ஏதுவாக அமைந்தது. சென்ற நூற்றாண்டில் பற்பலப் படைப்பாளிகளின் முயற்சியால் இந்த அணுகுமுறை படிப்படியாக வளர்ந்தது.

கற்றல் விளைவுகள்

- நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கருத்துகளைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- தொன்மை நிகழ்தகவு மற்றும் சோதனை நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைப் புரிந்துகொள்ளுதல்.
- நிகழ்தகவில் நிகழ்ச்சிகளின் பல்வேறு வகைகளைப் பற்றி அறிந்துகொள்ளுதல்.

F9KPT6

9.1 அறிமுகம்

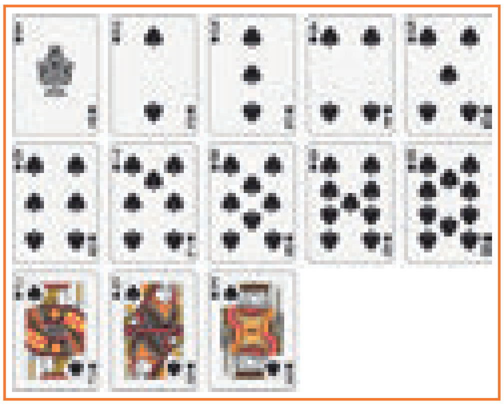
நம்முடைய வாழ்க்கைச் சூழல்களில் சில உறுதியற்ற பண்புகளைக் கொண்ட நிகழ்வுகளைக் காண்பதன் மூலம் நிகழ்தகவு என்ற கருத்தினைப் புரிந்துகொள்ளலாம்.

மருத்துவமனையில் அனுமதிக்கப்பட்ட ஒரு நோயாளிக்கு உயிர் காக்கும் மருந்து ஒன்றைக் கொடுக்க இருப்பதாகக் கொள்வோம்.நோயாளியின் உறவினர்கள் அந்த மருந்து எவ்வாறு வேலை செய்யும் என்பதைப் பற்றிய நிகழ்தகவை அறிய விரும்பலாம். 100 நோயாளிகளுக்குக் கொடுக்கப்பட்டதில் 80–க்கும் மேற்பட்ட நோயாளிகளுக்கு மருந்து சிறப்பாக வேலை செய்துள்ளது என மருத்துவர் கூறினால் அவர்கள் மகிழ்ச்சி அடைவார்கள். இந்த வெற்றிச் சதவீதமே நிகழ்தகவு என்ற கருத்தின் விளக்கமாகும். இது

9 Probability TM.indd 307 26-12-2019 13:15:24

நிகழ்வுகளின் செறிவை (நிகழ்வெண்) அடிப்படையாகக் கொண்டது. இது உறுதியற்ற சூழலில் ஒருவர் முடிவை எடுப்பதற்கு (அடைவதற்கு) உதவி செய்கிறது. ஆகவே நிச்சயமற்றவற்றைக் கணக்கிடும் அல்லது அளவிடும் வழி முறையே நிகழ்தகவு ஆகும்.

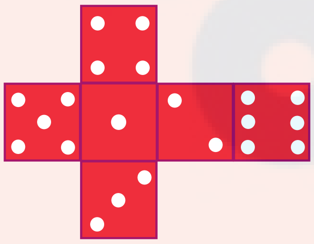
சீட்டாட்டக் கட்டின் 52 சீட்டுகளைப் பற்றி நாம் நன்கு அறிந்திருக்கிறோம். அது ஹார்ட், கிளாவர், டைமண்ட், ஸ்பேடு (Hearts ♥, Clover ♣, Diamonds ♦, Spades ♠) என நான்கு வகையாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு வகையும் 13 சீட்டுகளைக் கொண்டது. இதில் ஏதேனும் ஒரு வகையைத் தேர்ந்தெடுப்போம் (ஸ்பேடு எனக் கொள்க). அவற்றை நன்கு கலைத்து அதில் இருந்து ஏதேனும் ஒரு சீட்டை எடுக்க. அது இராசா சீட்டாக இருக்க வாய்ப்பு என்ன? நீங்கள் இராசா சீட்டிற்குப் பதிலாக ஓர் ஏஸ் சீட்டை விரும்புகிறீர்கள் எனில் உங்கள் வாய்ப்பு மாறுமா? இரண்டு வகைகளிலுமே உங்களுக்கான வாய்ப்பு 13 இல் 1 என்பதை உடனடியாகக் காண முடிகிறது (ஏன்?). வேறு ஏதேனும் ஒரு சீட்டை நீங்கள் தேர்ந்தெடுப்பதாக இருந்தாலும் இந்த வாய்ப்பு மாறாது. நிகழ்தகவு என்பது துல்லியமாக மாறாத மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும் **வாய்ப்பு** எனப் பொருள்படும். ஆனால் 13இல் 1 என்பதற்குப் பதிலாக நாம் $\frac{1}{13}$ எனப் பின்னமாக எழுதுகிறோம். (நிகழ்தகவுகளை இணைத்துக் கையாளும்போது பின்னமாக எழுதுதல் மிக எளிமையாக இருக்கும்). இது **சாதகமான விளைவுகளுக்கும் சாத்தியமான (மொத்த) விளைவுகளுக்கும் உள்ள ஒரு விகிதமாகும்.**



நீங்கள் பகடையைப் பார்த்திருக்கிறீர்களா? ஒரு தரமான பகடை என்பது கனச்சதுர வடிவில் ஒவ்வொரு பக்கமும் 1 முதல் 6 வரை உள்ள வேறுபட்ட எண்களைக் கொண்டிருக்கும். இது சூதாட்டங்களிலும் வாய்ப்புகளோடு தொடர்புடைய வேறு ஆட்டங்களிலும் உருட்டப்படுகிறது.

குறிப்பு

ஒரு சீரான பகடை என்பது அதன் எதிரெதிர் பக்கங்களில் உள்ள எண்களின் கூடுதல் 7 ஆக இருக்கவேண்டும்.



ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 5 பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? இதேபோல் 2 மற்றும் 7 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

மேற்கண்ட அனைத்து வினாக்களுக்கான விடைகளிலும் நிகழ்தகவு என்ற கருத்துக்கான சிறப்புத்தன்மை எதையும் நீங்கள் கவனித்தீர்களா? அதிகபட்ச மதிப்பு மற்றும் குறைந்தபட்ச மதிப்பு என எதையும் நீங்கள் குறிப்பிட முடியுமா? உறுதியாக நடக்கும் ஒரு நிகழ்விற்கான நிகழ்தகவு என்னவாக இருக்க முடியும்? இதைத் தெளிவாக உணரப் பின்வரும் பத்திகளில் முறைப்படுத்துவோம்.

9 Probability TM.indd 308 26-12-2019 13:15:24

9.2 அடிப்படைக் கருத்துகள்

அறிவியலில் ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் நாம் திரும்பத் திரும்பச் சோதனைகளை நடத்தும்போது ஏறத்தாழ ஒரே முடிவையே பெறுகிறோம். இந்தச் சோதனைகள் உறுதியான சோதனைகள் என அறியப்படுகின்றன. ஆர்க்கிமிடிஸ் கொள்கையைச் சரிபார்க்கும் சோதனை மற்றும் ஓம் விதியைச் சரிபார்க்கும் சோதனை போன்றவை உறுதியான சோதனைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டாகும். ஆர்க்கிமிடிஸ் கொள்கையை அல்லது ஓம் விதியைச் சரிபார்த்தல் சோதனைகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இந்தச் சோதனைகளின் முடிவுகள் முன்னரே அறியப்பட்டவை. ஆனால் ஒரே சூழ்நிலையில் நடத்தப்பட்டாலும் வெவ்வேறு முடிவுகளைத் தரக்கூடிய சோதனைகளும் இருக்கின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு சீரான பகடையை உருட்டுதல், ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுதல் அல்லது ஒரு பானையில் இருந்து ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுத்தல் போன்ற நிகழ்வுகளைக் கருதுவோம். இவற்றின் மிகச் சரியான முடிவுகளை நாம் முன்கூட்டியே கணிக்க இயலாது. இவை சமவாய்ப்புச் சோதனைகள் (random experiment) ஆகும். ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் ஒவ்வொரு நிகழ்வும் முயற்சி (trail) எனப்படும். முயற்சியின் ஒவ்வொரு விளைவும் முடிவு என அழைக்கப்படும். (குறிப்பு: பெரும்பாலான புள்ளியியலாளர்கள் சோதனை என்பதையும் முயற்சி என்பதையும் ஒரே பொருளிலேயே பயன்படுத்துகின்றனர்).

நாம் இப்பொழுது நிகழ்தகவு தொடர்பான சில முக்கிய கருத்துகளைப் பார்ப்போம்.

முயற்சி (Trial) : ஒரு பகடையை உருட்டுதல், நாணயத்தைச் சுண்டுதல் ஆகியன முயற்சி ஆகும். முயற்சி என்பது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளைவுகளைத் தரக்கூடிய செயல் ஆகும்.

விளைவு (Outcome) : நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ கிடைக்கிறது. தலை மற்றும் பூ என்பன விளைவுகள். ஒரு முயற்சியின் முடிவு விளைவு என அழைக்கப்படுகிறது.

கூறுபுள்ளி (Sample point) : நாணயத்தைச் சுண்டும்போது கிடைக்கும் தலை மற்றும் பூ என்ற ஒவ்வொரு விளைவும் கூறு புள்ளி எனப்படும். ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் ஒவ்வொரு விளைவும் கூறுபுள்ளி என அழைக்கப்படுகிறது.

கூறுவெளி (Sample space) : ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டும்போது கிடைக்கும் கூறு புள்ளிகளின் கணம் கூறுவெளி எனப்படும். இங்கு $S = \{H,T\}$.

இரு நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படும்போது கிடைக்கும் கூறு புள்ளிகளின் தொகுப்பு $S=\{HH,HT,TH,TT\}$.

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் வாய்ப்புள்ள எல்லா விளைவுகளின் (அல்லது கூறு புள்ளிகளின்) கணம் கூறுவெளி என அழைக்கப்படுகிறது. இது S என்ற ஆங்கில எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. இதிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n(S)$ ஆகும்.

நிகழ்ச்சி (Event) : ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 4 கிடைக்கிறது எனக் கொள்வோம், இது விளைவு என அழைக்கப்படுகிறது. இதே சோதனையில் ஓர் இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி {2, 4, 6} என்ற கணமாகும். கூறுவெளியின் எந்தவொரு உட்கணமும் நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது. ஆகவே ஒரு நிகழ்ச்சி என்பது ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளைவுகளைக் கொண்டிருக்கும்.

9 Probability TM.indd 309 26-12-2019 13:15:24

எடுத்துக்காட்டுகள்,

(i) சமவாய்ப்புச் சோதனை : நாணயத்தைச் சுண்டுதல்

வாய்ப்புள்ள விளைவுகள் : தலை (H) அல்லது பூ (T)

கூறுவெளி : $S = \{H, T\}$

S ன் உட்கணம் : $A=\{H\}$ or $A=\{T\}$

ஆகவே இந்த எடுத்துக்காட்டில், A என்பது ஒரு விளைவு.

(ii) ஒரு பகடையை உருட்டும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளி $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

(iii) ஒரு வாரத்தில் ஒரு நாளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்வில் கூறுவெளி S = { ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}.

செயல்பாடு - 1

இரு நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டுக. சோதனையில் பின்வருவனவற்றை வரிசைப்படுத்துக.	இரு பகடைகளை ஒரே நேரத்தில் உருட்டுக. சோதனையில் பின்வருவனவற்றை வரிசைப்படுத்துக.
சமவாய்ப்புச் சோதனை : வாய்ப்புள்ள விளைவுகள் : கூறுவெளி : S இன் எவையேனும் மூன்று உட்கணங்கள் : (அல்லது எவையேனும் 3 நிகழ்ச்சிகள்)	சமவாய்ப்புச் சோதனை : வாய்ப்புள்ள விளைவுகள் : கூறுவெளி : S இன் எவையேனும் மூன்று உட்கணங்கள் : (அல்லது எவையேனும் 3 நிகழ்ச்சிகள்)

செயல்பாடு - 2

ஒவ்வொரு மாணவரையும் ஒரு நாணயத்தை 10 முறை சுண்டுமாறு கூறிக் கிடைத்த விளைவுகளைப் பின்வருமாறு அட்டவணையில் பட்டியலிடக் கூறவும்.

மொத்தச் சுண்டுதல்கள்	தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை	பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை
⋮	⋮	⋮

(i) பின்னம் 1 : $\dfrac{\text{தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்தச் சுண்டுதல்கள்}}$

(ii) பின்னம் 2 : $\dfrac{\text{பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்தச் சுண்டுதல்கள்}}$

அதே நாணயத்தை 20, 30, 40, 50 முறை மீண்டும் சுண்டுமாறு கூறி மேற்குறிப்பிட்டவாறு பின்னங்களைக் கண்டறிக.

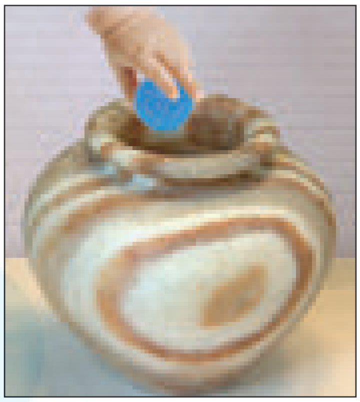
9 Probability TM.indd 310 26-12-2019 13:15:25

செயல்பாடு- 3

வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களை இரண்டு பேர் கொண்ட குழுக்களாகப் பிரிக்கவும். ஒவ்வொரு குழுவிலும் முதல் மாணவர் நாணயத்தை 50 முறை சுண்டட்டும், இரண்டாவது மாணவர் விளைவுகளைப் பதிவு செய்து, பின்வருமாறு அட்டவணையைத் தயார் செய்யட்டும்.

குழு	தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை	பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை	தலை கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை / மொத்தச் சுண்டுதல்கள்	பூ கிடைத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை / மொத்தச் சுண்டுதல்கள்
1				
2				
3				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

9.3 தொன்மை அணுகுமுறை (Classical Approach)



ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்பை, எண் மதிப்பால் குறிப்பிடுவதே நிகழ்தகவு எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பானையில் 4 சிவப்புப் பந்துகள் மற்றும் 6 நீலப் பந்துகள் உள்ளன. சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அது சிவப்பு நிறப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

சமவாய்ப்பு என்ற சொல்லானது பானையில் உள்ள 10 பந்துகளும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான சம வாய்ப்புகளைப் (அதாவது நிகழ்தகவு) பெற்றிருக்கிறது என உறுதியளிக்கிறது.

உங்கள் கண்களானது கட்டப்பட்டு இருப்பதாகவும் பந்துகள் கலைக்கப்பட்டு இருப்பதாகவும் கருதுவோம். இது விளைவுகளைச் சமவாய்ப்பு உடையதாக ஆக்குகிறது

சிவப்புப் பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{10}$ ஆகும். (இதை $\frac{2}{5}$ அல்லது 0.4 என எழுதலாம்.)

நீல நிறப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? இது $\frac{6}{10}$ ஆகும். ($\frac{3}{5}$ அல்லது 0.6).

இரு நிகழ்தகவுகளின் கூடுதல் 1 என்பதைக் காண்க. இதன் பொருள் வேறு ஒரு விளைவு கிடைப்பதற்கான வாய்ப்பு இல்லை என்பதாகும்.

9 Probability TM.indd 311 26-12-2019 13:15:26

இந்த எடுத்துக்காட்டில் நாம் பயன்படுத்திய அணுகுமுறை தொன்மையானது. இது ஒரு முன்னறி நிகழ்தகவு (Priori probability) கணக்கீடாகும். [இலத்தீன் மொழியில் Priori என்றால் 'ஆராய்வு இல்லாமல்' அல்லது உணர்ச்சி அனுபவம் என்று பொருள்] விளைவுகள் சம வாய்ப்புள்ளவையாக இருந்தால் மட்டுமே மேற்கண்ட செயல் நடக்க இயலும் என்பதைக் கவனிக்க.

சிந்தனைக் களம்

ஒரு சோதனை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 எனில் அது தோல்வி அடைவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தொன்மை நிகழ்தகவு என்பது 17 மற்றும் 18ஆம் நூற்றாண்டுகளில் கணிதவியலாளர்களால் முதன் முதலில் படிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு ஆகும். எனவேதான் அது அவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது.

S என்பது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் சமவாய்ப்பு விளைவுகளின் கணம் என்க. (S என்பது அச்சோதனையின் கூறுவெளி என அழைக்கப்படுகிறது).

E என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவு அல்லது விளைவுகளின் தொகுப்பு என்க. (E என்பது நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது).

F9UKUT

E என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(E)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$$P(E) = \frac{\text{சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

ஒரு சோதனையானது திரும்பத்திரும்பப் பலமுறை செய்யப்படும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவானது, ஒரு குறிப்பிட்ட சதவீதத்தில் நிகழும் எனில் அந்தக் குறிப்பிட்ட சதவீதம் அந்த விளைவிற்கான நிகழ்தகவிற்கு மிக அருகில் இருக்கும் என நிகழ்தகவுக்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கோட்பாடு கூறுகிறது.

9.4 பட்டறி அணுகுமுறை (Empirical Approach)

எடுத்துக்காட்டாக, ஓர் உற்பத்தியாளர் ஒவ்வொரு மாதமும் 10000 மின் சொடுக்கிகள் (electric switches) தயாரிக்கிறார். அவற்றில் 1000 சொடுக்கிகள் குறைபாடுடையதாகக் கண்டறியப்பட்டன. அந்த உற்பத்தியாளர் ஒரு குறைபாடுடைய மின் சொடுக்கியை ஒவ்வொரு மாதமும் தயாரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

குறிப்பு

இந்த நிகழ்தகவைத் தீர்மானிப்பதற்கு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்க வேண்டும். முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும்போது , நிகழ்தகவின் சிறந்த மதிப்பீடு கிடைக்கும்.

ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கருத்துப்படி, தேவையான நிகழ்தகவு 10000இல் 1000 அதாவது 0.1 இக்கு அருகில் இருக்கும்.

நாம் இந்த வரையறையை முறைப்படுத்துவோம்.

மொத்த முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையில் (n என்க) E என்ற நிகழ்ச்சியின் r விளைவுகளைப்

9 Probability TM.indd 312 26-12-2019 13:15:26

பெறுகிறோம் எனக் கொண்டால் நிகழ்ச்சி E இன் நிகழ்தகவு ($P(E)$ ஆனது) பின்வருமாறு:

$$P(E) = \frac{r}{n}.$$

முயற்சிகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்க அதிகரிக்க இந்த மதிப்பானது ஒரு மாறிலியில் நிலைகொள்ளும் என நம்மால் உறுதியாகக் கூற இயலுமா ? இயலாது ; இது ஒரு சோதனை, சோதனையை ஒவ்வொரு முறை செய்யும்போதும் மாறுபட்ட ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண்ணைப் பெற வாய்ப்பு உள்ளது.

இருந்தபோதிலும், அங்கே ஒரு பாதுகாப்பு எல்லை உள்ளது. நிகழ்தகவின் மதிப்பானது குறைந்தபட்சம் '0' ஆகவும் அதிகபட்சம் '1' ஆகவும் இருக்க முடியும். கணிதத்தில் இதைப் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.

$$0 \le P(E) \le 1.$$

மேலும் நாம் இதைச் சற்று ஆழமாகப் பார்ப்போம்.

முதலில், r ஆனது n ஐ விட அதிகமாக இருக்க முடியாது என்பது நாம் அறிந்ததே.

எனவே $\frac{r}{n} < 1$. அதாவது $P(E) < 1$. ... (1)

சிந்தனைக் களம்

ஒரு நிகழ்தகவு தொடர்பான வினாவிற்கு மாணவனின் பதில் $\frac{3}{2}$ என இருந்ததைத் தவறு என ஆசிரியர் கூறினார். ஏன்?

அடுத்ததாக, $r = 0$ என்க. இதன் பொருள் இந்த நிகழ்ச்சி நடைபெற இயலாது அல்லது அதிகமான முயற்சிகளில் அது நடைபெறவில்லை என்பதாகும். (ஒரு பகடையை உருட்டும் போது 7 என்ற எண்ணைப் பெற இயலுமா?)

ஆகவே, இங்கு $\frac{r}{n} = \frac{0}{n} = 0.$ ... (2)

இறுதியாக, $r = n$ என்க

நிகழ்ச்சி கண்டிப்பாக நடைபெறும். (ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் அல்லது அதிகமான முயற்சிகளிலும்)

(ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 1 முதல் 6 வரையில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு எண்ணைப் பெறுதல்)

இந்தச் சூழலில், $\frac{r}{n} = \frac{n}{n} = 1.$ ... (3)

(1), (2) மற்றும் (3) இலிருந்து $0 \le P(E) \le 1$ எனக் கண்டறிகிறோம்.

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனை நடத்தப்படுகிறது. பின்வருவனவற்றுள் எவை ஒரு விளைவின் நிகழ்தகவாக இருக்க முடியாது?

(i) 1/5	(ii) – 1/7	(iii) 0.40	(iv) – 0.52	(v) 0
(vi) 1.3	(vii) 1	(viii) 72%	(ix) 107%	

9 Probability TM.indd 313 26-12-2019 13:15:28

எடுத்துக்காட்டு 9.1

ஒரு பகடை உருட்டப்படும்போது, 4ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

விளைவுகளானது, $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

E என்பது 4 ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$E=\{5,6\}$$

$$P(E)=\frac{\text{சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{மொத்த விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{2}{6}=0.333...$$

FA4GHG

எடுத்துக்காட்டு 9.2

42 நபர்கள் பணி செய்யும் ஓர் அலுவலகத்தில் 7 பணியாளர்கள் மகிழுந்து பயன்படுத்துகிறார்கள், 20 பணியாளர்கள் இரு சக்கர வண்டி பயன்படுத்துகிறார்கள். மீதி 15 பணியாளர்கள் மிதிவண்டி பயன்படுத்துகிறார்கள். ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவைக் கண்டறிக.

தீர்வு

மொத்த வேலையாட்கள் = 42

ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண்:

மகிழுந்து பயன்படுத்துவோருக்கான நிகழ்தகவு $=\frac{7}{42}=\frac{1}{6}$

இரு சக்கர வண்டி பயன்படுத்துவோருக்கான நிகழ்தகவு $=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

மிதிவண்டி பயன்படுத்துவோருக்கான நிகழ்தகவு $=\frac{15}{42}=\frac{5}{14}$

இந்த எடுத்துக்காட்டில் நிகழ்தகவுகளின் மொத்தக் கூடுதல் 1ஐ விட அதிகமாகவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும். $\frac{1}{6}+\frac{10}{21}+\frac{5}{14}=\frac{7}{42}+\frac{20}{42}+\frac{15}{42}=1$

எடுத்துக்காட்டு 9.3

அணி I மற்றும் அணி II ஆகிய இரு அணிகளும் 10 முறை 20 ஓவர் மட்டைப் பந்து (cricket) ஆடுகின்றனர். ஒவ்வோர் ஆட்டத்திலும் அவர்கள் எடுத்த ஓட்டங்கள் பின்வருமாறு பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன:.

ஆட்டம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
அணி I	200	122	111	88	156	184	99	199	121	156
அணி II	143	123	156	92	164	72	100	201	98	157

அணி I வெற்றி பெறுவதற்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு என்ன?

9 Probability TM.indd 314 26-12-2019 13:15:29

தீர்வு

இந்தச் சோதனையில் ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் அணி I ஆனது அணி II ஐ எதிர்கொள்கிறது. அணி I வெற்றி பெறுவதற்கான நிலையைக் கருதுவோம்.

இங்கே மொத்தம் 10 முயற்சிகள் உள்ளன. அவற்றில் அணி I முதலாவது, ஆறாவது மற்றும் ஒன்பதாவது ஆட்டங்களில் வெற்றி பெற்றுள்ளது. அணி I வெற்றி பெறுவதற்கான ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு $= \frac{3}{10}$ அல்லது 0.3.

(குறிப்பு : ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் நிகழ்தகவானது, சோதனையின்போது நாம் உற்றுநோக்கும் தொடர்ச்சியான விளைவுகளைச் சார்ந்தது.).

பயிற்சி 9.1

1. நீங்கள் ஒரு தெருவில் நடந்து செல்கிறீர்கள். நீவிர் சந்தித்தவர்களில் ஒரு புதிய மனிதரைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அந்த மனிதரின் பிறந்த நாள் ஞாயிற்றுக்கிழமையாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

2. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு படச்சீட்டு (அதாவது இராசா, இராணி அல்லது மந்திரி (Jack)?) தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

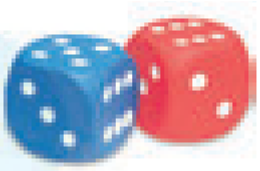
3. ஒரு சீரான பகடையை உருட்டும்போது ஓர் இரட்டை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

4. ஒரு பானையில் 24 பந்துகள் உள்ளன, அவற்றில் 3 சிவப்பு, 5 நீலம் மற்றும் மீதி இருப்பவை பச்சை நிறமுடையதாகும். அவற்றில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது (i) ஒரு நீல நிறப் பந்து (ii) ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்து (iii) ஒரு பச்சை நிறப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

5. இரண்டு சீரான நாணயங்களை ஒரே நேரத்தில் சுண்டும்போது, இரு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

6. இரு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் எண்களின் கூடுதல்

   (i) 1–க்குச் சமமாக (ii) 4–க்குச் சமமாக (iii) 13-ஐ விடச் சிறியதாக

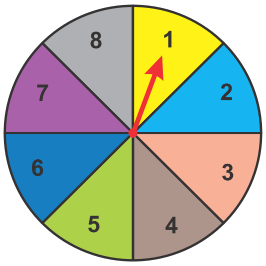


7. ஓர் உற்பத்தியாளர் 7000 ஒளி உமிழ் இருமுனைய விளக்குகளை (LED lights) சோதனை செய்ததில் அவற்றில் 25 விளக்குகள் குறைபாடுடையதாகக் கண்டறியப்பட்டன. சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு விளக்கைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது குறைபாடுடையதாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

8. ஒரு கால்பந்தாட்டத்தில், ஓர் இலக்குக் காப்பாளரால் (Goal – keeper) 40 இல் 32 முயற்சிகளைத் தடுக்க இயலும் எனில், எதிரணியானது ஒரு முயற்சியை இலக்காக மாற்றுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

9 Probability TM.indd 315 26-12-2019 13:15:29

9. கொடுக்கப்பட்ட சுழலட்டையின் (spinner) முள் 3இன் மடங்குகளில் நிலை கொள்ளாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?



10. கொடுக்கப்பட்ட சுழலட்டையை அடிப்படையாகக் கொண்டு நிகழ்தகவைக் கணக்கிடுமாறு எவையேனும் இரு வினாக்களை உருவாக்குக.

9.5 நிகழ்ச்சிகளின் வகைகள் (Types of Events)

நிகழ்ச்சிகளின் சில முக்கியக் கூறுகளை நாம் ஏற்கெனவே பார்த்தோம்,

இரு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ்வதற்குச் சம வாய்ப்புகள் இருந்தால் அவை சம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன.

- ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை அல்லது பூ கிடைப்பது சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.
- ஒரு பகடையை உருட்டும்போது ஒற்றை எண் அல்லது இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். ஆனால் இரட்டை எண் அல்லது 1 என்ற எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 1 எனில் அந்த நிகழ்ச்சி நிச்சயமாக நடைபெறும். இவ்வாறான நிகழ்ச்சி உறுதியான நிகழ்ச்சி எனப்படும். ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0 எனில் அந்நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$P(E) = 1$ எனில் E என்பது உறுதியான நிகழ்ச்சி ஆகும்..

$P(E) = 0$ எனில் E என்பது இயலா நிகழ்ச்சி ஆகும்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும் நிகழ்ச்சியை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது அதன் இரு பக்கங்களும் (பூ மற்றும் தலை) ஒரே நேரத்தில் கிடைக்காது. (சீரான நாணயமாக இருந்தால் அதன் இரு பக்கங்களிலும் தலையாகவோ அல்லது பூவாகவோ இருக்காது). இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே நேரத்தில் நடக்க இயலாது எனில் அந்நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். மழை பெய்யும் நிகழ்வு மற்றும் கதிரவன் ஒளிரும் நிகழ்வு இரண்டும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளா? ஒரு சீட்டுக்கட்டில் உள்ள 52 சீட்டுகளில் இருந்து இராசா சீட்டு அல்லது ஹார்ட் சீட்டு எடுக்கும் நிகழ்ச்சி எந்த வகையானது?

E என்பது ஒரு பகடையை உருட்டும்போது இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. அதாவது 2, 4 மற்றும் 6 கிடைப்பது ஆகும். ஒற்றை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்பது E என்ற நிகழ்ச்சியின் நிரப்பு நிகழ்ச்சியாகும். அதனை E' எனக் குறிப்பிடுவோம். இங்கு E மற்றும் E' என்பவை நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். E' என்பதை E^c எனவும் குறிப்பிடலாம்.

9 Probability TM.indd 316 26-12-2019 13:15:29

குறிப்பு

- E மற்றும் E' ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.(எப்படி)?
- E இன் நிகழ்தகவு + E' இன் நிகழ்தகவு $=1$. மேலும் E மற்றும் E' ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள்.
- $P(E)+P(E')=1$, எனவே ஒன்றின் மதிப்பு தெரிந்திருந்தால் மற்றொன்றின் மதிப்பை எளிதாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்..

முன்னேற்றத்தைச் சோதித்தல்

கீழ்க்கண்டவற்றுள் எவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

வ. எண்	சோதனை	நிகழ்ச்சி 1	நிகழ்ச்சி 2
1	ஒரு பகடை உருட்டுதல்	5-கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	ஒற்றை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
2	ஒரு பகடை உருட்டுதல்	5-கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	இரட்டை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
3	சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல்	ஸ்பேடு சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	கருப்புச் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
4	சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல்	படச் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	5–கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி
5	சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுத்தல்	ஹார்ட் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி	7-கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி

எடுத்துக்காட்டு 9.4 நாளைய மழை பொழிவிற்கான நிகழ்தகவு $\frac{91}{100}$ எனில், மழை பொழியாமல் இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

E என்பது நாளை மழை பொழிவிற்கான நிகழ்ச்சி எனில், E' என்பது நாளை மழை பொழியாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி ஆகும்.

$$P(E) = \frac{91}{100}$$

$$P(E) = 0.91$$

$$P(E') = 1-0.91$$

$$= 0.09$$

எனவே, மழை பொழியாமல் இருக்க நிகழ்தகவு 0.09 ஆகும்.

9 Probability TM.indd 317 26-12-2019 13:15:30

எடுத்துக்காட்டு 9.5 பத்தாம் வகுப்பு இறுதித் தேர்வில் பல்வேறு பாடங்களில் நூற்றுக்கு நூறு மதிப்பெண்கள் பெற்ற 1184 மாணவர்களில், 233 பேர் கணிதத்திலும், 125 பேர் சமூக அறிவியலிலும், 106 பேர் அறிவியலிலும் நூற்றுக்கு நூறு பெற்றுள்ளனர். சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு மாணவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அந்த மாணவர்

(i) கணிதத்தில் நூற்றுக்கு நூறு மதிப்பெண் பெற்றவராக இருக்க,

(ii) அறிவியலில் நூற்றுக்கு நூறு பெறாதவராக இருக்க

நிகழ்தகவு காண்க

தீர்வு நூற்றுக்கு நூறு பெற்ற மொத்த மாணவர்கள் $=1184$ ஆகவே $n = 1184$

(i) E_1 என்பது கணிதத்தில் நூற்றுக்கு நூறு பெற்ற மாணவர்கள் உள்ள நிகழ்ச்சி என்க.

ஆகையால் $n(E_1)=233$, அதாவது, $r_1=233$

$$P(E_1)=\frac{r_1}{n}=\frac{233}{1184}$$

(ii) E_2 என்பது அறிவியலில் நூற்றுக்கு நூறு பெற்ற மாணவர்கள் உள்ள நிகழ்ச்சி என்க.

ஆகையால் $n(E_2)=106$, அதாவது, $r_2=106$

$$P(E_2)=\frac{r_2}{n}=\frac{106}{1184}$$

ஆகவே, அறிவியலில் நூற்றுக்கு நூறு பெறாதவராக இருக்க நிகழ்தகவு

$$P(E_2')=1-P(E_2)=1-\frac{106}{1184}=\frac{1078}{1184}$$

பயிற்சி 9.2

1. ஒரு நிறுவனம் ஆறு மாதத்தில் 10000 மடிக்கணினிகளை உற்பத்தி செய்தது. அவற்றில் 25 மடிக்கணினிகள் குறைபாடு உடையனவாகக் கண்டறியப்பட்டன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மடிக்கணினியைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது குறைபாடில்லாததாக இருக்க நிகழ்தகவு யாது?
2. 16-20 வயதுக்குட்பட்ட 400 இளைஞர்களிடம் நடத்தப்பட்ட ஓர் ஆய்வில், 191 பேர் வாக்காளர் அடையாள அட்டை வைத்திருப்பதாகக் கண்டறியப்பட்டது. சமவாய்ப்பு முறையில் அவர்களில் ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அவர் வாக்காளர் அடையாள அட்டை வைத்திருக்கும் நபராக இல்லாமல் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?
3. ஒரு வினாவிற்கான சரியான விடையை ஊகிப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{x}{3}$ என்க. சரியான விடையை ஊகிக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{x}{5}$ எனில், x இன் மதிப்பு காண்க.
4. ஒரு வரிப்பந்து (tennis) விளையாட்டு வீரர் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆட்டத்தில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.72 எனில் அவர் அந்த விளையாட்டில் தோல்வியடைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?
5. 1500 குடும்பங்களில் அவர்கள் வீட்டிலுள்ள பணிப்பெண்கள் (maids) பற்றிய தரவுகள் திரட்டப்பட்டுப் பின்வருமாறு பதிவு செய்யப்பட்டுள்ளது:

பணிப்பெண்கள் வகை	பகுதிநேரம் மட்டும்	முழுநேரம் மட்டும்	இரண்டு வகை பணிப்பெண்கள்
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	860	370	250

9 Probability TM.indd 318 26-12-2019 13:15:33

சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு குடும்பம் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்போது, அக்குடும்பம்

(i) இரு வகைப் பணிப்பெண்களும் வைத்திருக்க (ii) பகுதி நேரப் பணிப்பெண் வைத்திருக்க (iii) பணிப்பெண் வைத்திருக்காமல் இருக்க நிகழ்தகவு காண்க

பயிற்சி 9.3

பலவுள் தெரிவு வினாக்கள்

1. 0–க்கும் மற்றும் 1–க்கும் இடைப்பட்ட ஓர் எண்ணைக் கொண்டு உறுதியற்றவற்றை அளவிடுவது எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது?
   (1) சமவாய்ப்பு மாறி (2) முயற்சி (3) எளிய நிகழ்ச்சி (4) நிகழ்தகவு

2. நிகழ்தகவு மதிப்பின் இடைவெளி
   (1) -1 மற்றும் $+1$ (2) 0 மற்றும் 1 (3) 0 மற்றும் n (4) 0 மற்றும் ∞

3. ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கருத்தை அடிப்படையாகக்கொண்ட நிகழ்தகவு எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது?
   (1) பட்டறி நிகழ்தகவு (2) தொன்மை நிகழ்தகவு
   (3) (1) மற்றும் (2) இரண்டும் (4) (1)வும் அல்ல (2) வும் அல்ல

FADCY4

4. ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு எவ்வாறு இருக்க முடியாது?
   (1) பூச்சியத்திற்குச் சமம் (2) பூச்சியத்தை விடப் பெரியது
   (3) 1இக்குச் சமம் (4) பூச்சியத்தை விடச் சிறியது

5. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் வாய்ப்புள்ள அனைத்து விளைவுகளின் நிகழ்தகவு எப்பொழுதும்…………. இக்குச் சமம்
   (1) ஒன்று (2) பூச்சியம் (3) முடிவிலி (4) ஒன்றை விடக் குறைவு

6. A என்பது S–ன் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி மற்றும் A' என்பது A–ன் நிரப்பு நிகழ்ச்சி எனில் $P(A')$ இன் மதிப்பு
   (1) 1 (2) 0 (3) $1-A$ (4) $1-P(A)$

7. பின்வருவனவற்றுள் எது ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவாக இருக்க முடியாது?
   (1) 0 (2) 0.5 (3) 1 (4) -1

8. ஒரு சோதனையின் குறிப்பிட்ட முடிவு எவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது?
   (1) முயற்சி (2) எளிய நிகழ்ச்சி (3) கூட்டு நிகழ்ச்சி (4) விளைவு

9. ஒரு சோதனையின் ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட விளைவுகளின் தொகுப்பு …………. என அழைக்கப்படுகிறது.
   (1) நிகழ்ச்சி (2) விளைவு (3) கூறுபுள்ளி (4) மேற்கண்ட எதுவுமில்லை

10. ஒரு பகடையானது …….. இருக்கும்போது, அதன் ஆறு முகங்களும் சமவாய்ப்புடையவை என அழைக்கப்படுகிறது.
   (1) சிறியதாக (2) சீரானதாக (3) ஆறு முகம் கொண்டதாக (4)வட்டமாக

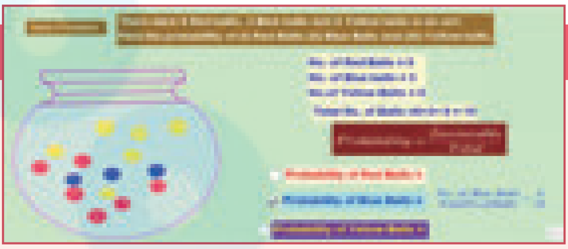
9 Probability TM.indd 319 26-12-2019 13:15:33

நினைவு கூர்வதற்கான கருத்துகள்

- ஒரு சோதனையின் மிகச் சரியான முடிவுகளை நாம் கணிக்க முடிந்தால் அது உறுதியான சோதனை என அழைக்கப்படுகிறது.
- ஒரு சோதனையின் மிகச் சரியான முடிவுகளை நாம் கணிக்க இயலவில்லை எனில் அது சம வாய்ப்புச் சோதனை என அழைக்கப்படுகிறது.
- ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையின் மொத்த விளைவுகளின் கணம், அச்சோதனையின் கூறுவெளி (S) எனப்படும்.
- ஒரு சோதனையின் ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவோ அல்லது விளைவுகளின் தொகுப்போ நிகழ்ச்சி எனப்படும்.
- நிகழ்தகவின் ஒப்பீட்டு நிகழ்வெண் கோட்பாடு, ஒரு விளைவின் நிகழ்தகவானது அந்த விளைவு நடப்பதற்கான விழுக்காட்டிற்கு அருகில் இருக்கும் எனக் கூறுகிறது.
- நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறுவதற்கான வாய்ப்புகள் ஒரே மாதிரியாக இருந்தால் அவை சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன.
- இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே நேரத்தில் நடக்க இயலாது எனில் அவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என அழைக்கப்படுகின்றன.
- $P(E)+P(E')=1$ எனில், நிகழ்வுகள் E மற்றும் E' ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.
- ஒரு நிகழ்ச்சி கண்டிப்பாக நடைபெறும் எனில் அது உறுதியான நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படுகிறது. உறுதியான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவின் மதிப்பு சரியாக '1' ஆகும்.
- ஒரு நிகழ்ச்சி ஒரு போதும் நடைபெறாது எனில் அது இயலா நிகழ்ச்சி எனப்படுகிறது. இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவின் மதிப்பு சரியாக '0' ஆகும்.

இணையச் செயல்பாடு

இறுதியில் கிடைக்கப்பெறும் படம்



படி 1 கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra பக்கத்தில் "Probability" என்னும் பணித்தாளிற்குச் செல்க. 'Venn diagram and Basic probability' என்ற தலைப்பில் இரண்டு பணித்தாள்கள் உள்ளன.

படி - 2 "New Problem" என்ற பகுதியில் சொடுக்கவும். தொடர்புடைய கட்டங்களைச் சொடுக்கி விடைகளை சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

செயல்பாட்டிற்கான உரலி :

நிகழ்தகவு : https://ggbm.at/mj887yua or Scan the QR Code.

B563_9_MAT_TM_T3

9 Probability TM.indd 320 26-12-2019 13:15:34

விடைகள்

1. கண மொழி

பயிற்சி 1.1

1. (i) கணம் (ii) கணமல்ல (iii) கணம் (iv) கணமல்ல

2. (i) {I, N, D, A} (ii) {P, A, R, L, E, O, G, M} (iii) {M, I, S, P}

   (iv) {C, Z, E, H, O, S, L, V, A, K, I}

3. (அ) (i) சரி (ii) சரி (iii) தவறு (iv) சரி (v) தவறு (vi) தவறு

   (ஆ) (i) A (ii) C (iii) $\notin$ (iv) $\in$

4. (i) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18} (ii) B = $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\right\}$

   (iii) C = {64, 125} (iv) D = $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

5. (i) B = {x : x என்பது ஒருநாள் சர்வதேசப் போட்டிகளில் இரட்டைச் சதமடித்த இந்திய வீரர்}

   (ii) C = $\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ (iii) D = {x : x என்பது ஓர் ஆண்டிலுள்ள தமிழ் மாதம் }

   (iv) E = {x : x என்பது 9 ஐ விடச் சிறிய ஒற்றை முழு எண்}

6. (i) P = 'J' என்ற எழுத்தில் துவங்கும் ஆங்கில மாதங்களின் கணம்

   (ii) Q = 5 மற்றும் 31 இக்கு இடைப்பட்ட பகா எண்களின் கணம்

   (iii) R = 5 ஐ விடச் சிறிய இயல் எண்களின் கணம்

   (iv) S = ஆங்கில மெய்யெழுத்துகளின் கணம்

பயிற்சி 1.2

1. (i) $n(M) = 6$ (ii) $n(P) = 5$ (iii) $n(Q) = 3$ (iv) $n(R) = 10$ (v) $n(S) = 5$

2. (i) முடிவுறு (ii) முடிவுறா (iii) முடிவுறா (iv) முடிவுறு

3. (i) சமான கணங்கள் (ii) சமமற்ற கணங்கள் (iii) சம கணங்கள் (iv) சமான கணங்கள்

4. (i) வெற்றுக்கணம் (ii) வெற்றுக்கணம் (iii) ஓருறுப்புக்கணம் (iv) வெற்றுக்கணம்

5. (i) வெட்டும் கணங்கள் (ii) வெட்டாக் கணங்கள் (iii) வெட்டும் கணங்கள்

6. (i) {சதுரம், சாய்சதுரம்} (ii) {வட்டம்} (iii) {முக்கோணம்} (iv) { }

7. $\{\ \}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, \{a, b\}\}$

8. (i) $\{\{\ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

(ii) $\{\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

(iii) $\{\{\ \}, \{p\}, \{q\}\ \{r\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{q, r\}, \{q, s\}, \{r, s\}, \{p, q, r\}, \{p, q, s\}, \{p, r, s\},$ $\{q, r, s\}, \{p, q, r, s\}\}$ (iv) $P(E)= \{\{\ \}\}$

9. (i) 8, 7 (ii) 1024, 1023

10. (i) 16 (ii) 1 (iii) 8

பயிற்சி 1.3

1. (i) {2, 4, 7, 8, 10} (ii) {3, 4, 6, 7, 9, 11} (iii) {2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

(iv) {4, 7} (v) {2, 8, 10} (vi) {3, 6, 9, 11}

(vii) {1, 3, 6, 9, 11, 12} (viii) {1, 2, 8, 10, 12}

(ix) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

2. (i) {2, 5, 6, 10, 14, 16}, {2, 14}, {6, 10}, {5, 16}

(ii) $\{a, b, c, e, i, o, u\}, \{a, e, u\}, \{b, c\}, \{i, o\}$

(iii) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, {1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7, 8, 9, 10,}, {0}

(iv) $\{m, a, t, h, e, i, c, s, g, o, r, y\}, \{e, m, t,\}, \{a, h, i, c, s\}, \{g, o, r, y\}$

3. (i) $\{a, c, e, g\}$ (ii) $\{b, c, f, g\}$ (iii) $\{a, b, c, e, f, g\}$ (iv) $\{c, g\}$ (v) $\{c, g\}$

(vi) $\{a, b, c, e, f, g\}$ (vii) $\{b, d, f, h\}$ (viii) $\{a, d, e, h\}$

Answers_Combine TM.indd 322 26-12-2019 13:17:07

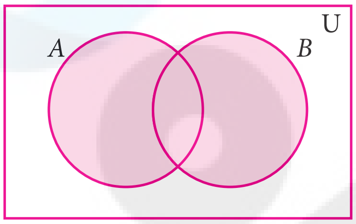
4. (i) $\{0, 2, 4, 6\}$ (ii) $\{1, 4, 6\}$ (iii) $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ (iv) $\{4, 6\}$ (v) $\{4, 6\}$

(vi) $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ (vii) $\{1, 3, 5, 7\}$ (viii) $\{0, 2, 3, 5, 7\}$

5. (i) $\{1, 2, 7\}$ (ii) $\{m, o, p, q, j\}$ (iii) $\{6, 9, 10\}$

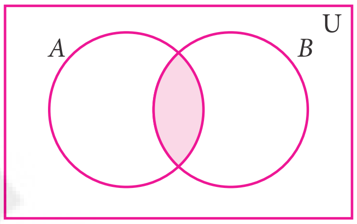
6. (i) $Y-X$ (ii) $(X \cup Y)'$ (iii) $(X-Y) \cup (Y-X)$

7. (i)



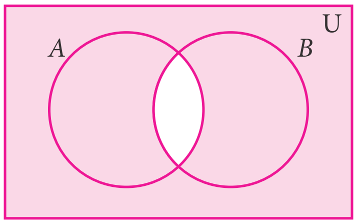
$A \cup B$

(ii)



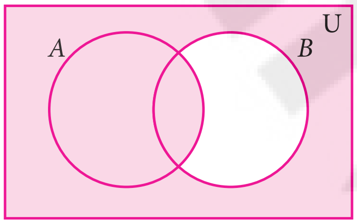
$A \cap B$

(iii)



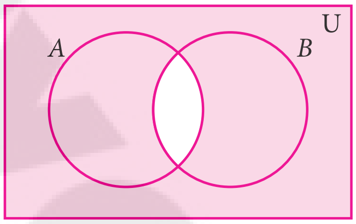
$(A \cap B)'$

(iv)



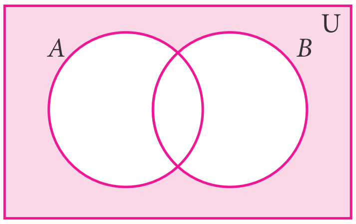
$(B-A)'$

(v)



$A' \cup B'$

(vi)



$A' \cap B'$

(vii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

பயிற்சி 1.4

1. (i) $\{1,2,3,4,5,7,9,11\}$ (ii) $\{2,5\}$ (iii) $\{3,5\}$

பயிற்சி 1.5

1. (i) $\{3,4,6\}$ (ii) $\{-1,5,7\}$ (iii) $\{-3,0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

(iv) $\{-3,0,1,2\}$ (v) $\{1,2,4,6\}$ (vi) $\{4,6\}$ (vii) $\{-1,3,4,6\}$

2. (i) $\{a,b,c,d,e,f\}$ (ii) $\{a,b,d\}$ (iii) { a,b,c,d,e,f } (iv) {a, b, d }

பயிற்சி 1.6

1. (i) 15, 65 (ii) 250, 600 4. (i) 17 (ii) 22 (iii) 47

5. (i) 10 (ii) 10 (iii) 25 6. 1000 7. 8 8. சரியான தகவல் இல்லை

9. (i) 185 (ii) 141 (iii) 326 10. 70

11. $x = 20$, $y = 40$, $z = 30$ 12. (i) 5 (ii) 7 (iii) 8 13. 5

Answers_Combine TM.indd 323 26-12-2019 13:17:08

பயிற்சி 1.7

1. (2) 2. (1) 3. (3) 4. (2) 5. (4) 6. (1) 7. (2) 8. (4) 9. (3) 10. (4)

11. (2) 12. (1) 13. (1) 14. (3) 15. (4) 16. (1) 17. (4) 18. (3) 19. (3) 20. (1)

2. மெய்யெண்கள்

பயிற்சி 2.1

1. D 2. $-\frac{6}{11}, -\frac{5}{11}, -\frac{4}{11}, \ldots \frac{1}{11}$

3. (i) $\frac{9}{40}, \frac{19}{80}, \frac{39}{160}, \frac{79}{320}, \frac{159}{640}$;
இதற்குப் பல விடைகள் உண்டு, அதில் ஒன்று மட்டுமே தரப்பட்டுள்ளது.

(ii) 0.101, 0.102, ... 0.109
இதற்குப் பல விடைகள் உண்டு, அதில் ஒன்று மட்டுமே தரப்பட்டுள்ளது.

(iii) $-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}, -\frac{17}{16}, -\frac{33}{32}$
இதற்குப் பல விடைகள் உண்டு, அதில் ஒன்று மட்டுமே தரப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 2.2

1. (i) 0.2857142..., முடிவுறா சுழல் தன்மை (ii) $-5.\overline{27}$, முடிவுறா சுழல் தன்மை
(iii) $7.\overline{3}$, முடிவுறா சுழல் தன்மை (iv) 1.635, முடிவுறும்

2. $0.\overline{076293}$, 6 3. $0.03\overline{03}$, $2.\overline{15}$

4. (i) $\frac{24}{99}$ (ii) $\frac{2325}{999}$ (iii) $-\frac{1283}{250}$ (iv) $\frac{143}{45}$ (v) $\frac{5681}{330}$ (vi) $-\frac{190924}{9000}$

5. (i) முடிவுறும் (ii) முடிவுறும் (iii) முடிவுறா (iv) முடிவுறா

பயிற்சி 2.3

2. (i) 0.301202200222..., 0.301303300333... (ii) 0.8616611666111 ..., 0.8717711777111 ...
(iii) 1.515511555..., 1.616611666...

3. 2.2362, 2.2363

பயிற்சி 2.5

1.(i) 5^4 (ii) 5^{-1} (iii) $5^{\frac{1}{2}}$ (iv) $5^{\frac{3}{2}}$

2.(i) 4^2 (ii) $4^{\frac{3}{2}}$ (iii) $4^{\frac{5}{2}}$

Answers_Combine TM.indd 324 26-12-2019 13:17:09

3.(i) 7 (ii) 9 (iii) $\frac{1}{27}$ (iv) $\frac{25}{16}$

4.(i) $5^{\frac{1}{2}}$ (ii) $7^{\frac{1}{2}}$ (iii) $7^{\frac{10}{3}}$ (iv) $10^{\frac{-14}{3}}$

5.(i) 2 (ii) 3 (iii) 10 (iv) $\frac{4}{5}$

பயிற்சி 2.6

1.(i) $21\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt[3]{5}$ (iii) $26\sqrt{3}$ (iv) $8\sqrt[3]{5}$

2. (i) $\sqrt{30}$ (ii) $\sqrt{5}$ (iii) 30 (iv) $49a - 25b$

(v) $\frac{5}{16}$ 3.(i) 1.852 (ii) 23.978

4. (i) $\sqrt[3]{5} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[9]{4}$ (ii) $\sqrt{\sqrt{3}} > \sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} > \sqrt[3]{\sqrt[4]{7}}$

5. (i) இயலும் (ii) இயலும் (iii) இயலும் (iv) இயலும்

6. (i) இயலும் (ii) இயலும் (iii) இயலும் (iv) இயலும்

பயிற்சி 2.7

1.(i) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ (ii) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (iii) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ (iv) $\frac{\sqrt{30}}{2}$

2. (i) $\frac{4}{3}(5+2\sqrt{6})$ (ii) $13-4\sqrt{6}$ (iii) $\frac{9+4\sqrt{30}}{21}$ (iv) $-2\sqrt{5}$

3. $a = \frac{-4}{3}, b = \frac{11}{3}$ 4. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ 5. 5.414

பயிற்சி 2.8

1. (i) 5.6943×10^{11} (ii) 2.00057×10^{3} (iii) 6.0×10^{-7} (iv) 9.000002×10^{-4}

2. (i) 3459000 (ii) 56780 (iii) 0.0000100005 (iv) 0.0000002530009

3. (i) 1.44×10^{28} (ii) 8.0×10^{-60} (iii) 2.5×10^{-36} 4.(i) 7.0×10^{9}

(ii) 9.4605284×10^{15} கிமீ (iii) $9.1093822 \times 10^{-31}$ கிகி

5. (i) 1.505×10^{8} (ii) 1.5522×10^{17} (iii) 1.224×10^{7} (iv) 1.9558×10^{-1}

பயிற்சி 2.9

1. (4) 2. (3) 3. (2) 4. (1) 5. (4) 6. (2) 7. (2) 8. (2) 9. (4) 10. (1)

11. (4) 12. (4) 13. (4) 14. (2) 15. (2) 16. (3) 17. (2) 18. (4) 19. (2) 20. (3)

Answers_Combine TM.indd 325 26-12-2019 13:17:11

3. இயற்கணிதம்

பயிற்சி 3.1

1. (i) பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல (ii) பல்லுறுப்புக் கோவை
(iii) பல்லுறுப்புக் கோவை அல்ல (iv) பல்லுறுப்புக் கோவை
(v) பல்லுறுப்புக் கோவை (vi) பல்லுறுப்புக்கோவை அல்ல

2.

	x^2 இன் கெழு	x இன் கெழு
(i)	$\frac{2}{5}$	-3
(ii)	-2	$-\sqrt{7}$
(iii)	π	-1
(iv)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$
(v)	1	$-\frac{7}{2}$

3. (i) 7 (ii) 4 (iii) 5 (iv) 6 (v) 4

4.

	இறங்கு வரிசை	ஏறு வரிசை
(i)	$\sqrt{7}\,x^3 + 6x^2 + x - 9$	$-9 + x + 6x^2 + \sqrt{7}\,x^3$
(ii)	$-\frac{7}{2}x^4 - 5x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x$	$x + \sqrt{2}\,x^2 - 5x^3 - \frac{7}{2}x^4$
(iii)	$7x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 4x - 1$	$-1 + 4x - \frac{6}{5}x^2 + 7x^3$
(iv)	$9y^4 + \sqrt{5}\,y^3 + y^2 - \frac{7}{3}y - 11$	$-11 - \frac{7}{3}y + y^2 + \sqrt{5}\,y^3 + 9y^4$

5. (i) $6x^3+6x^2-14x+17$, 3 (ii) $7x^3+7x^2+11x-8$, 3 (iii) $16x^4-6x^3-5x^2+7x-6$, 4

6. (i) $7x^2+8$, 2 (ii) $-y^3+6y^2-14y+2$, 3 (iii) $z^5-6z^4-6z^2-9z+7$, 5

7. $x^3-8x^2+11x+7$ 8. $2x^4-3x^3+5x^2-5x+6$

9. (i) $6x^4+ 7x^3-56x^2-63x+18$, 4 (ii) $105x^2-33x-18$, 2 (iii) $30x^3-77x^2+54x-7$, 3

10. x^2+y^2+2xy, ₹ 225 11. $9x^2-4$, 3596 ச.அ

12. முப்படிப்பல்லுறுப்புக் கோவை அல்லது பல்லுறுப்புக் கோவையின் படி 3

பயிற்சி 3.2

1. (i) 6 (ii) -6 (iii) 3 2. 1 3. (i) 3 (ii) $-\frac{5}{2}$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $-\frac{b}{a}$

4. (i) $\frac{6}{5}$ (ii) -3 (iii) $-\frac{9}{10}$ (iv) $\frac{4}{9}$

6. (i) 2 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1 (v) 1

பயிற்சி 3.3

1. p(x) என்பது g(x) இன் மடங்கல்ல

Answers_Combine TM.indd 326 26-12-2019 13:17:14

2. (i) மீதி : 0 (ii) மீதி : $\frac{3}{2}$ (iii) மீதி : 62

3. மீதி : −143 4. மீதி : 2019 5. $K = 8$

6. $a = -3$, மீதி : 27 7. (i) $(x-1)$ ஒரு காரணி (ii) $(x-1)$ ஒரு காரணியல்ல

8. $(x-5)$ ஆனது $p(x)$ இன் ஒரு காரணி 9. $m = 10$ 11. $k = 3$ 12. ஆம்

பயிற்சி 3.4

1. (i) $x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6xz$ (ii) $p^2+4q^2+9r^2-4pq+12qr-6pr$
 (iii) $8p^3-24p^2-14p+60$ (iv) $27a^3+27a^2-18a-8$

2. (i) 18,107,210 (ii) −32, −6, +90

3. (i) 14 (ii) $\frac{59}{70}$ (iii) 78 (iv) $\frac{78}{70}$

4. (i) $27a^3-64b^3-108a^2b+144ab^2$ (ii) $x^3+\frac{1}{y^3}+\frac{3x^2}{y}+\frac{3x}{y^2}$

5.(i) 941192 (ii) 1003003001

6. 29 7. 280 8. 335 9. 198 10. ± 5, ± 110

11. 36 12.(i) $8a^3+27b^3+64c^3-72abc$ (ii) $x^3-8y^3+27z^3+18xyz$

13.(i) −630 (ii) $\frac{-9}{4}$

14. 72xyz

பயிற்சி 3.5

1.(i) $2a^2(1+2b+4c)$ (ii) $(a-m)(b-c)$

2.(i) $(x+2)^2$ (ii) $3(a-4b)^2$ (iii) $x(x+2)(x-2)(x^2+4)$ (iv) $\left(m+\frac{1}{m}+5\right)\left(m+\frac{1}{m}-5\right)$
 (v) $6(1+6x)(1-6x)$ (vi) $\left(a-\frac{1}{a}+4\right)\left(a-\frac{1}{a}-4\right)$

3. (i) $(2x+3y+5z)^2$
 (ii) $(-5x+2y+3z)^2$ (அல்லது) $(5x-2y-3z)^2$

4. (i) $(2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$
 (ii) $(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$
 (iii) $(a+2)(a-2)(a^2+4-2a)(a^2+4+2a)$

5. (i) $(x+2y-1)(x^2+4y^2+1-2xy+2y+x)$
(ii) $(l-2m-3n)(l^2+4m^2+9n^2+2lm-6mn+3ln)$

Answers_Combine TM.indd 327 26-12-2019 13:17:16

பயிற்சி 3.6

1.(i) $(x+6)(x+4)$

(ii) $(z+6)(z-2)$

(iii) $(p-8)(p+2)$

(iv) $(t-9)(t-8)$

(v) $(y-20)(y+4)$

(vi) $(a+30)(a-20)$

2. (i) $(2a+5)(a+2)$

(ii) $(x-7y)(5x+6y)$ (iii) $(2x-3)(4x-3)$ (iv) $2(3x+2y)(x+2y)$

(v) $3x^2(3y+2)^2$ (vi) $(a+b+6)(a+b+3)$

3. (i) $(p-q-8)(p-q+2)$

(ii) $(m+6n)(m-4n)$ (iii) $\left(a+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}a-3\right)$ (iv) $(a+1)(a-1)(a^2-2)$

(v) $m(4m+5n)(2m-3n)$ (vi) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2$

பயிற்சி 3.7

1. (i) ஈவு : $4x^2-6x-5$, மீதி : 33 (ii) ஈவு : $4y^2-6y+5$, மீதி : -10

(iii) ஈவு : $4x^2+2x+1$, மீதி : 0 (iv) ஈவு : $8z^2-6z+2$, மீதி : 10

2. நீளம் : $x+4$ 3. உயரம் : $5x-4$ 4. சராசரி : $x^2-5x+25$

5.(i) $x^2+4x+5,\ 12$ (ii) $(x^2-1),\ -2$

(iii) $3x^2-11x+40,\ -125$ (iv) $2x^3-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3x}{8}+\dfrac{51}{32},\ \dfrac{109}{32}$

6. $4x^3-2x^2+3,\ p=-2,\ q=0,$ மீதி $=-10$

7. $a=20,\ b=94$ & மீதி $=388$

பயிற்சி 3.8

1.(i) $(x-2)(x+3)(x-4)$ (ii) $(x+1)(x-2)(2x-1)$

(iii) $(x-1)(2x-1)(2x+3)$ (iv) $(x+2)(x+3)(x-4)$

(v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x-1)(x-10)(x+1)$

Answers_Combine TM.indd 328 26-12-2019 13:17:19

பயிற்சி 3.9

1. (i) p^5 (ii) 1 (iii) $3a^2b^2c^3$ (iv) $16x^6$

(v) abc (vi) $7xyz^2$ (vii) 25ab (viii) 1

2. (i) 1 (ii) a^{m+1} (iii) $(2a+1)$ (iv) 1

(v) $(x+1)(x-1)$ (vi) $(a-3x)$

பயிற்சி 3.10

2.(i) (5,2) (ii) எண்ணற்ற தீர்வுகள் உள்ளன (iii) தீர்வு இல்லை

(iv) (−3, −3) (v) (1,3) (vi) (−3, 3)

3. 75 கிமீ/ மணி, 25கிமீ/ மணி

பயிற்சி 3.11

1.(i)(2, −1) (ii) (4,2) (iii) (40,100) (iv) $(\sqrt{8},\sqrt{3})$

(2) 45 (3) 409

பயிற்சி 3.12

1.(i) (2,1) (ii) (7,2) (iii) (80,30) (iv) $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

(v) $\left(\frac{1}{3},-1\right)$ (vi) (2,4) (2) ₹30000, ₹40000 (3) 75, 15

பயிற்சி 3.13

1.(i) (3,4) (ii) (3, −1) (iii) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

(2) 2 ரூபாய் நாணயங்களின் எண்ணிக்கை: 60; 5 ரூபாய் நாணயங்களின் எண்ணிக்கை: 20 (3) பெரிய குழாய் 40 மணிநேரம்; சிறிய குழாய் 60 மணிநேரம்

பயிற்சி 3.14

1. 64 2. $\frac{5}{7}$

3. $\angle A=120°$, $\angle B=70°$, $\angle C=60°$, $\angle D=110°$

4. தொலைக்காட்சிப் பெட்டியின் விலை = ₹20000;
குளிர்சாதனப் பெட்டியின் விலை = ₹10000

5. 40, 48 6. 1 இந்தியர் – 18 நாட்கள்; 1 சீனர் – 36 நாட்கள்

பயிற்சி 3.15

1. (4) 2. (3) 3. (4) 4. (4) 5. (2) 6. (1) 7. (4) 8. (4) 9. (4) 10. (3)

11. (2) 12. (3) 13. (3) 14. (2) 15. (3) 16. (3) 17. (4) 18. (2) 19. (3) 20. (2)

21. (4) 22. (3) 23. (2) 24. (1) 25. (2) 26. (3) 27. (1) 28. (3) 29. (2)

4. வடிவியல்

பயிற்சி 4.1

1. (i) 70° (ii) 288° (iii) 89° 2. 30°, 60°, 90° 5. 80°, 85°, 15°

பயிற்சி 4.2

1. (i) 40°, 80°, 100°, 140° 2. 62°, 114° , 66° 3. 44° 4. 10cm

7. (i) 30° (ii) 105° (iii) 75° (iv) 105° 8. 122° , 29°

9. 1:1 10. d = 7.6

பயிற்சி 4.3

1. 24 செமீ 2. 17செமீ 3. 8செமீ , 45°, 45°

4. 18செமீ 5. 14 செமீ 6. 6 செமீ

7. (i) 45° (ii) 10° (iii) 55° (iv) 120° (v) 60°

8. $\angle BDC = 25°, \angle DBA = 65°, \angle COB = 50°$

பயிற்சி 4.4

1. 30° 2.(i) $\angle ACD = 55°$ (ii) $\angle ACB = 50°$ (iii) $\angle DAE = 25°$

3. $\angle A = 64°$; $\angle B = 80°$; $\angle C = 116°$; $\angle D = 100°$

4.(i) $\angle CAD = 40°$ (ii) $\angle BCD = 80°$ 5. ஆரம்=5 செமீ 6. 3.25மீ

7. $\angle OAC = 30°$ 8. 5.6மீ 9. $\angle RPO = 60°$

பயிற்சி 4.7

1. (2) 2. (3) 3. (1) 4. (4) 5. (4) 6. (3) 7. (2) 8. (2) 9. (4) 10. (2)

11. (3) 12. (3) 13. (1) 14. (1) 15. (4) 16. (2) 17. (2) 18. (3) 19. (2) 20. (4)

Answers_Combine TM.indd 330 26-12-2019 13:17:22

5. ஆயத்தொலை வடிவியல்

பயிற்சி 5.1

1. $P(-7,6)$ = காற்பகுதி II t; $Q(7,-2)$ = காற்பகுதி IV; $R(-6,-7)$ = காற்பகுதி III ;
   $S(3,5)$ = காற்பகுதி I; மற்றும் $T(3,9)$ = காற்பகுதி I

2. (i) $P = (-4,4)$ (ii) $Q = (3,3)$ (iii) $R=(4,-2)$ (iv) $S = (-5,-3)$

3. (i) x -அச்சிற்கு இணையான நேர்க்கோடு
   (ii) y-அச்சின் மேல் அமைந்துள்ள நேர்க்கோடு.

4. (i) சதுரம் (ii) சரிவகம்

பயிற்சி 5.2

1. (i) $\sqrt{10}$ அலகுகள் (ii) $2\sqrt{26}$ அலகுகள் (iii) $c-a$ (iv) 13 அலகுகள்

2. (i) ஒரு கோடமையும் (ii) ஒரு கோடமையும்

7. 5 அல்லது 1

8. A இன் ஆயத்தொலைவுகள் (9, 9) அல்லது (–5,–5)

9. $y = 4x+9$

10. P இன் ஆயத்தொலைவுகள் (2,0)

12. $30\sqrt{2}$

பயிற்சி 5.3

1.(i) $(-4,-1)$ (ii) $(0,-1)$ (iii) $(a+b,a)$ (iv) $(1,-1)$

2. $(-5,-3)$ 3. $P=-15$ 4. $(9,3)(-5,5)$ மற்றும் $(1,1)$

5. $\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ 6. $(1,8)$

பயிற்சி 5.4

1. $(7,3)$ 2. 5:2 3. $(3,4)$

4. $(-2,3),(1,0)$ 5. $\left(\frac{19}{2},\frac{13}{2}\right),\left(\frac{-9}{2},\frac{-15}{2}\right)$ 7. $(3,2)$

பயிற்சி 5.5

1.(i) $(2,-3)$ (ii) $\left(\frac{-8}{3},\frac{-11}{3}\right)$ 2. $(4,-6)$ 3. 5 அலகுகள்

4. 20 5. $3\sqrt{\frac{5}{2}}$ அலகுகள் 6. $(1,0)$ 7. $(5,-2)$

பயிற்சி 5.6

1. (3) 2. (3) 3. (3) 4. (2) 5. (2) 6. (4) 7. (3) 8. (3) 9. (3) 10. (3)

11. (4) 12. (1) 13. (3) 14. (4) 15. (2) 16. (3) 17. (2) 18. (2) 19. (4) 20. (2)

Answers_Combine TM.indd 331 26-12-2019 13:17:26

6. முக்கோணவியல்

பயிற்சி 6.1

1. $\sin B = \frac{9}{41}; \cos B = \frac{40}{41}; \tan B = \frac{9}{40};\ \text{cosec} B = \frac{41}{9}; \sec B = \frac{41}{40}; \cot B = \frac{40}{9}$

2. (i) $\sin B = \frac{12}{13}$ (ii) $\sec B = \frac{13}{5}$ (iii) $\cot B = \frac{5}{12}$ (iv) $\cos C = \frac{4}{5}$

   (v) $\tan C = \frac{3}{4}$ (vi) $\text{cosec} C = \frac{5}{3}$

3. $\sin\theta = \frac{1}{2}; \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{cosec}\theta = \frac{2}{1}; \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}; \cot\theta = \sqrt{3}$

4. $\frac{3}{40}$ 5. $\sin A = \frac{1-x^2}{1+x^2}; \tan A = \frac{1-x^2}{2x}$ 7. $\frac{1}{2}$

8. $\frac{1}{2}$ 9. $\sin\alpha = \frac{4}{5}; \cos\beta = \frac{4}{5}; \tan\phi = \frac{4}{3}$ 10. 7மீ

பயிற்சி 6.2

2.(i) 0 (ii) $\frac{7}{4}$ (iii) 3 4. 2

பயிற்சி 6.3

1.(i) 1 (ii) 1 (iii) 1 (iv) 2

பயிற்சி 6.4

1.(i) 0.7547 (ii) 0.2648 (iii) 1.3985 (iv) 0.3641

(v) 0.8302 (vi) 2.7907 2.(i) $85°57'$ (or) $85°58'$ (or) $85°59'$

(ii) $47°27'$ (iii) $4°7'$ (iv) $87°39'$ (v) $82°30'$

3.(i) 1.9970 (ii) 2.8659 4. 18.81 செமீ^{2} 5. $36°52'$

6. 54.02 மீ

பயிற்சி 6.5

1. (1) 2. (2) 3. (2) 4. (3) 5. (2) 6. (3) 7. (3) 8. (1) 9. (2) 10. (2)

7. அளவியல்

பயிற்சி 7.1

1. (i) 120 செமீ^{2} (ii) 7.2 மீ^{2} 2. 1320 மீ^{2}, ₹26400 3. 12000 மீ^{2}

4. 1558.8 செமீ^{2} 5. ₹ 1050 6. 240 செமீ^{2} 7. 138 செமீ^{2}

Answers_Combine TM.indd 332 26-12-2019 13:17:30

8. 354 மீ^{2} 9. 1536 மீ^{2} 10. 672 மீ^{2}

பயிற்சி 7.2

1.(i) 1160 செமீ^{2}, 560 செமீ^{2} 2. ₹1716 3. ₹3349

4.(i) 384 மீ^{2}, 256 மீ^{2} (ii) 2646 செமீ^{2}, 1764 செமீ^{2} (iii) 337.5 செமீ^{2}, 225 செமீ^{2}

5.(i) 1600 செமீ^{2} 6. 253.50மீ^{2}, ₹6084 7. 224 செமீ^{2}, 128 செமீ^{2}

பயிற்சி 7.3

1.(i) 576 செமீ^{3} (ii) 2250 மீ^{3} 2. 630 செமீ^{3}

3. 25 செமீ, 20 செமீ, 15 செமீ 4. 2624000 லிட்டர்கள் 5. 25000

6. 12 மீ 7. (i) 125 செமீ^{3} (ii) 42.875 மீ^{3} (iii) 9261 செமீ^{3}

8. 5 மீ 9. 15 செமீ

பயிற்சி 7.4

1. (3) 2. (2) 3. (4) 4. (3) 5. (3) 6. (1) 7. (2) 8. (3) 9. (4) 10. (1)

7. புள்ளியியல்

பயிற்சி 8.1

1. 27°C 2. 44 கிகி 3. 56.96 (அல்லது) 57 (தோராயமாக)

4. 142.5 மிமீ^{3} 5. $p = 20$ 6. 40.2 7. 29.29 8. 29.05

பயிற்சி 8.2

1. 47 2. 44 3. 21 4. 32

5. 31 6. 38

பயிற்சி 8.3

1. 6600, 7000, 7000 2. 3.1 மற்றும் 3.3 (இருமுகடு) 3. 15

4. 40 5. 24 6. 58.5

பயிற்சி 8.4

1. (1) 2. (3) 3. (3) 4. (2) 5. (1) 6. (4) 7. (1) 8. (2) 9. (2) 10. (3)

Answers_Combine TM.indd 333 26-12-2019 13:17:30

8. நிகழ்தகவு

பயிற்சி 9.1

1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{3}{13}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4.(i) $\frac{5}{24}$

(ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{1}{4}$ 6.(i) 0

(ii) $\frac{1}{12}$ (iii) 1 7. $\frac{1}{280}$ 8. $\frac{1}{5}$

9. $\frac{3}{4}$

பயிற்சி 9.2

1. 0.9975 2. $\frac{209}{400}$ 3. $\frac{15}{8}$ 4. 0.28

5.(i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{43}{75}$ (iii) $\frac{1}{75}$

பயிற்சி 9.3

1. (4) 2. (2) 3. (1) 4. (4) 5. (1) 6. (4) 7. (4) 8. (4) 9. (1) 10. (2)

Answers_Combine TM.indd 334 26-12-2019 13:17:32

கணிதக் கலைச்சொற்கள்

X–அச்சின் தொலைவு (கிடைஅச்சுத் தொலைவு)	Abscissa
Y–அச்சின் தொலைவு (செங்குத்து அச்சுத்தொலைவு)	Ordinate
அடர்த்திப் பண்பு	Denseness property
அடுக்குகள்	Indices
அடுக்குக்கணம்	Power set
அடுத்துள்ள கோணங்கள்	Adjacent angles
அரைவட்டம்	Semi–circle
அறிவியல் குறியீடு	Scientific notation
அனைத்துக் கணம்	Universal set
ஆய அச்சுகள்	Coordinate axes
இடைநிலை	Median
இணை	Conjugate
இணை கோடுகள்	Parallel lines
இயலா நிகழ்ச்சி	Impossible event
இயற்கணிதக் கோவை	Algebraic expression
இரண்டாம்நிலைத் தரவுகள்	Secondary data
இருசமபக்க சரிவகம்	Isosceles Trapezium
இருசமபக்க முக்கோணம்	Isosceles triangles
இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவை	Quadratic polynomial
ஈருறுப்பு முறுடுகள்	Binomial surds
ஈருறுப்புக் கோவை	Binomial expression
உட்கணம்	Subset
உட்கோணங்கள்	Interior angles
உட்புறமாக	Internally
உள்வட்ட ஆரம்	Inradius
உள்வட்ட மையம்	Incentre
உள்வட்டம்	Incircle
உறுதியற்ற (அ) நிச்சயமற்ற	Uncertainty
உறுதியான சோதனை	Deterministic Experiment

உறுதியான நிகழ்ச்சி	Sure event
ஊகச் சராசரி	Assumed mean
எதிர்ப்பக்கம்	Opposite side
ஏற்றக் கோணம்	Angle of elevation
ஒத்த கோணங்கள்	Corresponding angles
ஒரு திண்மத்தின் முகப்பு	Face of a solid
ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகள்	Concurrent lines
ஒருங்கமையாத	Inconsistent
ஒருங்கமைவன	Consistent
ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தும் கோடுகள்	Coinciding lines
ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்	Alternate angles
ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்	Mutually exclusive events
ஓருறுப்புக் கணம்	Singular set/Singleton set
ஓருறுப்புக் கோவை	Monomial expression
கண நிரப்பி	Set complementation
கண வித்தியாசம்	Set difference
கணங்களின் சமச்சீர் வித்தியாசம்	Symmetric difference of sets
கணங்களின் சேர்ப்பு	Union of sets
கணங்களின் வித்தியாசம்	Difference of two sets
கணங்களின் வெட்டு	Intersection of two sets
கணங்கள்	Sets
கணச்செயல்கள்	Set operations
கணத்தின் ஆதி எண்	Cardinal number of a set
கர்ணம்	Hypotenuse
கலப்பு முறுடுகள்	Mixed surds
கன அளவு	Volume
கனச் சதுரம்	Cube
கனச் செவ்வகம்	Cuboid

Glossary-Combine.indd 335 26-12-2019 13:20:35

காரணித் தேற்றம்	Factor theorem
காரணிப்படுத்துதல்	Factorisation
கார்டீசியன் அச்சுத் தொகுப்பு	Cartesian coordinate system
கார்டீசியன் தளம்	Cartesian plane
காற்பகுதி	Quadrant
குத்தெதிர் கோணங்கள்	Vertically opposite angles
குறுக்குவெட்டி	Transversal
குறுங்கோண முக்கோணம்	Acute triangle
குறை முழுக்கள்	Negative integers
கூட்டு முறுடுகள்	Compound surds
கூட்டுச் சராசரி	Arithmetic mean
கூறுபுள்ளி	Sample point
கூறுவெளி	Sample space
கெழு	Co–efficient
கோணம்	Angle
சமகணங்கள்	Equal sets
சமகோண முக்கோணம்	Equiangular triangle
சமநிலை	Equilibrium
சமபக்க முக்கோணம்	Equilateral triangle
சமவாய்ப்பு சோதனை	Random Experiment
சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சி	Equally likely event
சமான கணங்கள்	Equivalent sets
சரிவகம்	Trapezium
சர்வசம முக்கோணங்கள்	Congruent triangles
சர்வசம வட்டங்கள்	Congruent circle
சிறிய வட்டக் கோணப்பகுதி	Minor sector
சுழல் தன்மையுள்ள தசம எண்கள்	Recurring decimals
சுற்றுவட்டம்	Circumcircle
செங்கோண முக்கோணம்	Right triangle
செப்பனிடப்படாத தரவுகள்	Raw data
சேர்ப்புப் பண்பு	Associative property

சோதனை நிகழ்தகவு	Empirical probability
தகு உட்கணம்	Proper sub set
தசம எண்களின் காலமுறைமை	Period of decimals
தசம குறியீடு	Decimal representation
தசம விரிவாக்கம்	Decimal expansion
தொகுக்கப்படாத தரவுகள்	Ungrouped data
தொகுக்கப்பட்ட தரவுகள்	Grouped data
தொகுப்பு	Collections
தொகுமுறை வகுத்தல்	Synthetic division
தொன்மை நிகழ்தகவு	Classical probability
நடுக்கோட்டு மையம்	Centriod
நடுப்புள்ளி	Mid point
நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட	Well defined
நாண்	Chord
நாற்கரம்	Quadrilateral
நிகழ்ச்சி	Event
நிகழ்தகவு	Probability
நிகழ்வெண் பட்டியல்	Frequency table
நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள்	Complementary events
நிரப்புக் கணம்	Complement of a set
நிரப்புக் கோணங்கள்	Complementary angles
நேரிய கோணச் சோடிகள்	Linear pair of angles
நேரியச் சமன்பாடுகள்	Linear equations
நேரியப் பல்லுறுப்புக்கோவை	Linear polynomial expression
பகடைகள்	Dice
பக்கப் பரப்பு	Lateral surface area
படி விலக்க முறை	Step–deviation method
பரிதி	Circumference
பரிமாற்றுப் பண்பு	Commutative property
பல கோணம்	Polygon
பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூலங்கள்	Roots of a polynomial

Glossary-Combine.indd 336 26-12-2019 13:20:35

பல்லுறுப்புக் கோவையின் வகுத்தல் படிமுறை	Division Algoritham of polynomial
பல்லுறுப்புக்கோவைச் சமன்பாடு	Polynomial equation
பல்லுறுப்புக்கோவையின் படி	Degree of polynomial
பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள்	Zeros of polynomial
பிரதியிடும் முறை	Substitution method
பிரிவு வாய்ப்பாடு	Section formula
பூச்சியம் / காரணி	Zero / Factor
பெரிய வட்டக்கோணப்பகுதி	Major sector
பொது வித்தியாசம்	Mean difference
பொதுமைய வட்டங்கள்	Concentric circle
மாறிலி	Constant
மிகை முழுக்கள்	Positive integers
மீதித் தேற்றம்	Remainder theroem
மீப்பெரு பொது வகுத்தி	Greatest Common Divisor (G.C.D)
முகடு	Mode
முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள்	Altitudes of a triangle
முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட ஆரம்	Circum radius
முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம்	Circumcentre of a triangle
முக்கோணத்தின் செங்கோட்டு மையம்	Ortho centre of a triangle
முக்கோணத்தின் நடுக்கோடு	Median of a triangle
முக்கோணவியல்	Trigonometry
முடிவிலி கணம்	Infinite set
முடிவுறா தசம எண்கள்	Non–terminating decimals
முடிவுறு கணம்	Finite set
முடிவுறு தசம எண்கள்	Terminating Decimals
முதல்நிலைத் தரவுகள்	Primary data
முப்படி பல்லுறுப்புக் கோவை	Cubic polynomial
முயற்சி	Trial
முழுமையான முறுடுகள்	Pure surds

முறுடுகள்	Surds
முற்றொருமைகள்	Identities
முனை	Vertex
மூல அடிமானம்	Radicand
மூலக்குறியீடு	Radical
மூலைவிட்டம்	Diagonal
மூவுறுப்புக் கோவை	Trinomial expression
மெய்யெண்கள்	Real number
மையப்போக்கு அளவைகள்	Measures of central tendency
மையம்	Centre
மொத்தப் பரப்பு (அல்லது) மொத்தப் புறப்பரப்பு	Total surface area
வகுத்தல் படிமுறை	Division algorithm
வட்ட நாற்கரம்	Cyclic Quadrilateral
வட்டக்கோணப்பகுதி	Sector
வட்டத்துண்டு	Segment
வர்க்க மூலம்	Square root
விகிதப்படுத்துதல்	Rationalisation
விகிதமுறா எண்கள்	Irrational numbers
விகிதமுறு எண்கள்	Rational numbers
விட்டம்	Diameter
விரிகோண முக்கோணம்	Obtuse traingle
விவரித்தல் முறை	Descriptive form
விளிம்பு	Edge
விளைவு	Outcome
வெட்டாக் கணங்கள்	Disjoint sets
வெட்டும் கணங்கள்	Overlapping sets
வெட்டும் கோடுகள்	Intersecting lines
வெளிப்புறமாக	Externally
வெளிவட்ட மையம்	Excentre
வெற்றுக் கணம்	Empty set/Null set
வென்படம்	Venn Diagram

Glossary-Combine.indd 337 26-12-2019 13:20:35

இடைநிலைக் கணக்கு – ஒன்பதாம் வகுப்பு

பாடநூல் உருவாக்கக் குழு

மேலாய்வாளர்

- **முனைவர் இரா. இராமானுஜம்,** பேராசிரியர், கணித அறிவியல் நிறுவனம், தரமணி, சென்னை.
- **முனைவர். அலோகா கன்ஹரே,** துணை பேராசிரியர், ஹோமி பாபா அறிவியல் கல்வி மையம், மும்பை.
- **இரா. ஆத்மராமன்,** கணிதக் கல்வி ஆலோசகர், இந்திய கணித ஆசிரியர்கள் சங்கம், சென்னை-05.

பாட வல்லுநர்

- **முனைவர். க. குமாரசாமி,** இணை பேராசிரியர், ஆர்.கே.எம். விவேகானந்தா கல்லூரி, சென்னை.
- **முனைவர். தா. துளசிராம்,** இணை பேராசிரியர், அ.மா. ஜெயின் கல்லூரி, சென்னை.

பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **பா. தமிழ்செல்வி,** துணை இயக்குநர், SCERT, சென்னை – 06.

ஒருங்கிணைப்பாளர்

ஈ. ராஜ்கமல், இளநிலை விரிவுரையாளர், SCERT, சென்னை – 06

- **வீ.பெ. சுமதி,** பட்டதாரி ஆசிரியை, தி.எ.மு. அரசு மகளிர் மே.நி. பள்ளி சோளிங்கர், வேலூர்.

பாடநூல் உருவாக்கம்

- **பெ. பத்மநாபன்,** விரிவுரையாளர், DIET, கீழ்பென்னாத்தூர், திருவண்ணாமலை மாவட்டம்
- **கோ.செ.அ.முகமது யூசுப் ஜெயினுலாபுதீன்,** பட்டதாரி ஆசிரியர், மன்ப உல் உலூம் மே.நி.ப, கோட்டை, கோயம்புத்தூர் -1
- **அ. செந்தில்குமார்,** பட்டதாரி ஆசிரியர், அ.மே.நி.ப., திருத்துறையூர், கடலூர் மாவட்டம்.
- **இ. ஷாநவாஸ்,** பட்டதாரி ஆசிரியர், மாதிரிப் பள்ளி, காரிமங்கலம், தர்மபுரி மாவட்டம்.
- **கு.பு. கணேஷ்,** பட்டதாரி ஆசிரியர் , அவ்வையார் அரசினர் மகளிர் மே.நி.பள்ளி, தருமபுரி.
- **நா. வெங்கட்ராமன்,** முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர், கோபால் நாயுடு மே.நி.ப, பீளமேடு, கோயம்புத்தூர்.
- **பா. கருப்பசாமி** பட்டதாரி ஆசிரியர், அரசு ஆதிதிராவிடர் நல உயர்நிலைப் பள்ளி, இடையன்குளம், விருதுநகர் மாவட்டம்.
- **நா.பா. சிவகுமார்,** முதுகலை பட்டதாரி ஆசிரியர், வயவர்.மு.வெங்கடசுப்பாராவ், மெட்ரிக்குலேஷன் மேல்நிலைப்பள்ளி, தி.நகர், சென்னை-17
- **சு.சுதாகர்,** பட்டதாரி ஆசிரியர், ஜெயகோபால் கரோடியா தேசிய மே.நி.ப, கிழக்கு தாம்பரம், சென்னை-59.
- **ராணி தேசிகன்,** கல்வி அதிகாரி, ஜெயகோபால் கரோடியா ஹிந்து வித்யாலயா மெட்ரிக் மே.நி.ப., மேற்கு மாம்பலம், சென்னை-33
- **இரா. இரகோத்தமன்,** பட்டதாரி ஆசிரியர், அ.உ.நி.ப., தீத்திபாளையம், கோயம்புத்தூர்.
- **நா. கலாவல்லி,** தலைமையாசிரியை, அ.உ.நி.ப., ஊத்துக்காடு, காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.
- **மு. திருவேங்கடத்தான்,** பட்டதாரி ஆசிரியர், சேதுபதி மேல்நிலைப்பள்ளி, மதுரை.
- **ச. மு. மணி,** பட்டதாரி ஆசிரியர், அ.உ.நி.ப, திருக்கண்டலம், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.
- **சி.கிருபாவதி,** பட்டதாரி ஆசிரியர், ஒரக்காடு இரா. கோவிந்தராஜுலுநாயுடு அ.ஆ.மே.நி.ப., செங்குன்றம், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.
- **கா. கிருஷ்ணகுமார்,** பட்டதாரி ஆசிரியர், அ.உ.நி.பள்ளி, ஏகாட்டூர், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

ஆய்வாளர்கள்

- **முனைவர் மு.ப. ஜெயராமன்,** உதவிப் பேராசிரியர், L.N. அரசு கல்லூரி, பொன்னேரி-601204.
- **முனைவர் நா. கீதா,** உதவிப் பேராசிரியர், காயிதே மில்லத் மகளிர் கல்லூரி, சென்னை
- **முனைவர் கீ. கவிதா,** உதவிப் பேராசிரியர், பாரதி மகளிர் கல்லூரி, சென்னை.
- **திருமதி. செ. சோபனா சர்மா,** உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை பாரதி மகளிர் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை-600108.

ஆய்வாளர்களின் ஒருங்கிணைப்பாளர்

- **ச. விஜயலட்சுமி,** பட்டதாரி ஆசிரியர் கூவத்தூர், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்

இணையச் செயல்பாடு

- **தா. வாசுராஜ்,** பட்டதாரி ஆசிரியர் (ஓய்வு), , கொசப்பூர், புழல் ஒன்றியம், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.
- **க. சங்கர்,** பட்டதாரி ஆசிரியர், அரசினர் மேல்நிலைப்பள்ளி, வேலூர்.

விரைவு குறியீட்டுக் குழு

- **இரா. ஜெகநாதன்,** இ.நி.ஆ, ஊராட்சி ஒன்றிய நடுநிலைப்பள்ளி, கணேசபுரம், போளூர் , திருவண்ணாமலை.
- **வ.பத்மாவதி ,** பட்டதாரி ஆசிரியர், அரசினர் உயர்நிலைப்பள்ளி, வெற்றியூர்,அரியலூர்.
- **சூ.ஆல்பர்ட் வளவன் பாபு ,** பட்டதாரி ஆசிரியர் அரசினர் உயர்நிலைப்பள்ளி, பெருமாள் கோவில், இராமநாதபுரம்.

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக்குழு

வரைபடம்

- **பா.சண்முகம்,** ஓவிய ஆசிரியர், ஊ.ஒ.ந.ப., திருமலைக் குப்பம், வேலூர்

பக்க வடிவமைப்பாளர்

- மதன் ராஜ்
- ஜெரால்டு வில்சன்
- அடிசன்ராஜ்

In House QC

- ராஜேஷ் தங்கப்பன்
- அருண் காமராஜ் பழனிசாமி

ஒருங்கிணைப்பாளர்

- ரமேஷ் முனிசாமி,

தட்டச்சர்

- **ஆ. பழனிவேல்,** SCERT
- **தி. கனிமொழி,** கணினி ஆசிரியர், அ.ஆ.மே.நி.ப., அ.க.இ., ஆவடி.

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம் எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்:

Author-Page.indd 338 26-12-2019 13:19:13

FREE Ebooks

Download Now

Current Affairs

Explore Now

Free Notes + Mock Tests + Mindmaps + Current Affairs

For TNPSC Group II/IIA, IV & VAO Exams

Web

APP

BLOG

Your one-stop destination for all exam related information & preparation resources.

Explore Now

FORUM

Interact with peers & experts, exchange scores & improve your preparation.

Explore Now

www.OliveBoard.in